ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析

ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析†

伊良波　繁　雄*

Non-Linear Structural Analysis by Hybrid Stress Model

Shigeo IRAHA

Synopsis

Recently, a structural analysis using new type discrete model was developed by T. Kawai[1], and it has been applied to limit state analysis of structure and solid. In this paper, non-linear structural analyses by two-dimensional hybrid stress model are presented, where the elements idealized by T. Kawai are applied. Since the elements have a node at mid-point of length of the each boundary side, the analysis is useful for treating non-linear problems including crack and slip. Herein, the hybrid stress model is applied for the bearing capacity of a concrete block, the load carrying capacity of reinforced concrete beam and contact problems of two elastic bodies.

Key Words: Limit Analysis, Hybrid Stress Model, FEM, Reinforced Concrete, Contact Problem

1　はじめに

有限要素法が1954年に開発されて以来，構造解析は大きく進歩し，弾塑性，接触問題，有限変形等の非線形問題でも解析が可能となった。連続体の力学的挙動の解析を得意とする有限要素法は，破壊が領域として取り抜える場合，またはジョイントライン，節理，土と構造物の境界面，鉄筋とコンクリートの境界のように，あらかじめ力学的不連続性を示す場所がわかっている場合には非常に有用である。しかし，荷重の増加に伴うすべり面や分離面が逐次変化する場合は数値計算の上で困難を伴う。

近年，剛体バネモデル[1]を初めとする要素境界ですべりや分離を表現する新しい型の要素[2),3)]が開発され梁，板，シェル等の極限解析によい結果を得ている。

本研究で取り扱っている要素も，要素境界ですべりや分離を表現するのに適した要素である。前報[4]ではハイブリッド型コンプリメンタリエネルギの原理にモールクーロン式をラグランジエの未定乗数法を用いて導入し，モールクーロンの破壊条件で表わされる材料からなる構造物の極限解析を示した。本報では，荷重の増加に伴って発生するすべり，分離，圧縮破壊を取り扱う方法を示した。なお，破壊によって増加する変位の自由度は

受付：1984年10月30日

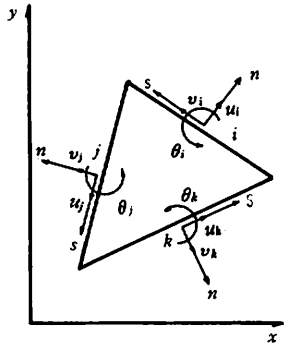
* 琉球大学工学部土木工学科

† 本論文の内容の一部については土木学会39回年次学術講演会[5]において発表済みである。

要素単位で消去できるので数値計算上簡単になる。崩壊荷重を求める問題として，コンクリートブロックの支圧強度と鉄筋コンクリートはりの解析例を示した。工学の重要な研究テーマの一つに接触問題があるが，土木工学においては地盤と構造物，プレキヤストコンクリートブロックの接合部，コンクリートや土の圧縮試験において供試体と載荷板の摩擦等多くの例がある。ハイブリッドストレスモデルはすべりを表現するのに最も適したモデルであり，弾性接触への適用も可能である。ここでは，2個の弾性板の接触問題の例を示した。

2　理　論

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギの原理の要素境界積分を図－1に示す局所座標系n-sで変換すると次式のようになる[4]。



図－1　2次元ハイブリッドストレスモデル

$$\Pi_{CH}=\sum_{n}\left[\iint_{Vn}B(\sigma_{ij})dxdy-\int_{\partial Vn}(U\sigma_n+V\tau_{ns})ds+\int_{S\sigma}(U\bar{\sigma}_n+V\bar{\tau}_{ns})ds\right] \quad (1)$$

付帯条件は

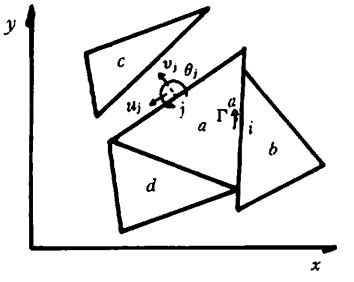
$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_{ij,j}=0 & : \quad Vn\ 内\\ U=\bar{U},\ V=\bar{V} & : \quad Su\ 上\end{array}\right\} \quad (2)$$

である。ここで，$B(\sigma_{ij})$：コンプリメンタリエネルギ，U, Vはそれぞれn方向，s方向の変位，－付：既知量，$S\sigma$：力学的境界，Vn：要素Vn，∂Vn：要素Vnの一周積分，Σ：全要素数の和である。lとmを方向余弦とするとσ_nとτ_{ns}はそれぞれ次式のようになる。

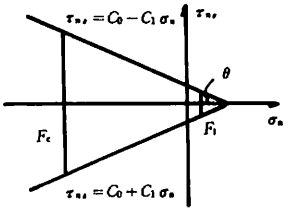
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_n=\sigma_x l^2+2\tau_{xy}lm+\sigma_y m^2\\ \tau_{ns}=-(\sigma_x-\sigma_y)\ lm+\tau_{xy}\ (l^2-m^2)\end{array}\right\} \quad (3)$$

ここで，σ_x，σ_y，τ_{xy}は応力度である。要素境界にすべりが生じ，すべっている間，τ_{ns}とσ_nの関係は図－3に示すモールクーロンの式が成立しているとすれば，すべり面において次式を満さねばならない。

$$\Delta\tau_{ns}\pm C_1\Delta\sigma_n=0 \quad (4)$$



図－2　要素aの破壊状況



図－3　モールクーロンの式

ここで，Δは増分記号である。すべり面において，式(4)を満足させるために，ラグランジェの未定乗数Γを用いて，式(1)に導入すれば

$$\Pi_{CH}=\Pi_{CH}-\int_{S_s}\Gamma(\tau_{ns}\pm C_1\sigma_n)\ ds \quad (5)$$

となる。ここで，S_s：すべり面である。式(5)では簡単のために増分記号：Δを省略して示した。なお，式(5)でS_s上のVは零[4]とする。つぎに，荷重が増加するにつれて破壊が進行する場合を考える。本研究で仮定している破壊条件は図－3に示すように，すべりに対してはモールクーロンの式を仮定し，圧縮側と引張側に対しては，それぞれ圧縮強度（Fc）と引張強度（F_t）の限界値を設定している。要素境界の垂直応力度（σ_n）がF_tに達すると応力解放を伴って要素境界から分離される。したがって，数値計算の上では新しい節点が必要となる。また，σ_nがFcに達すれば，それ以後の応力増分は零となる。このために，応力の伝達が零になるように，降伏後の節点を切り離す方法をとっている。したがって，いずれの破壊が起っても，変位の自由度が増加し計算上の困難を伴う。

ここでは破壊の進行によって増加する変位を要素単位で消去する方法で計算した。図－2に示すように，すべり破壊と引張破壊が生じている場合を考える。式(5)で変位の増加に関連する項をAとすれば

$$A=-\int_{Sc}(U\sigma_n+V\tau_{ns})\,ds+\int_{Sc}(U\bar{\sigma}_n^L+V\bar{\tau}_{ns}^L)\,ds-\int_{Ss}\Gamma(\tau_{ns}\pm C_1\sigma n)\,ds \qquad (6)$$

となる。ここで，Sc：引張破壊面，$\bar{\sigma}_n^L$と$\bar{\tau}_{ns}^L$は解放応力である。Π_{CH}の一周積分は引張破壊面以外で計算を行う。したがって，数値計算の上では，引張破壊面の存在にかかわらず一周積分し，連立方程式を解く時にΠ_{CH}の引張破壊面のU，Vが零になるように計算すればよい。したがって変分原理を整理すれば

$$\Pi_{CH}^{**}=\Pi_{CH}+A \qquad (7)$$

となり，付帯条件は

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_{CH}\text{内の}U,\ V\text{は}V=0：Sc\text{上}\\ V=0：Ss\text{上},\ \sigma_{ij,j}=0：Vn\text{内},\ U=\bar{U},\\ \qquad V=\bar{V}：Su\text{上}\end{array}\right\} \qquad (8)$$

となる。なお，圧縮破壊に対しては$\bar{\sigma}_n^L=\bar{\tau}_{ns}^L=0$となる。

つぎに，剛性マトリックスを導くために，応力と変位をそれぞれ次式のように仮定する。

$$\sigma_x=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y,\quad \sigma y=\beta_4+\beta_5x+\beta_6y,$$
$$\tau_{xy}=-\beta_2y-\beta_6x+\beta_7 \qquad (9)$$
$$U=u_i-\theta_i s,\qquad V=v_i \qquad (10)$$

式(10)でu_i，v_i，θ_iは図－1に示すように表わし，ひずみと応力の関係式を式(12)のように表わす。

$$\{\sigma\}=[B]\ \{\beta\} \qquad (11)$$
$$\{\varepsilon\}=[C]\ \{\sigma\} \qquad (12)$$

なお，[B]，[C]の具体的な内容については前報[4]を参照して致きたい。式(11)，(12)を用いれば式(1)の右辺第1項は次式のようになる。

$$\iint_{Vn}B(\sigma_{ij})\,dxdy=\frac{1}{2}\{\beta\}^T[H]\ \{\beta\} \qquad (13)$$

ここで，$[H]=\iint_{Vn}[B]^T[C]\,[B]\,dxdy$である。式(1)の右辺第2項は式(3)，(9)，(10)より

$$\int_{\sigma Vn}(U\sigma_n+V\tau_{ns})\,ds=\{\beta\}^T[G]\ \{u\} \qquad (14)$$

となる。ここで$\{\beta\}^T=\{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7\}$，$\{u\}^T=\{u_i\,v_i\,\theta_i\ u_i\,v_i\,\theta_j\ u_k\,v_k\,\theta_k\}$である。つぎに，外力ベクトルを$\{\bar{F}\}$とすれば，式(1)の右辺第3項は

$$\int_{S\sigma n}(U\bar{\sigma}_n+V\bar{\tau}_{ns})\,ds=\{u\}^T\{\bar{F}\} \qquad (15)$$

となる。式(6)の右辺第1項と第3項を一つにまとめて計算すると，図－3の場合は

$$-\int_{Ss}\Gamma(\tau_{ns}\pm C_1\sigma_n)\ ds-\int_{Sc}(U\bar{\sigma}_n+V\bar{\tau}_{ns})\ ds=-\{\beta\}^T[G^*]\ \{\Delta\} \qquad (16)$$

となる。ここで，$\{\Delta\}^T=\{\Gamma u_j\,v_j\,\theta_j\}$であり，破壊によって増加した変位である。一般的には$[G^*]$，$\{\Delta\}$は要素境界の破壊状況を考慮して作成する。つぎに，解放応力による節点力を$\{\bar{F}^L\}$とすると，式(6)の第2項は

$$\int_{Sc}(U\bar{\sigma}_n^L+V\bar{\tau}_{ns}^L)\,dS=\{\Delta\}^T\{\bar{F}^L\} \qquad (17)$$

となる。式(13)，(14)，(15)，(16)，(17)を式(7)に代入すれば

$$\Pi_{CH}^{**}=\frac{1}{2}\ \{\beta\}^T[H]\{\beta\}-\{\beta\}^T[G]\ \{u\}+\{u\}^T\{\bar{F}\}-\{\beta\}^T[G^*]\{\Delta\}+\{\Delta\}^T\ \{\bar{F}^L\} \qquad (18)$$

となる。式(18)で$\{\beta\}$について停留条件を求めると

$$\{\beta\}=[H]^{-1}([G]\ \{u\}+[G^*]\ \{\Delta\}) \qquad (19)$$

式(19)を式(18)に代入し，$\{u\}$，$\{\Delta\}$に関する停留条件を求めると，それぞれ

$$[K_{11}]\ \{u\}+[K_{12}]\{\Delta\}=\{F\} \qquad (20)$$
$$[K_{21}]\ \{u\}+[K_{22}]\{\Delta\}=\{\bar{F}^L\} \qquad (21)$$

となる。ここで

$$\left.\begin{array}{l}[K_{11}]=[G]^T[H]^{-1}[G]\\ [K_{12}]=[G]^T[H]^{-1}[G^*]\\ [K_{21}]=[G]^T[H]^{-1}[G]\\ [K_{22}]=[G^*][H]^{-1}[G^*]\end{array}\right\} \qquad (22)$$

である。式(20)，(21)より$\{\Delta\}$を消去すると

$$([K_{11}]-[K_{12}]\ [K_{22}]^{-1}\ [K_{21}])\ \{u\}=\{\bar{F}\}-[K_{12}]\ [K_{22}]^{-1}\ \{\bar{F}^L\} \qquad (23)$$

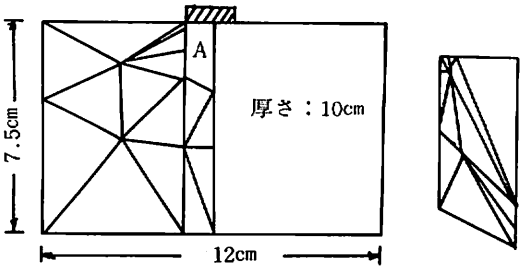
となる。式(23)はすべり，分離によって増加した変位を消去した剛性マトリックスで，全体剛性マトリックスを作成する上で取り扱いが便利である。数値計算は荷重増分法を用いて計算した。

3　数値計算例

3－1　コンクリートブロックの支圧強度解析

コンクリートの支圧強度が設計上，問題となるのは橋けたの支承部およびヒンジ部，ポストテンションPCけたの定着部，コンクリート杭や鋼杭

が基礎と接する箇所のように，コンクリートが部分的に荷重を受ける場合である。



図－4　要素の分割　　Aの詳細図

図－4は剛体の板に設置された厚さ1cmのコンクリートブロックで，上から幅2cmの剛な板を通して荷重を受けている。要素の分割は実験で見られるような載荷板直下の三角形くさびと鉛直に伸びる引張ひびわれを表現できるようになっている。コンクリートの引張強度（f_{ct}），ヤング係数（Ec）はそれぞれ次式[10]より求めた。

$$f_{ct} = 8 + 0.06 f_c' \tag{24}$$

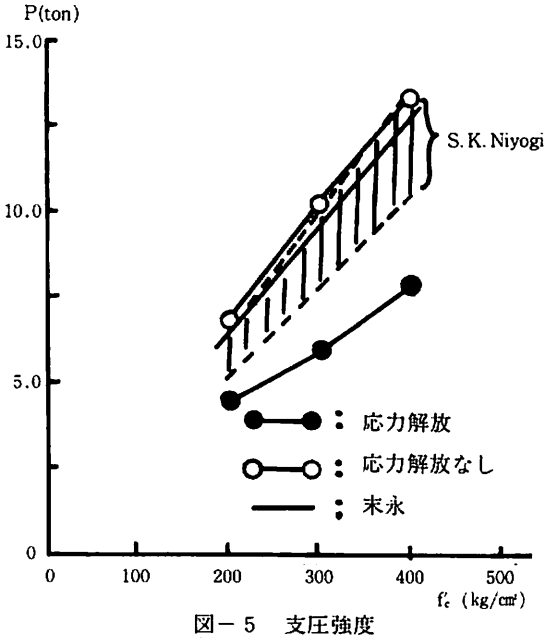
$$E_c = 2.1 \times 10^5 \times (\gamma / 2.3)^{1.5} \sqrt{f_c'/200} \tag{25}$$

ここに，f_c'：コンクリートの圧縮強度（Kgf/cm^2），γ＝コンクリートの気乾比重である。なお，計算では$\gamma=2.3$，ポアソン比を0.2とし，モールクーロンの破壊条件式は未永らの式[6]

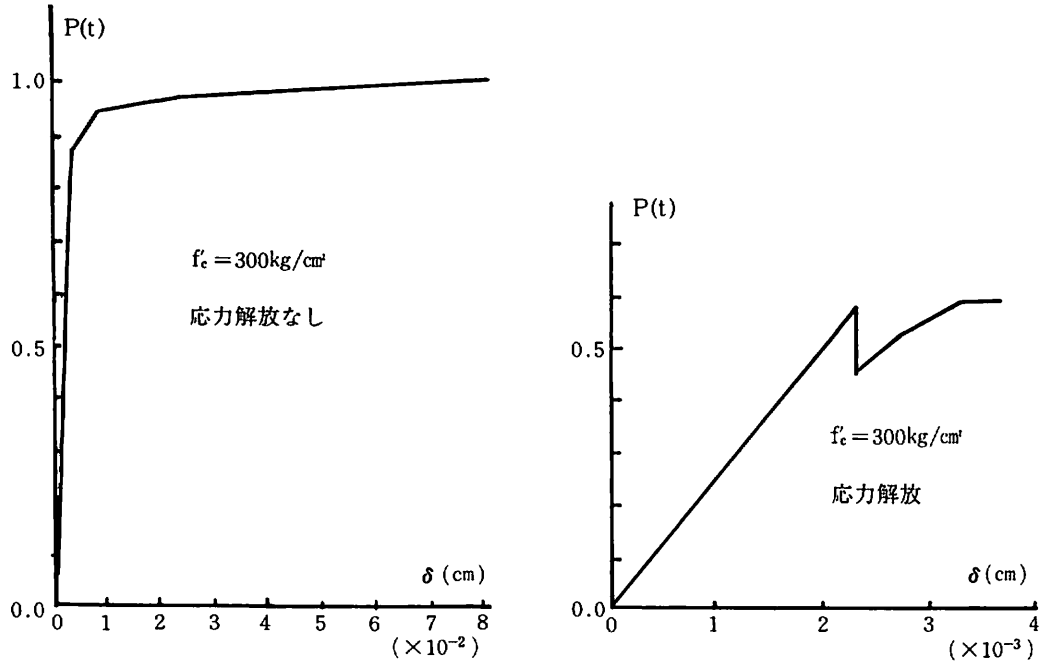
$$\tau = \tan 37^\circ \sigma + 0.249 f_c' \tag{26}$$

を用いた。

図－5にはコンクリートの引張破壊による応力解放を考慮する場合と考慮しない場合について計

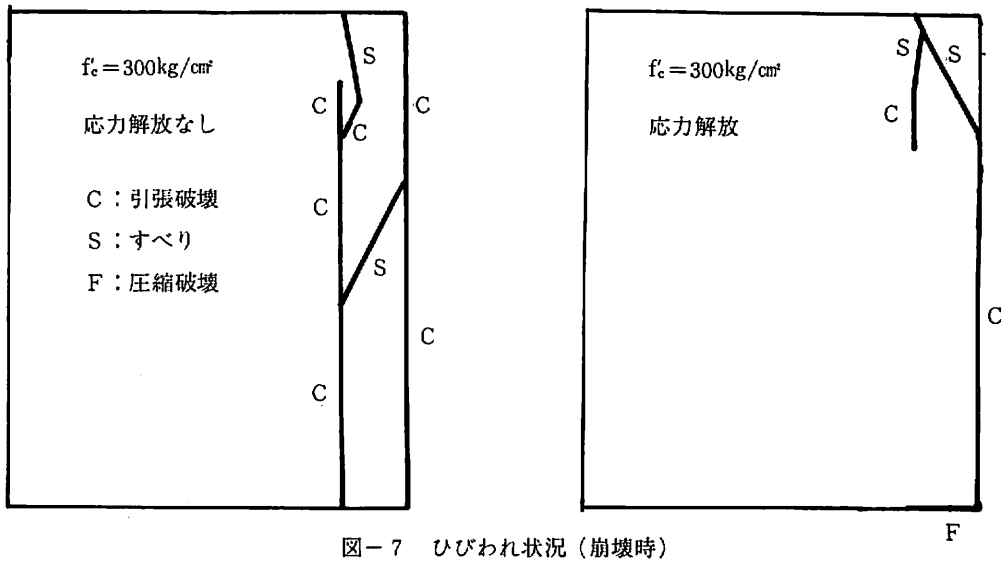


図－5　支圧強度



図－6　荷重－変位関係

算し，支圧荷重とコンクリート強度の関係を示した。未永らによる式は応力解放を考慮しない場合によく合っている。S. K. Niyogi[7] の実験値（コンクリートの立方体強度から円柱強度への換算係数を0.7～0.9とする）は両者の間にあるが，解放しない方に近い。実験結果が応力解放を考慮しない場合に近いのは，支圧試験のように急激な引張破壊を起す場合は応力が引張強度に達しても，ひずみが引張破壊ひずみに達してないために応力の解放が遅れたものと考えられる。図－6はコンクリートの圧縮強度が300kgf/cm²の場合の荷重-変位の関係を示した。応力解放をしない場合は延性材料の荷重-変位関係に似ており，応力開放をした場合は変形量も小さく，最高荷重に達する前から応力解放に伴う荷重の低下を起こした。特に，最高荷重に達した後は急激な荷重の低下を示し，ぜい性破壊の特徴を表わしている。図－7はコンクリート強度が300kgf/cm²の時のひびわれ発生状況を示した。両者のひびわれ型は異っているが，これらのひびわれ型は実験において普通に見られる[7]

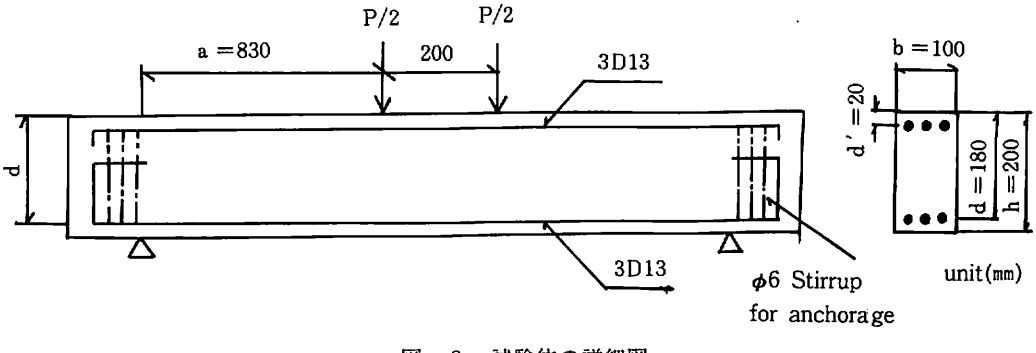


図－7　ひびわれ状況（崩壊時）

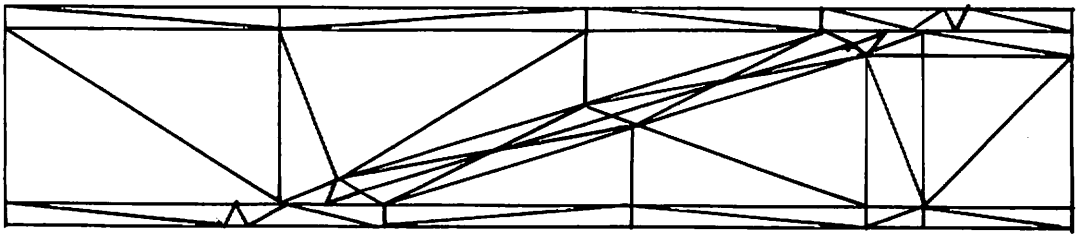
3－2　鉄筋コンクリートはりの解析

せん断補強鉄筋を用いないはりのせん断破壊形式は，斜めひびわれの発生とほぼ同時に耐力を失う「斜め引張破壊」と，斜めひびわれ発生後もタイドアーチ耐荷機構に変化して，さらに大きな荷重に耐え，最終的には圧縮部コンクリートの破壊によって耐力を失う「せん断圧縮破壊」とに大別される。ここで解析した試験体はJCI試験体[8]でせん断補強筋のないスレンダーなはりである。

試験体の詳細を図－8に示す。また使用した鉄

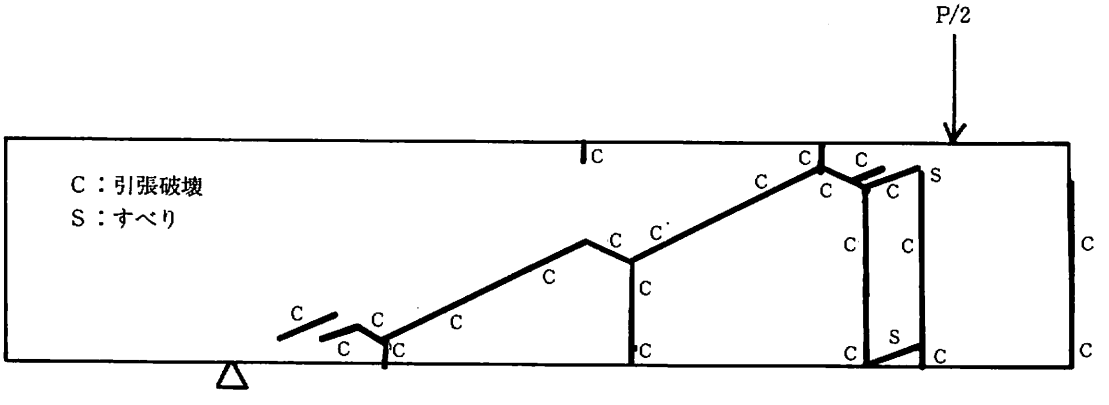


図－8　試験体の詳細図

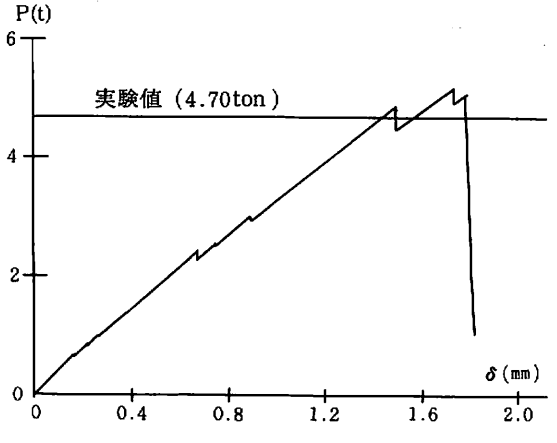


図－9　鉄筋コンクリートはりの要素分割

筋およびコンクリートの詳細を表－1，表－2に示した。このはりの実験では，4.70*ton*の時に斜めひびわれが急速に進展して，急激な斜め引張破壊を起している。図－9に要素の分割を示した。ここで鉄筋は三角形要素で分割しているので，せん断力を負担している。コンクリートの圧縮強度は円柱供試体の強度の0.85倍とし，他の材料定数は計算例3－1と同様な方法で求めた。



図－10　崩壊時のひびわれパターン



図－11　荷重とはり中央点のたわみ関係

表－1　鉄筋の性質

寸法	降伏点 (kg/cm²)	引張強度 (kg/cm²)	ヤング係数 (kg/cm²)
D13	3730	5500	2.07×10^6
ϕ6	2460	5650	2.22×10^6

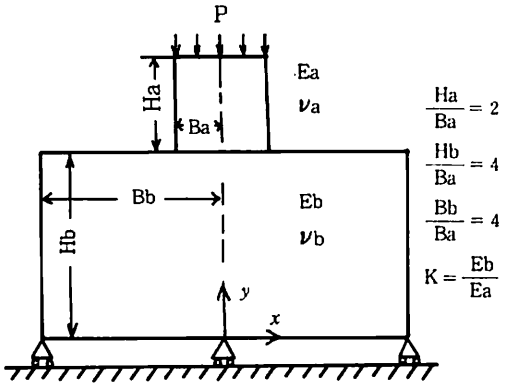
表－2　コンクリートの性質

圧縮強度 (kg/cm²)	ヤング係数 (kg/cm²)	ポアソン比
240	0.20×10^6	0.19

計算は荷重増分法によって行い，変位制御の方法をとっている。図－10に計算で得られた崩壊時のひびわれを示し，図－11には荷重-変位関係を示した。荷重が増加するにつれ下面から上面に向ってひびわれが進行し，5.19*ton*の時にはり腹部に斜めひびわれが発生した。以後，引張破壊による応力解放によって，図－11に示すように荷重が急激に低下した。実験によればこの時の荷重が4.70*ton*であるので，少し高目の結果が得られたが，破壊のメカニズムもよく実験と一致し，良好な結果と云える。

3－3　弾性接触問題

ハイブリッドストレスモデルはすべりの計算に適したモデルであり，境界面での摩擦も簡単に考慮できる。ここでは図－12に示すような弾性体の

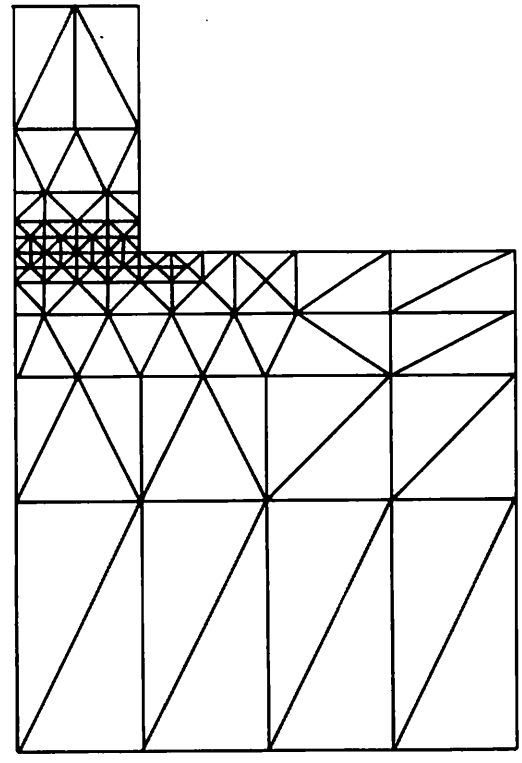


図－12　接触物体の寸法

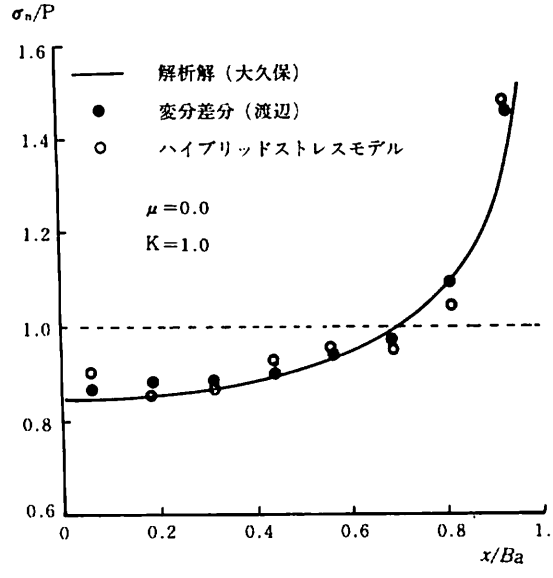
接触問題を解析した。図－13には要素分割を示した。図－14には摩擦係数が零の時の接触面上の鉛直応力の分布を示した。ハイブリッドストレスモデルによる解は大久保[9]の理論解，渡辺の変分差分法[1]による解とだいたい一致した傾向を示している。図－15，16にはそれぞれ$\mu=\infty$，0.2の時のせん断応力の分布を示した。計算結果は変分差分法による結果と同じ傾向を示している。なお，$\mu=0.2$の時のすべりの範囲は$x/Ba=0.5$であり，変分差分法と一致している。

4　あとがき

要素境界ではすべりや分離を表現するモデルによる鉄筋コンクリート構造の解析では，コンクリートのすべり破壊でのC_0，C_1の決定，破壊条件がひずみによって決定される場合，除荷の判定等多くの解決すべき問題がある。しかし，今回の数

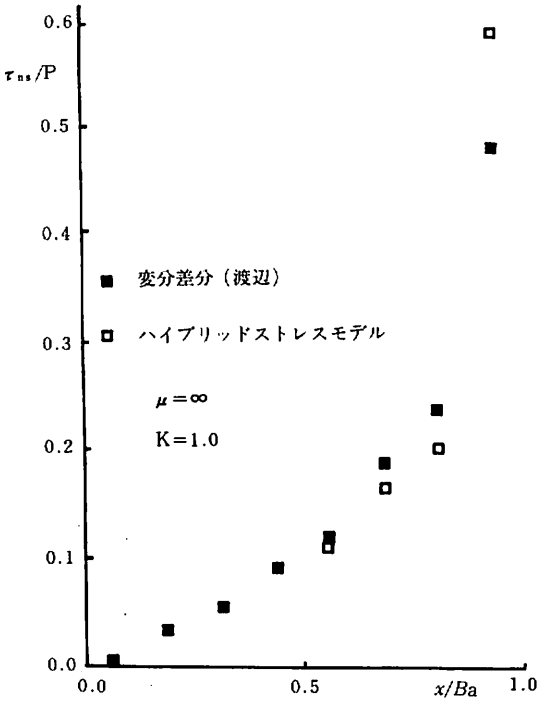


図－13　要素の分割

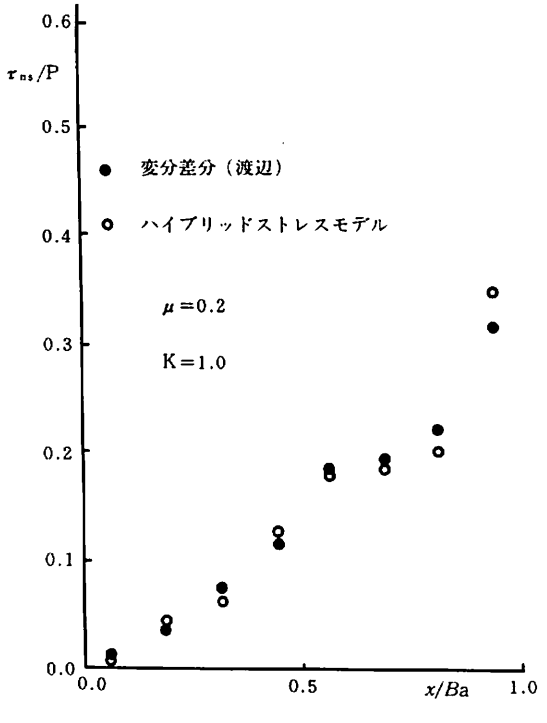


図－14　接触面上のσn

値計算の結果は良好で，破壊領域が細長く，面として表現するより線で表現した方が良い場合には有限要素法よりも有利になると思われる。なお，本研究で得られた結果を要約すると次のようになる。



図－15　接触面上の τ_{ns}



図－16　接触面上の τ_{ns}

1）ハイブリッドストレスモデルを用いてすべり，引張破壊，圧縮破壊を取り扱う方法を示した。

2）破壊によって増加する変位の自由度は要素単位で消去できるので，数値計算の上で簡単になった。

3）数値計算例としてコンクリートブロックの支圧強度，鉄筋コンクリートはり，弾性接触の解析を行った結果，いずれも良好な解を得た。

謝辞：本研究にあたり，貴重な御助言をいただいた東京大学生産技術研究所：川井忠彦教授，広島大学工学部：近藤一夫博士，三菱総合研究所：渡辺正明博士，御鞭撻をいただいた琉球大学工学部：具志幸昌教授，上原方成教授，大城武教授，和仁屋晴讙助教授，数値計算および図面作成に御助力いただいた玉那覇宣雄氏（琉球大学工学部技官），高良哲治氏（本学科卒業生，沖縄総合事務局），山本修三氏（本学科卒業生，トピー建設），金城兵七氏（本学科学生），高江洲修氏（本学科学生）に心から感謝の意を表します。

参　考　文　献

1）川井忠彦編：生研セミナーテキスト（物理モデルによる連続体力学諸問題の解析），生産技術研究奨励会，第3回（1979年）

2）渡辺正明，川井忠彦：ハイブリッドストレスモデルによる辷り線，塑性関節，塑性関節線の表現，日本造船学会論文集（昭和55年5月），P297～P305

3）近藤一夫：平面応力問題に対する一離散化手法，日本鋼構造協会第13回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集（昭和54年6月），P191～P196

4）伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによる極限解析（モールクーロンの降伏条件に従う材料について），琉球大学工学部紀要，（September 1983年），P1～P9）

5）伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによる極限解析（引張強度の取り扱い方について），土木学会第39回年次学術講演会概要集第1部（1984年10月）P137～P138

6）末永保美，石丸麟太郎：組み合わせ応力を受けるコンクリート材の動力学的解析，日本建築学会論文報告集，No.220（昭和49年6月），P1～P7

7）S. K. Niyogi：Bearing Strength of Concrete-Geometric Variations, ASCE, ST 7（1973年），P1471～P1490

8）日本コンクリート工学協会，第２回RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム（解析モデル検証用試験体の実験データ集）(October, 1983)
9）大久保肇：弾性平面にて圧縮された半無限体の二次元問題について，機械学会論文集65号（1952年），P58～P71
10）小阪義夫，森田司郎：鉄筋コンクリート構造，丸善株式会社