

琉球大学学術リポジトリ

ひずみ軟化材料の有限要素解析

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2010-08-02 キーワード (Ja): キーワード (En): Concrete, Strain-Softening, FEM 作成者: 伊良波, 繁雄, Iraha, Shigeo メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/17652

ひずみ軟化材料の有限要素解析

伊良波繁雄 *

Finite Element Analysis of Strain-Softening Material

Shigeo IRAHA

Synopsis

A numerical method for tension fracture of materials which exhibit strain-softening is presented here by use of the hybrid stress model. When tension fracture occurs in the materials, the stress field has to satisfy the equation of stress-crack width relation on cracking surfaces. For numerical analysis, the equation has to be introduced into the principle of the hybrid complementary energy using Lagrange multipliers defined on cracking surfaces.

This method is useful for tension fracture analysis because the size of total stiffness matrix does not increase even for calculation under the condition of cracking in the materials. The results of computer simulation on compact tension (CT) test by this method yield a good agreement with the experimental ones.

Key Words: Concrete, Strain-Softening, FEM

1. まえがき

コンクリートや岩, 土質のような材料においては, 崩壊荷重に達した後でひずみの増加によって応力の低下する現象, いわゆるひずみ軟化の特性を示す。コンクリートが引張破壊を起す時は, ひびわれ先端に破壊過程領域^{1), 2)}ができ, この領域では応力が引張強度に達した後でひずみの増加に伴って応力の減少が起る。このような引張破壊によるひずみ軟化を有限要素解析に取り入れる方法として, 非回復性のひずみを一本の仮想ひびわれで表わす方法, すなわち, 仮想ひびわれモデル³⁾がある。仮想ひびわれモデルでは構成式として, 図-1に示すようなひびわれ面に垂直な応力: σ_n とひびわれ幅: w の関係式を用いている。一般的によく用いられているのが図に示し

てある二直線モデルである, 引張破壊によるひずみ軟化を考慮して構造物の耐力を求めるためには, 有限要素法を用いてひびわれ面で σ_n-w 関係を満たすように解を求める必要がある。このとき, σ_n-w 関係を満たすためにひびわれ面に棒要素を用いる方法³⁾とひびわれ面の開口変位と結合力間の撓性方程式に基づく応力法⁴⁾がある。棒要素を用いる方法は要素境界に長さ 0 の要素を入れるために変位の自由度が増加し全体剛性マトリック

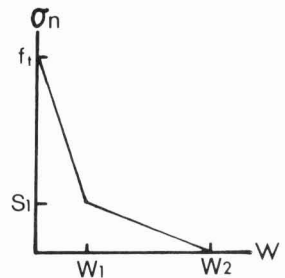


図-1 二直線モデル

受付: 1988年5月9日

* 工学部土木工学科

Dept. of Civil Engineering, Fac. of Eng.

スの大きさも増加する。このために、あらかじめひびわれの発生が予想されるような要素境界のみに棒要素を配置する方法が行われている。撓性方程式を用いる方法も同様に、あらかじめひびわれの発生が予測できる場合のみ有効である。しかし、任意の荷重や任意の形状の鉄筋コンクリート構造物に適用する時はひびわれの発生を予測することは困難であり、このような手法にも限界がある。このために、本報告ではひびわれの発生が要素境界のみに限定されているが、どの要素境界でも容易にひびわれの導入が可能な計算手法について述べる。

二次元ハイブリッドストレスモデルを用いて、塑性条件式が要素境界に垂直な応力とせん断応力の関数の時の弾塑性剛性方程式を求める方法は前報^{5) 6)}に示してある。仮想ひびわれモデルを用いる時のひずみ軟化とは、降伏曲面がひびわれ幅の増加に伴って縮小する現象であるから、塑性条件式の内に応力のみならずひびわれ幅も入ってくる。このために、塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理にラグランジェの未定乗数法を用いて導入する時に、ひびわれ幅とラグランジェ関数との関係を明らかにする必要がある。そこで、本報告では最初に、ハイブリッド型 Hellinger-Reissner の変分原理を用いてひびわれ幅とラグランジェ関数との関係を明らかにした。つぎに、この関係式を用いて、ひずみ軟化を考慮した弾塑性剛性方程式を導く方法を示した。

数値計算例としては、一軸引張破壊の問題を解析し、ひずみ軟化曲線の降下部の勾配の大きさによっては数値計算上発散が起ることを示し、その原因を明らかにした。つぎに、六郷ら⁷⁾の行ったCT試験体の実験のシュミレーションを行い本報告で示している解析手法が十分精度の高いことを示した。

2. 変分原理

ハイブリッド型 Hellinger-Reissner の原理の汎関数は次式で与えられる⁸⁾。

$$\begin{aligned}
 -\Pi_{RH} = & \sum_{\sigma} \iiint_{V_a} [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ijj} + \bar{F}_i) u_i] dv \\
 & - \sum \iint_{S_{ab}} u_i (T_i^a + T_i^b) ds - \iint_{S_e} (T_i - \bar{T}_i) u_i ds \\
 & - \iint_{S_u} T_i \bar{u}_i ds
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで、 $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー関

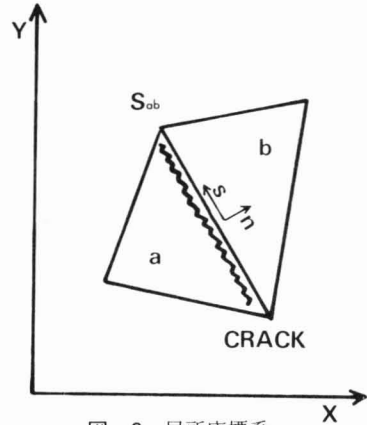


図-2 局所座標系

数、 \bar{F}_i : 物体力、 T_i : 表面力、 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 、 σ_{ij} : 応力、 n_j : 外向き法線ベクトルの方向余弦、 U_i : 変位、 \bar{T}_i : 既知量、 a : 要素a、 b : 要素b、 V_a : 要素aの体積、 S_{ab} : 要素 a,bの境界、 S_e : 幾何学的境界、 S_σ : 力学的境界、 \sum_{σ} : すべての要素の総和、 \sum : すべての要素境界の総和である。

式(1)は全体座標系における変分原理であるが、この式の要素境界積分のみを図-2に示す局所座標系を用いて変換すれば、前報⁵⁾で示したように、二次元問題に対しては次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 -\Pi_{RH} = & \sum_{\sigma} \iint_{V_a} [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ijj} + \bar{F}_i) u_i] dx dy \\
 & - \sum \iint_{S_{ab}} [(\sigma_n^a - \sigma_n^b) U + (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b) V] ds \\
 & - \int_{S_e} [(\sigma_n - \bar{\sigma}_n) U - (\tau_{ns} - \bar{\tau}_{ns}) V] ds \\
 & - \int_{S_u} (\sigma_n \bar{U} + \tau_{ns} \bar{V}) ds
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、 U は要素境界に垂直な方向の変位、 V は要素境界に並行な方向の変位、 σ_n は要素境界に垂直な応力、 τ_{ns} は要素境界面上に作用するせん断応力である。なお、 ℓ, m を方向余弦とすると、 $\sigma_n = \sigma_x \ell^2 + 2\tau_{xy} \ell m + \sigma_y m^2$ 、 $\tau_{ns} = -(\sigma_x - \sigma_y) \ell m + \tau_{xy} (\ell^2 - m^2)$ となる。

要素境界の応力 σ_n^a 、 τ_{ns}^a が降伏条件式

$$f(\sigma_n^a, \tau_{ns}^a) = 0 \tag{3}$$

を満足した時を考える。この時の塑性条件式は

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a = 0 \tag{4}$$

となる。すなわち、図-2に示すように、要素a, b境界に破壊が発生した時は式(4)の付帯条件のもとで式(2)を解けばよい。ここで、ラグランジェの未定乗数： Γ^a を用いて付帯条件式を(2)の変分原理に導入すれば

$$-\Pi_{RH}'' = -\Pi_{RH}' + \int_{S_{ab}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) \Gamma^a ds \quad (5)$$

となる。ここで、破壊は図-2に示すように、要素内ではあるが、要素境界の近くに発生していると仮定する。

式(5)の Γ^a の物理的意味を明らかにするために、 Π_{RH}'' の第一変分を求め、その中で S_{ab} 上の停留条件に関連する項のみを示せば

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_{RH}'' &= \int_{S_{ab}} \left[U^a \delta \sigma_n^a + \sigma_n^a \delta U^a + V^a \delta \tau_{ns}^a + \tau_{ns}^a \delta V^a \right. \\ &\quad - U^b \delta \sigma_n^b - \sigma_n^b \delta U^b - V^b \delta \tau_{ns}^b - \tau_{ns}^b \delta V^b \\ &\quad - (\sigma_n^a - \sigma_n^b) \delta U - U \delta \sigma_n^a + U \delta \sigma_n^b \\ &\quad + (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b) \delta V - V \delta \tau_{ns}^a + V \delta \tau_{ns}^b \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) \delta \Gamma^a \\ &\quad + \left(\Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) \\ &\quad + \dots \\ &= \int_{S_{ab}} \left[\left(U^a - U + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right) \delta \sigma_n^a \right. \\ &\quad + (-U^b + U) \delta \sigma_n^b \\ &\quad + \left(V^a - V + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \right) d\tau_{ns}^a \\ &\quad + (-V^b + V) \delta \tau_{ns}^b \\ &\quad - (\sigma_n^a - \sigma_n^b) \delta U - (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b) \delta V \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) \delta \Gamma^a \right] ds + \dots (6) \end{aligned}$$

となる。式(6)から次式が得られる。

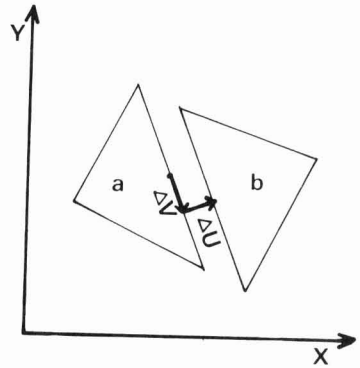


図-3 要素間のひびわれ

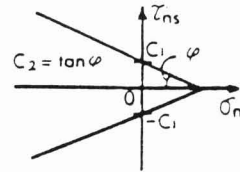


図-4 モール・クーロンの式

$$\left. \begin{aligned} U^a &= U - \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a}, U^b = U \\ V^a &= V - \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a}, V^b = V \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\sigma_n^a = \sigma_n^b, \tau_{ns}^a = \tau_{ns}^b \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a = 0 \quad (9)$$

図-3に示すように、破壊によって生じた要素間のずれを ΔU 、ひびわれ幅を ΔV とすると、式(7)より

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= U^b - U^a = \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \\ \Delta V &= V^b - V^a = \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

が得られる。すなわち、降伏関数が明らかであれば、ラグランジェの未定乗数 Γ^a から ΔU と ΔV を求めることができる。降伏関数 f が図-4に示すモール・クーロンの式の場合は

$$f = \tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n \mp C_0 \quad (11)$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} = \pm C_1 \quad (12)$$

となる。これを式(10)代入すれば

$$\Delta U = \pm c_1 \Gamma^a, \quad \Delta V = \Gamma^a \quad (13)$$

となり、 Γ^a の物理的意味は要素間のずれの量を意味している。

式(5)において、要素内の応力場を釣合応力場に仮定すればハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理が次式のように得られる。

$$-\Pi_{CH} = -\Pi_{CH} + \int_{S_{ab}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) \Gamma^a ds \quad (14)$$

ここで、 $-\Pi_{CH}$ は

$$-\Pi_{CH} = \iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{aV_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) ds + \int_{S_a} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) ds \quad (15)$$

である。付帯条件は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 0 && \text{in } V_n \\ V &= \bar{V}, \quad U = \bar{U} && \text{on } S_u \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる。

要素境界で破壊が生じた時、硬化による応力の増加がひびわれ幅に比例すると仮定すれば、塑性条件式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} (d\sigma_n^a - C_1 dU) + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} (d\tau_{ns}^a - C_2 dV) = 0 \quad (17)$$

この式で、 C_1 と C_2 はそれぞれ引張破壊に対する硬化係数とすべり破壊に対する硬化係数である。なお、ひずみ軟化に対しては C_1, C_2 が負になる。式(17)の仮定は近藤が文献9)で示しているヒンジ法にひずみ硬化を導入する時の定式化を参考にしている。式(17)は式(10)を用いて次のように変形される。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \left(d\sigma_n^a - C_1 \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right) + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \left(d\tau_{ns}^a - C_2 \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \right) = 0 \quad (18)$$

式(18)をラグランジェの未定乗数 Γ^a を用いて、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する。 Γ^a で変分を行った時、式(18)に一致させる事を考慮に入れれば

$$-\Pi_{CH} = -\Pi_{CH} + \int_{S_c} \Gamma^a \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) ds - \frac{1}{2} \int_{S_c} \Gamma^a \left(C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \right)^2 \right) ds \quad (19)$$

となる。ここで、 S_c は破壊面である。

3. 弾塑性剛性方程式の誘導

3-1 三角形平面要素

弾塑性剛性方程式を導くのに応力場、変位場、ラグランジェの未定乗数を仮定する必要がある。ここでは、前報⁶⁾示したように、応力場についてはパラメータが12個、変位場、ラグランジェの未定乗数については線形の分布を仮定する。すなわち、変位場とラグランジェの未定乗数はそれぞれ(20)、式(21)のように仮定する。

$$U = u_i - \theta_i S, \quad V = v_i - \epsilon_i S \quad (20)$$

$$\Gamma = \Gamma_{vi} - \Gamma_{\epsilon} S \quad (21)$$

このように仮定して得られるのが図-5の二次元ハイブリッドストレスモデルである。

応力場とひずみ・応力関係式については

$$\{\sigma\} = [B] \{\beta\} \quad (22)$$

$$\{\epsilon\} = [C] \{\sigma\} \quad (23)$$

を仮定する。式(22)(23)を用いれば式(15)の第一項の積分は次のようになる。

$$\iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \quad (24)$$

ここで、 $[H] = \iint_{V_n} [B]^T [C] [B] dx dy$, $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}\}^T$ である。式(15)の第2項の積分は全体座標系と局所座標系の応力の変換式および式(20)を用いれば

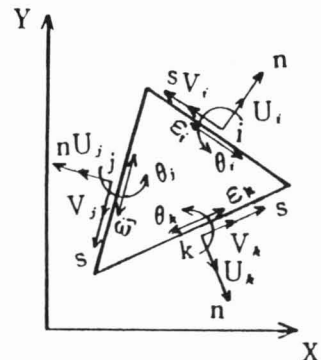


図-5 二次元ハイブリッドストレスモデル

$$\int_{s_{Vn}} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G] \{u\} \quad (25)$$

となる。式(19)の荷重項は $\{F\}$ 荷重ベクトルとして次のように表わされる。

$$\int_{s_{nn}} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{F\} \quad (26)$$

式(19)の右辺第2項については式(21), 式(22)および全体座標系と局所座標系の応力の変換式を用いることで

$$\int_{s_c} \Gamma^n \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} d\sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} d\tau_{ns}^a \right) ds = \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} \quad (27)$$

となる。これらの式の展開については文献⁵⁾に詳しく述べているので、ここでは簡単な説明のみを行っている。ここまでは式(19)の右辺第1項と第2項についての説明を終った。次に第3項は塑性条件式にひびわれ幅が入ったために新しく出てきた項であるが、これについて説明を行う。図-6の三角形要素の境界に破壊が生じた時は第3項は次のようになる。

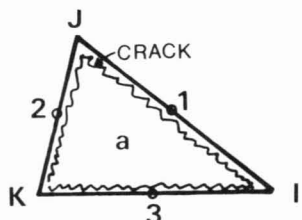


図-6 ひびわれの発生している要素

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{s_c} \Gamma^a \left[C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Gamma_i^a \left[C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \{\Gamma\}^T [G^{**}] \{\Gamma\} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで $\{\Gamma\}^T = (\Gamma_1 \Gamma_{1\theta} \Gamma_2 \Gamma_{2\theta} \Gamma_3 \Gamma_{3\theta})$,

$$G^{**}(1,1) = C_{11} L_{ij}, G^{**}(2,2) = C_{11} L_{ij}^3 / 12$$

$$G^{**}(3,3) = C_{12} L_{ij}, G^{**}(4,4) = C_{12} L_{ij}^3 / 12$$

$$G^{**}(5,5) = C_{13} L_{ij}, G^{**}(6,6) = C_{13} L_{ij}^3 / 12$$

$G^{**}(I,J)$ で $I \neq J$ の時は $G^{**}(I,J) = 0$ である。

また

$$\begin{aligned} C_{11} &= \left[C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \right)^2 \right]_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} \\ C_{12} &= \left[C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \right)^2 \right]_{\substack{x=x_2 \\ y=y_2}} \end{aligned}$$

$$C_{13} = \left[C_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n} \right)^2 + C_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}} \right)^2 \right]_{\substack{x=x_3 \\ y=y_3}}$$

L_{ij} : 節点*i*と*j*の間の長さ

である。式(24), (25), (26), (27), (28)を式(19)に代入すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} -\Pi_{CH}^{**} &= \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} \\ &\quad - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{F\} \\ &\quad + \{\beta\}^T [G^*] \{\Gamma\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{\Gamma\}^T [G^{**}] \{\Gamma\} \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)で $\{\beta\}$, $\{u\}$, $\{\Gamma\}$ について停留条件を求めると

$$\delta \{\beta\} : [H] \{\beta\} - [G] \{u\} + [G^*] \{\Gamma\} = 0 \quad (30)$$

$$\delta \{u\} : -[G]^T \{\beta\} + \{F\} = 0 \quad (31)$$

$$\delta \{\Gamma\} : [G^*]^T \{\beta\} - [G^{**}] \{\Gamma\} = 0 \quad (32)$$

となる。式(32)より $\{\Gamma\}$ を求めると

$$\{\Gamma\} = [G^{**}]^{-1} [G^*]^T \{\beta\} \quad (33)$$

となる。式(33)を式(30)に代入し $\{\beta\}$ を求めると

$$\{\beta\} = ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^T)^{-1} [G] \{u\} \quad (34)$$

となる。これを式(31)に代入すれば次式のように弾塑性剛性方程式が得られる。

$$[G]^T ([H] + [G^*] [G^{**}]^{-1} [G^*]^T)^{-1} [G] \{u\} = \{F\} \quad (35)$$

3-2 棒要素

図7に示すような棒要素の弾塑性剛性方程式を求め、塑性条件をラグランジェの未定乗数法を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する事の物理的意味について考えてみる。

棒の断面積を一定とし、軸力のみが作用すると仮定すれば $[B]$, $[C]$ は次のようになる。

$$[B] = [1], [C] = \left[\frac{1}{E} \right] \quad (36)$$

$$[H] = \int [B]^T [C] [B] dx dy = \left[\frac{AL}{E} \right] \quad (37)$$

$[G]$ は次のように求められる。

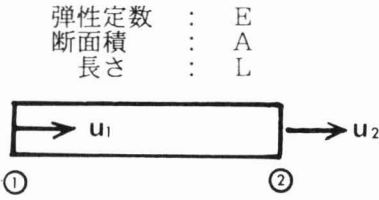


図-7 棒要素

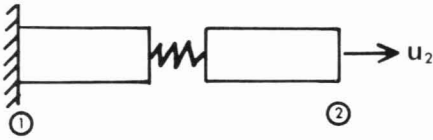


図-8 ひびわれが発生した要素

$$\int \Gamma \sigma_n ds = -u_1 \beta A + u_2 \beta A$$

$$= \{\beta\}^T [-A \quad +A] \{u\}$$

より

$$[G] = A[-1 \quad +1] \tag{38}$$

$[G^*]$ は塑性条件式が σ_n のみの関数： $f = \sigma_n$ であるから

$$\int \Gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} d\sigma_n ds = \{\beta\}^T [A] \{\Gamma\}$$

より

$$[G^*] = [A] \tag{39}$$

となる。 $[G^{**}]$ は

$$-\frac{1}{2} \int \Gamma^2 C_1 ds = -\frac{1}{2} \{\Gamma\}^T [C_1 A] \{\Gamma\}$$

より

$$[G^{**}] = [C_1 A] \tag{40}$$

となる。式(37), (38), (39), (40)を式(35)に代入することで棒要素の弾塑性剛性行列： $[k_{ep}]$ を次のように求めることができる。

$$[k_{ep}] = \frac{C_1 EA}{E + C_1 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

また、ひびわれ幅： Γ や応力： σ_n は式(33), (34)より次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{E}{C_1 L + E} (u_2 - u_1) \\ \sigma_n &= \frac{E C_1}{C_1 L + E} (u_2 - u_1) \end{aligned} \right\} \tag{42}$$

図-7において、節点1を固定し、節点2に軸力： F_2 が作用した時の節点2の変位 u_2 を弾塑性剛性方程式を用いて求めれば、

$$u_2 = \frac{E + C_1 L}{C_1 EA} F_2 \tag{43}$$

となる。これは、図-8に示すように、要素内にバネ定数： C_1 のバネを挿入した棒の変位に一致する。すなわち、 $\partial f / \partial \sigma_n = 1$ であれば、ラグランジェの未定乗数法で塑性条件式をハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理に導入する方法の物理的意味は、要素内にバネを挿入することを意味する。

4. 数値計算例

4-1 軸力を受ける棒のひずみ軟化解析

3-2で棒要素の弾塑性剛性方程式を求めた。この式では C_1 がある値をとる時に数値計算上発散が起りうる。そこで、図-9に示すように軸力を受ける棒を棒要素と三角形平面要素を用いて解析し、解が発散する時の特性を明らかにする。なお、この時のひずみ軟化則は図-10に示すように一直線モデルを仮定する。

ひずみ軟化を示す棒が強制変位 \bar{u}_3 を受ける時、要素内の一ヶ所に破壊が生じたら、この破壊ヶ所のみひずみが集中する。このために、解析では節点2の右側みに破壊が生じると仮定する。 \bar{u}_3 を0から増加させると応力が引張強度に達するまでは弾性挙

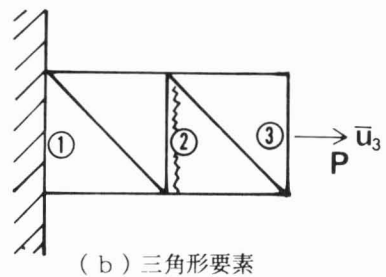
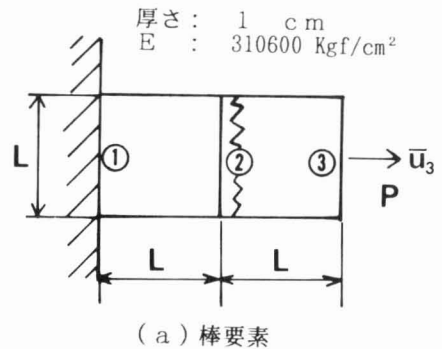


図-9 軸力を受ける棒の解析

動を示す。そして、引張強度に達した後はひびわれ面においてひずみ軟化則を満しながら徐徐に軸力の低下が起こる。ひずみ軟化が起こった時の節点2の変位の増分、応力の増分、ひびわれ幅の増分を式(4)、(42)を用いて求めれば、

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_2 &= \frac{C_1 L}{2C_1 L + E} \Delta \bar{u}_3, \quad \Delta \sigma_n = \frac{E C_1}{2C_1 L + E} \Delta \bar{u}_3 \\ \Delta \Gamma &= \frac{E}{2C_1 L + E} \Delta \bar{u}_3 \end{aligned} \right\} (44)$$

となる。式(44)で解が発散する時の棒の大きさ L_c を求

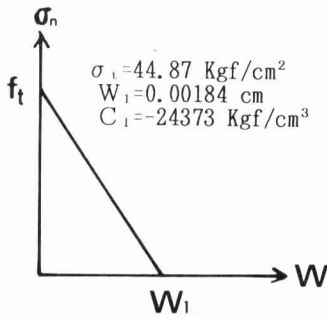


図-10 ひびわれ軟化曲線

めれば $L_c = -E/2C_1 = 6.3718\text{cm}$ となる。つぎに、同じ問題を図-9-(b)に示す三角形平面要素によって解析した結果を図-11に示した。この図では、 $L=6.300\text{cm}$ と $L=6.350\text{cm}$ の時は急激な応力解放を伴う軟化を示している。しかし、 $L=6.370\text{cm}$ と $L=6.372\text{cm}$ の時は解析不能となっている。 L が 6.300cm と 6.400cm の時は応力が増加し見かけ上ひずみ硬化となった。三角形平面要素で求めた発散の領域は $6.350\text{cm} < L_c < 6.390\text{cm}$ となり棒理論で求めた値と大体一致する。図-11で $L > L_c$ の場合は、 C_1 が負であるにもかかわらず、引張強度に達した断面の応力が減少することなく増加を起している。このために、 C_1 が負であれば、引張強度に達した断面で応力解放ができるように、変位増分を逆向きに加えることにする。この方法によれば、 $L > L_c$ の時でも式(44)から $\Delta u_2 < 0$ 、 $\Delta \sigma_n < 0$ 、 $\Delta \Gamma > 0$ となりひずみ軟化が起こったことになる。この方法を図-12に示すように、二本の棒が強制変位を受ける問題に応用する。図-12では左側の棒がひずみ軟化を起し、右側の棒のみで荷重を負担する問題である。なお、中央部の二つの要素(要素番号3と4)の剛性は非常に小さな値($E=1.0\text{kgf/cm}^2$)を用いてい

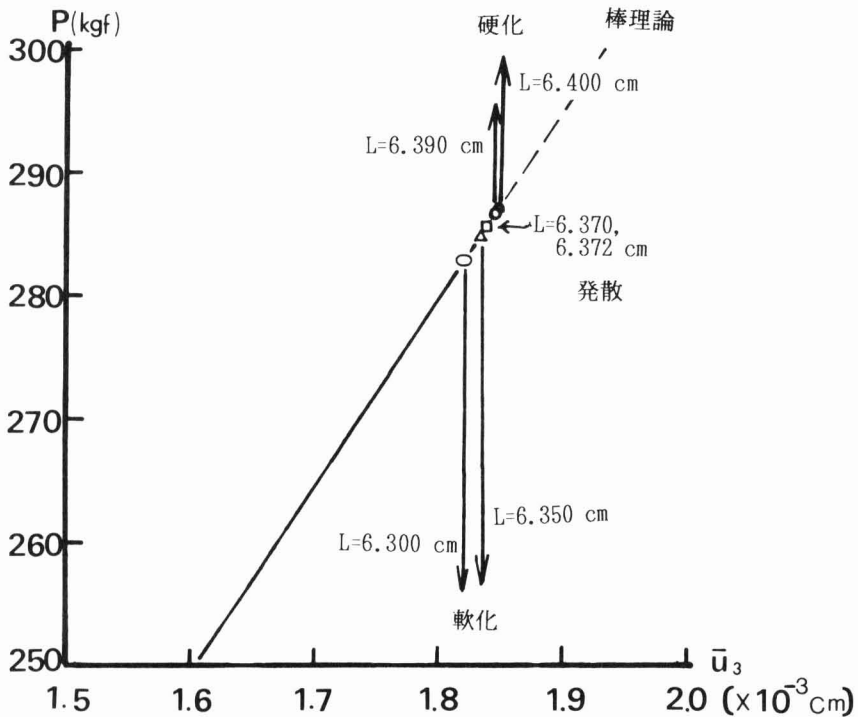


図-11 軸力と変位の関係

るので、この部分は無視できる。引張破壊後の変位増分 Δu と鉛直力の増分 ΔP の関係は式(4)の弾塑性剛性方程式を用いて次のように表される。

$$\left(\frac{EA}{L} + \frac{C_1 EA}{C_1 L + E} \right) \Delta u = \Delta P \quad (45)$$

これより、解が発散する時の条件は $L_c = E/C_1 = 12.7436\text{cm}$ となる。すなわち、ここで仮定している材料特性では引張破壊後に発散が起こる。このために、軟化の勾配： C_1 の0.90, 0.99, 1.00, 1.01, 1.10倍の5ケースについて三角形平面要素を用いて計算した結果を図-13に示した。軟化の勾配が C_1 の0.90と0.99倍の時は、

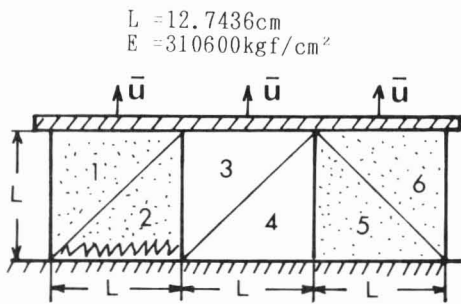


図-12 軸力を受ける二本の棒のひずみ軟化解析

引張破壊を生じた棒は完全に応力解放を行い、破壊の生じてない他の1本の棒のみで荷重を支えている。軟化勾配が C_1 の時は、当然のことながら、引張破壊後に発散を起こし解を得ることができなかった。軟化の勾配が C_1 の1.01と1.10倍の場合は見かけの硬化を示したが、前に述べたように、変位増分を逆向きに加えた所、引張破壊を起こした棒は完全に応力を解放し、他の棒だけで荷重を負担していることが解った。なお、図-13において、引張破壊後の荷重の低下の割合は棒理論から得られる値と完全に一致する。

4-2 CT試験体のひずみ軟化解析

本報告で提案している解析手法を図-14に示すCT試験体のひずみ軟化解析に応用する。このようなCT試験体の実験および有限要素解析は野村・和泉⁴⁾、六郷ら⁷⁾によって行われており、本手法の精度の確認のためには良い例題である。六郷らの行った実験でのコンクリートは $W/C = 0.43$ 、圧縮強度は 42.9MPa であり、ひずみ軟化則における諸定数は表-1に示す通りである。表-1のCT試験体のリガメントの長さには15cm, 30cm, 60cmの3種類で、これらを各各Small,

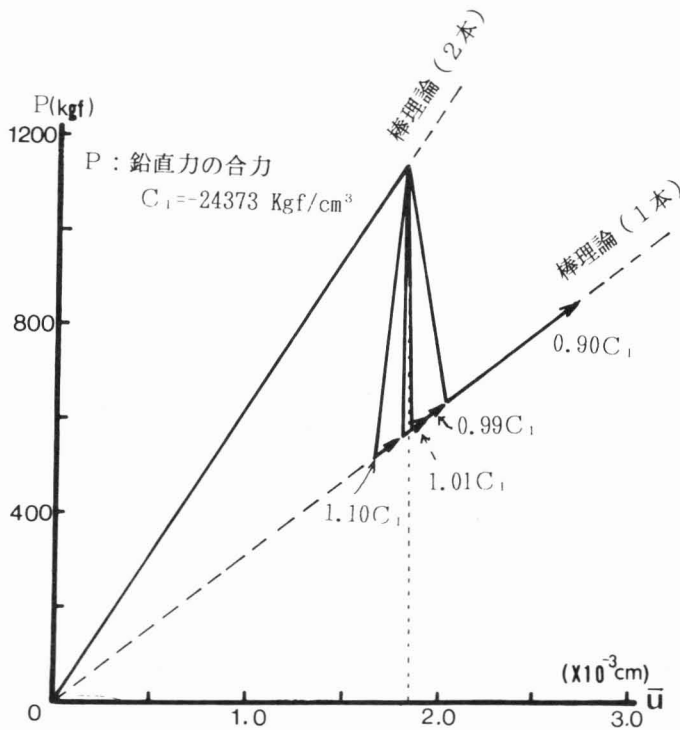


図-13 軸力と変位の関係

表-1 ひずみ軟化曲線

	Large	Medium	Small
b(mm)	600	300	150
f_t (kgf/cm ²)	44.87	44.87	44.87
S_1 (kgf/cm ²)	11.22	11.22	11.22
W_1 (x10 ⁻³ cm)	2.76	2.54	2.03
W_2 (x10 ⁻³ cm)	16.36	17.97	12.92

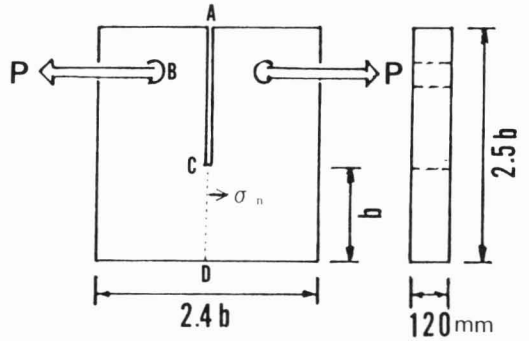


図-14 CT-試験体

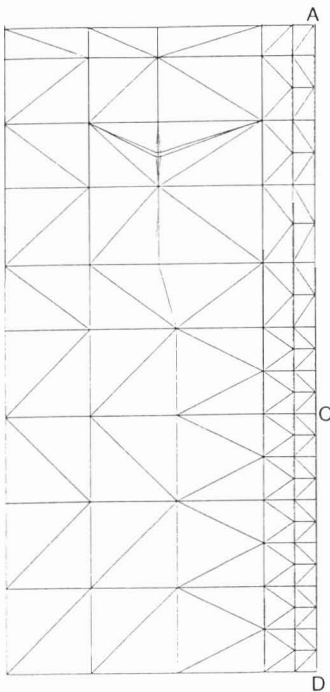


図-15 CT-試験体の要素分割 (粗・分割)

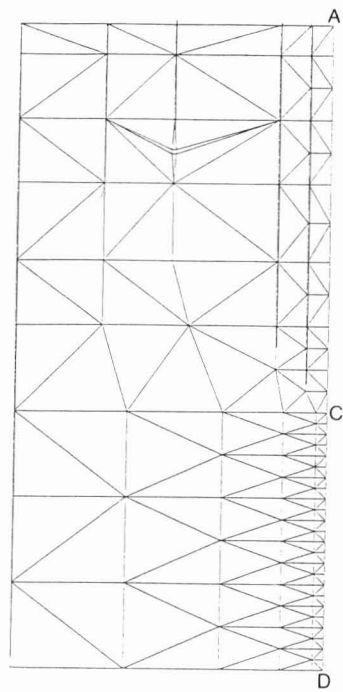


図-16 CT-試験体の要素分割 (細・分割)

Midium, Largeの試験体と称している。

4-1では要素の大きさが解に大きな影響を与えることが分かったが, CT試験体の解析でも要素の大きさが解に影響を与えることは当然予想される。このために, 図-15と図-16に示すようにリガメント上の要素分割を変えた解析を行った。

図-17に要素分割が粗い時の荷重: Pと開口変位: CODの関係を示した。要素分割はLarge, Midium, Smallの各試験体に対し同じ分割を用いているために, 荷重段階ごとのひびわれ進展長さもそれぞれ5cm, 2.5cm, 1.2cmとなっている。このために, ひびわ

れ進展長さの長いLarge, Midium, Smallの順に解の変動が激しくなっている。特にLarge供試体は3段階目の荷重増分で硬化が起ったために, 荷重増分を逆に変えて計算を行った。ひびわれ面上でひずみ軟化則を満足しているか否かのチェックを各荷重段階ごとで行ったが, すべて, 十分満足していることが分った。なお, このような例題として, 図-19(a)にCODが0.7240mmの時の各ひびわれ面上の応力とひびわれ幅の関係を示した。図-19(b)には最初にひびわれが生じた点(C点に近い要素)の荷重段階ごとの応力とひびわれ幅の関係を示してあるが, いず

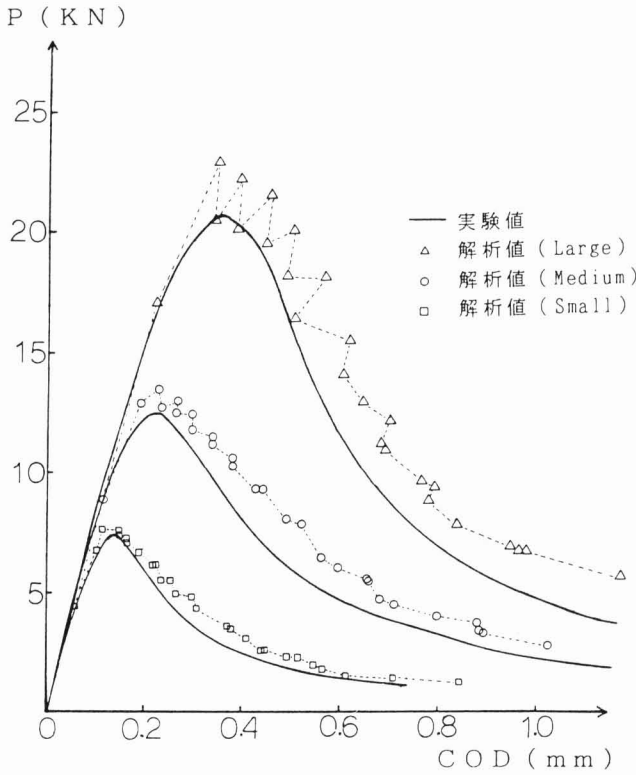


図-17 CT-試験体の荷重・開口変位曲線(粗分割)

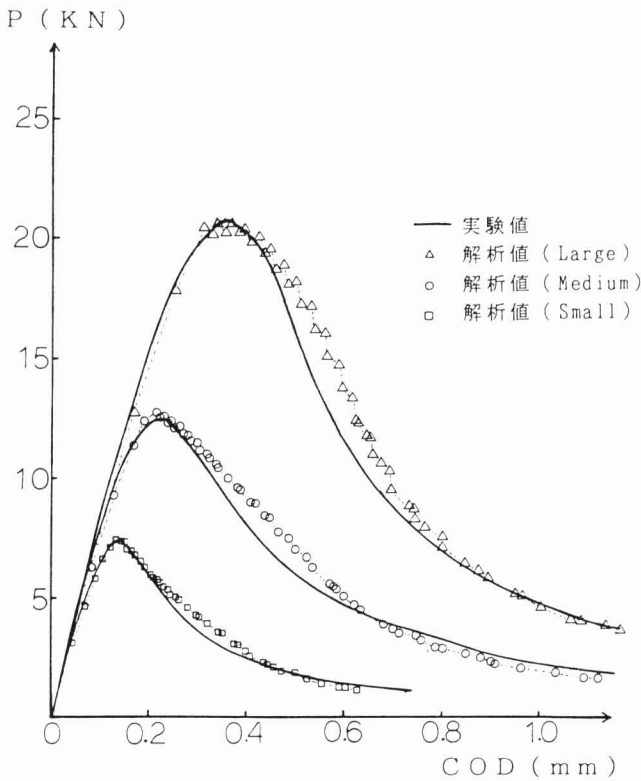


図-18 CT-試験体の荷重・開口変位曲線(細分割)

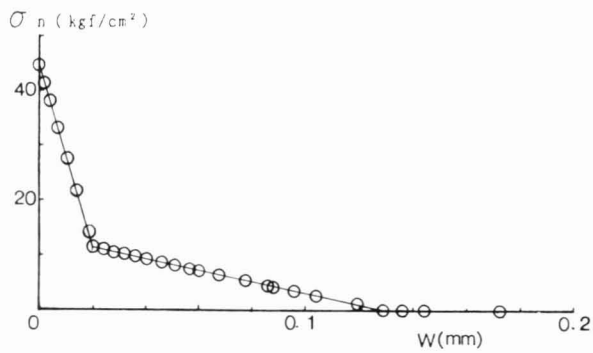
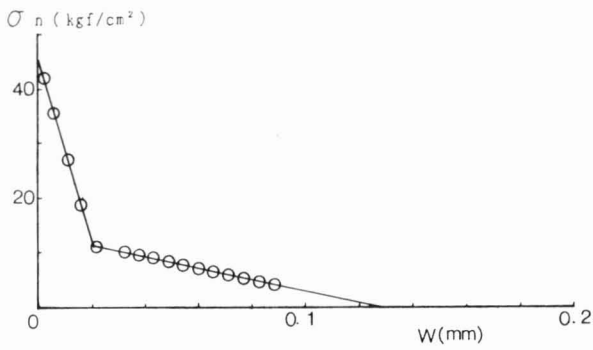
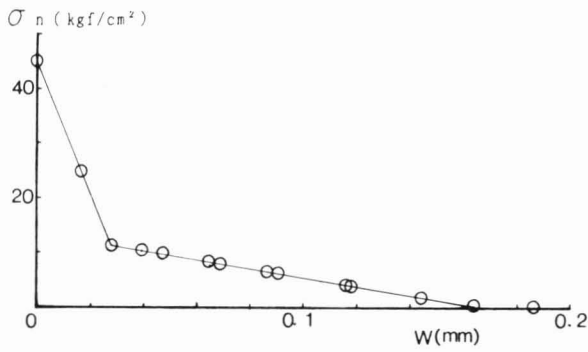
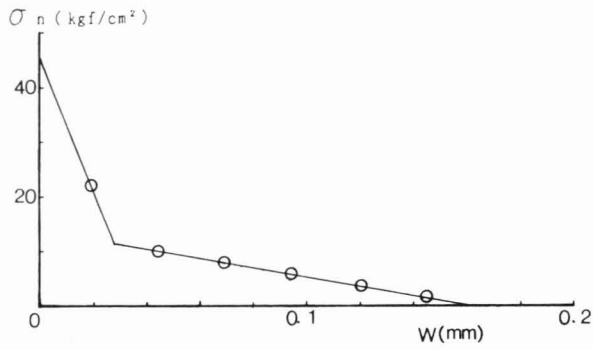
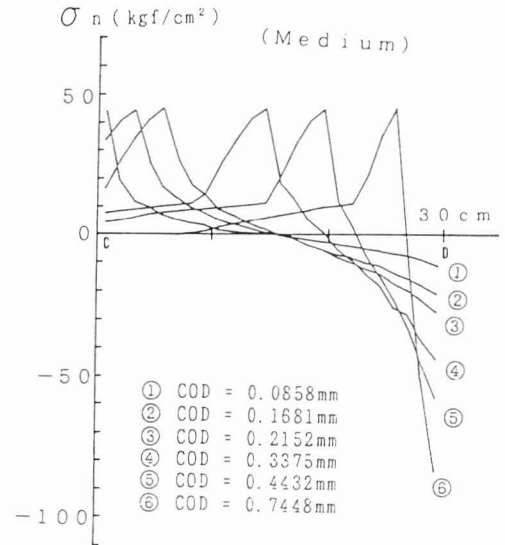


図-19 ひびわれ面上の応力とひびわれ幅の関係

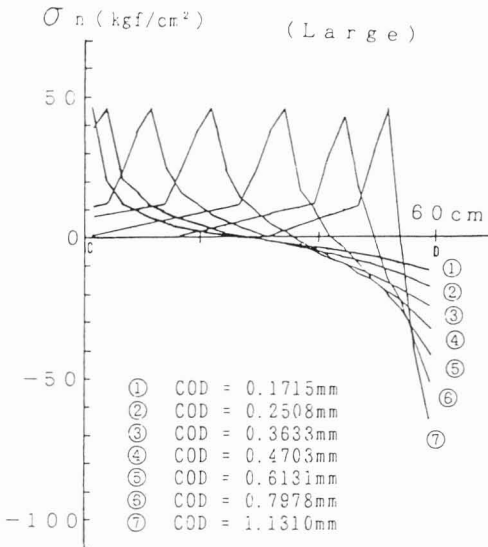
れもひずみ軟化則を満足していることが分かる。

図-18には要素分割が細かい時のPとCOD関係を示した。この時の荷重段階ごとのひびわれの進展長さはLargeで2.5cm, Midiumで1.25cm, Smallで0.625cmとなっている。図-18において, Large試験体で多少の変動が見られるが全体的に変動は小さく実験値に近い値となっている。Large試験体における変動は, ひびわれが生じた境界の応力がひずみ軟化曲線の第1勾配に入った時にPが減少し, 第2勾配に入った時にPの増加が起っている。このような変動はCODが0.7953mmまで続き, それ以後は硬化を生じる点が発生したが, 荷重増分を逆方向に加えることで解を求めた。ひびわれ面におけるひずみ軟化則のチェックは, いずれの荷重段階でも十分に満足している。このような例題として, 図-19(c)にCODが0.3018mmのときのSmall試験体のひびわれ面での応力とひびわれ幅の関係を示した。また, 図-19-(d)には, 最初にひびわれが生じた境界の荷重段階ごとの応力とひびわれ関係を示した。図-20にはリガメント上の応力分布の変化を示した。これよりひびわれ面上の応力分布の特

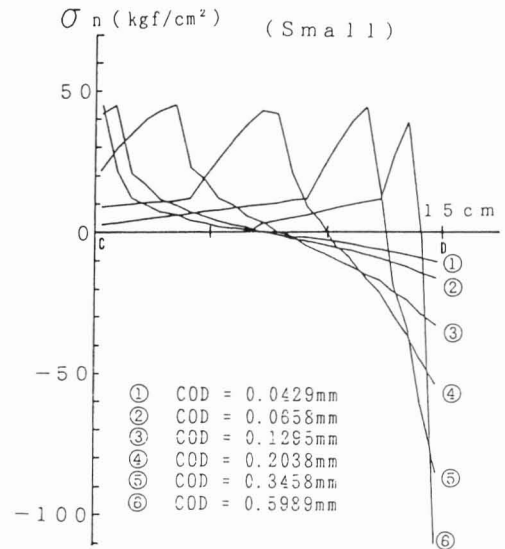
徴はひびわれ発生後の急激な低下とそれに続くゆるやかな直線的に低下する部分からなることが分かる。このことは, ひずみ軟化曲線の第1勾配が急激な応力低下部に対応し, 第2勾配がゆるやかな低下部に対応していることを示している。



(b) 試験体 Medium



(a) 試験体 Large



(c) 試験体 Small

図-20 CT-試験体のリガメント上の応力分布

5. むすび

本報告では、仮想ひびわれモデルを仮定した時のひずみ軟化則を直接にハイブリッド型コンプレメンタリエネルギーの原理に導入する方法を示した。この方法から得られる弾塑性剛性方程式を用いれば、ひびわれが要素境界に発生しても全体剛性マトリックスの大きさが増加することはない。

棒要素と三角形平面要素を用いて、棒のひずみ軟化解析を行った結果、要素の大きさとひずみ軟化曲線の勾配によっては数値計算上発散や硬化が起こる。4-1で示したように発散は、ある一点だけで起こるので、発散はめったに起らないと云える。しかし、硬化はCT試験体のひずみ軟化解析に見られるように、要素が大きい時はいつでも起こりうる。硬化が起った時の計算手法は荷重増分の方向を逆にするのである。このような方法でCT試験体のひずみ軟化解析を行ったところ、ひびわれ面での応力とひびわれ幅の関係はひずみ軟化則を満たすことを確認した。また、得られた荷重-開口変位曲線もほぼ実験値に一致する。

謝辞

本研究にあたり、数値計算やデータ整理に御助力をいただいた本学科卒業生：崎浜秀仁氏（首都高速道路公団）、安仁屋聡氏（松村組）宮良直好氏（沖縄富士通）に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) A. Hillerborg: The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Energy G_f of Concrete, Materials and Structures, Vol. 18, No. 106, pp25-30, RILEM 1985, 7-8
- 2) 三橋博三: コンクリートの破壊力学の現状と展望, コンクリート工学, Vol. 25, No. 2 pp14-25, 1987.2
- 3) P. E. Petersson: Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials, Report TVBM-1006, Lund Univ, Sweden. 1984.
- 4) 野村希晶: 和泉正哲: コンクリートの引張軟化構成則の推定問題に関する基礎的検討, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp97-102, 1987年
- 5) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによる極限解析, 琉球大学工学部紀要, 第26号, pp1-9, 1983年
- 6) 伊良波繁雄: 修正された二次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析, 琉球大学工学部紀要, 第35号, pp23-34, 1988年
- 7) K. Rokugo, F.H. Wittmann, P.E. Roelfstra, E. Brünwiler: Different Methods to Determine Fracture Energy and Strain Softening of Concrete, コンクリート工学年次論文報告集, 9-2, pp663-668, 1987年
- 8) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, 培風館, 1972年
- 9) 近藤一夫: ハイブリッド梁要素による骨組構造の離散化極限解析, 生研セミナー・テキスト (川井忠彦編: 離散化極限解析法に関する最近の話題), pp525-588, 昭和61年1月