ハイブリッドストレスモデルによる極限解析法　－モール・クーロンの降伏条件に従う材料について－

ハイブリッドストレスモデルによる極限解析法**
——モール・クーロンの降伏条件に従う材料について——

伊良波　繁雄

Limit Analysis using Hybrid Stress Model
—Materials that obey Mohr-Coulomb's Yield Criterion—

Shigeo IRAHA

Synopsis

A limit analysis for materials that obey the Mohr-Coulomb's yield criterion by use of the hybrid stress model is presented. When slidings occur in the materials, the stress field satisfies the Mohr-Coulomb's yield criterion on the sliding surfaces. Therefore, the Mohr-Coulomb's equations is introduced into the principle of the hybrid complementary energy using Lagrange multipliers defined on the sliding surfaces. The physical meaning of Lagrange multipliers becomes clear by the stationary conditions on the sliding surfaces.

For numerical examples, the hybrid stress model is applied for the bearing capacity of a concrete block and foundations under footing. The results of the numerical examples are in good agreement with exact solutions of plastic analysis.

Key Words: limit analysis, hybrid stress model, Mohr-Coulomb, FEM

1　はじめに

有限要素法は連続体の力学的挙動を解析するのに適した手法である。そして，構造物と地盤の境界面，地盤や岩盤中の断層のように部分的に不連続な挙動を示す場所があっても，不連続部に結合要素やジョイント要素などを用いることにより解析が可能となる。しかし，コンクリート構造物や地盤，岩盤が荷重を受けて崩壊する場合はすべりや分離が材料中に進展し不連続性を示す部分が逐次変化する。したがって，すべりや分離に伴う自由度の増加，要素の再分割の問題が起こり，解析は非常に困難になる。このために，従来のように要素内ですべりや分離を表現する要素と異なり，要素境界ですべりや分離を表現する新しい型の要素が開発され

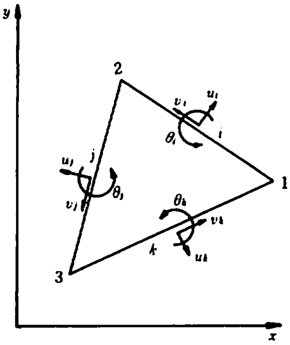
受付：1983年4月30日

*琉球大学工学部土木工学科

**本論文の内容の一部については土木学会西部支部研究発表会(昭和56年)において発表済みである。

た。

川井[1]によって開発された剛体バネモデルは要素重心に自由度をもつ要素で，固体を有限個の剛体および剛体間を連結するバネによって表現している。荷重の増加に伴う辷りや分離は，降伏強度に達したバネを切断することにより簡単に表現でき，自由度の増加もない。



図－1　2次元ハイブリッドストレスモデル

渡辺[2]は図－1に示すように辺中央に自由度をもつ2次元ハイブリッドストレスモデルを提案した。このモデルはhybrid型のコンプリメンタリエネルギーの原理で要素境界積分を座標変換し，応力場として一次式の釣合応力場を仮定し，要素境界変位場は辺に垂直方向の変位を一次式，接線方向の変位を一定として導かれた。渡辺はこのモデルを用いて，完全弾塑性体の上界解を求める方法を示した。ハイブリッドストレスモデルは剛体バネモデルに比べ，剛性マトリックスを求める時に逆行列の計算を必要とするので，計算時間は長いが，弾性域から塑性域まで良い結果を与えるモデルである。近藤[3]は辺中央に自由度をもつ定歪モデルを提案した。このモデルは6個のsub-elementから成る複合要素で弾塑性解の下界解を得ることができる。

本研究ではハイブリッドストレスモデルを用いてモール・クーロンの降伏条件で表わされるコンクリート，土，岩等の材料の上界解を求める方法を報告する。材料内に辷り面ができた時，応力場は辷り面においてモール・クーロンの式を満さねばならない，このために，モール・クーロンの式を付帯条件として，Lagrangeの未定乗数を用いてhybrid型Hellinger-Reissnerの原理の汎関数に導入した。つぎに，釣合応力場を仮定することによってhybrid型Hellinger-Reissnerの原理の汎関数からhybrid型コンプリメンタリエネルギーの原理の汎関数を導いた。つぎに，降伏応力に達してない要素境界においては渡辺と同じ変位場を仮定し，降伏応力に達した要素境界においてはLagrangeの未定乗数を一定と仮定した。そして，要素内応力場を渡辺と同じ一次式の釣合応力場を仮定することによって，辷りを考慮したハイブリッドストレスモデルを導いた。数値計算例としてコンクリート・ブロックの支圧強度解析，浅い基礎の支持力，斜面上の基礎の支持力の問題を解析し，いずれも良好な結果を得た。

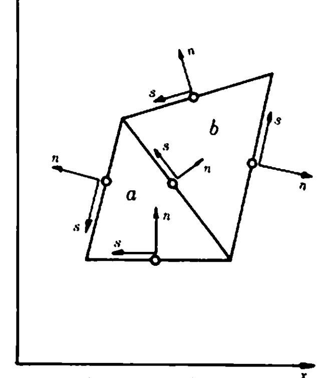
2　変分原理

hybrid型Hellinger-Reissnerの原理の汎関数は次式で与えられる。[4]

$$-\Pi_{RH}^{*}=\sum_{e}\iiint_{V_e}\left[B(\sigma_{ij})+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\right]dV-\Sigma\iint_{S_{ab}}u_i(T_i^a+T_i^b)dS$$

$$-\iint_{S_\sigma}(T_i-\bar{T}_i)u_i dS-\iint_{S_u}T_i\bar{u}_i dS \qquad (1)$$

ここで，$B(\sigma_{ij})$：コンプリメンタリエネルギー関数，$\bar{F}_i$:物体力，$\bar{T}_i$:表面力，T_i: $\sigma_{ij}n_j$，σ_{ij}: 応力，n_j: 外向き法線ベクトルの方向余弦，u_i: 変位，￣付: 既知量，a：要素a，b：要素b，V_a：要素aの体積，S_{ab}: 要素a, bの境界，S_u: 幾何学的境界，S_σ: 力学的境界，$\sum_e$: すべての要素の総和，Σ: すべての要素境界の総和である。ここでは二次元問題に限定して定式化を行う。式(1)は全体座標系における変分原理であるので，極限解析に適用しやすいように図－2に



図－2　局所座標系

示す局所座標系を用いて変形する。局所座標系は図－2に示すように辺中央を原点として，n 軸を辺に垂直にとり，s 軸を辺に平行にとる。座標系 n-s の向きは要素 a について示すと，n が外向きのときは s は反時計方向，n が内向きのときは時計方向とする。S_u，S_σ 上では n を外向き，s を反時計方向とする。

n 軸方向のベクトルの方向余弦を l，m とすれば，応力の変換式は，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2\\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 + \sigma_y l^2 - 2\tau_{xy} lm\\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y)lm + \tau_{xy}(l^2 - m^2)\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

である。$x-y$ 座標系での x, y 方向の変位をそれぞれ u, v とし，局所座標系での n, s 方向の変位をそれぞれ U, V とすれば，それぞれ次式が成立する。

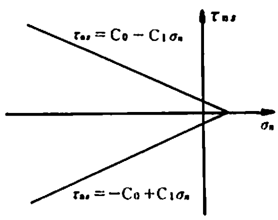
$$\left.\begin{aligned}u &= Ul - Vm\\ v &= Um + Vl\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式(1)の右辺第２項を式(2)，(3)を用いて変形すると，

$$\int_{S_{ab}} u_i(T_i^a + T_i^b)dS = \int_{S_{ab}}[(\sigma_x^a l + \tau_{xy}^a m)u + (\tau_{xy}^a l + \sigma_y^a m)v]dS$$
$$-\int_{S_{ab}}[(\sigma_x^b l + \tau_{xy}^b m)u + (\tau_{xy}^b l + \sigma_y^b m)v]dS$$
$$= \int_{S_{ab}}(\sigma_n^a U + \tau_{ns}^a V - \sigma_n^b U - \tau_{ns}^b V)dS \quad (4)$$

となる。ここで，$\sigma_n^b U$，$\tau_{ns}^b V$ の符号が負になったのは局所座標系 n の正方向ベクトルの方向余弦 l，m を用いたためである。同様な方法で式(1)の右辺第３，４項を変換すれば式(1)は次式のようになる。

$$-\Pi_{RH}^{*} = \sum_e \iint_{V_e}[B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)u_i]dxdy$$
$$-\sum\int_{S_{ab}}[(\sigma_n^a - \sigma_n^b)U + (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b)V]dS$$
$$-\int_{S_\sigma}[(\sigma_n - \bar{\sigma}_n)U + (\tau_{ns} - \bar{\tau}_{ns})V]dS$$
$$-\int_{S_u}(\sigma_n \bar{U} + \tau_{ns}\bar{V})dS \quad (5)$$



図－3　モール・クーロンの式

要素 a, b の境界に辷りが生じ，σ_n，τ_{ns} の間に図－3に示すようなモール・クーロンの降伏条件が成立しているとすれば，増分形で示せば，

$$\left.\begin{aligned}\Delta\tau_{ns}^a \pm C_1\Delta\sigma_n^a &= 0\\ \Delta\tau_{ns}^b \pm C_1\Delta\sigma_n^b &= 0\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

なる条件を満さねばならない。ここで C_1 は摩擦係数である。したがって，材料内に辷りが発生した時には式(6)の付帯条件のもとで式(5)を解けばよい。ここでは Lagrange の未定乗数を用いて解く。すなわち，Lagrange の未定乗数 Γ^a，Γ^b を使って式(6)を式(5)に加えると次式となる。

$$-\Pi_{RH}^{**} = -\Pi_{RH}^{*} - \int_{S_{ab}}(\tau_{ns}^a \pm C_1\sigma_n^a)\Gamma^a dS + \int_{S_{ab}}(\tau_{ns}^b \pm C_1\sigma_n^b)\Gamma^b dS \quad (7)$$

式(7)では変位，応力とも増分量であるが，ここでは増分記号Δを省略して示した。ところで，式(7)について考えると，S_{ab} で辷りが生じた時，τ_{ns}^a と σ_n^a および τ_{ns}^b と σ_n^b には式(6)の関係があり，σ_n^a と σ_n^b が等しいと云う条件を加えれば当然 τ_{ns}^a と τ_{ns}^b も等しくなる。したがって，式(7)で辷りが生じている S_{ab} 上で，τ_{ns}^a と τ_{ns}^b が等しいという条件は必要でない。すなわち，S_{ab} において $V=0$ とする。

式(7)の Γ^a, Γ^b の物理的意味を調らべるために，Π_{RH}^{**} の第１変分を作り，その中で S_{ab} 上の停留条件に関係する項のみを示せば，

$$\delta\Pi_{RH}^{**} = \int_{S_{ab}}[U^a\delta\sigma_n^a + \sigma_n^a\delta U^a + V^a\delta\tau_{ns}^a + \tau_{ns}^a\delta V^a$$
$$-U^b\delta\sigma_n^b - \sigma_n^b\delta U^b - V^b\delta\tau_{ns}^b - \tau_{ns}^b\delta V^b$$
$$-(\sigma_n^a - \sigma_n^b)\delta U - U\delta\sigma_n^a + U\delta\sigma_n^b$$
$$-(\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b)\delta V - V\delta\tau_{ns}^a + V\delta\tau_{ns}^b$$
$$-(\tau_{ns}^a \pm C_1\sigma_n^a)\delta\Gamma^a - \Gamma^a\delta\tau_{ns}^a \mp \Gamma^a C_1\delta\sigma_n^a$$
$$+(\tau_{ns}^b \pm C_1\sigma_n^b)\delta\Gamma^b + \Gamma^b\delta\tau_{ns}^b \pm \Gamma^b C_1\delta\sigma_n^b]dS$$
$$+\cdots\cdots$$
$$= \int_{S_{ab}}[(U^a - U \mp \Gamma^a C_1)\delta\sigma_n^a + (-U^b + U \pm \Gamma^b C_1)\delta\sigma_n^b$$
$$+(V^a - V - \Gamma^a)\delta\tau_{ns}^a + (-V^b + V + \Gamma^b)\delta\tau_{ns}^b$$
$$-(\sigma_n^a - \sigma_n^b)\delta U - (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b)\delta V$$
$$-(\tau_{ns}^a \pm C_1\sigma_n^a)\delta\Gamma^a + (\tau_{ns}^b \pm C_1\sigma_n^b)\delta\Gamma^b]dS$$
$$+\cdots\cdots \quad (8)$$

となる。ここで，前述したように，辷り面では $V=0$ を仮定すれば，S_{ab} 上の停留条件から次式が導びかれる。

$$\left.\begin{aligned}&U^a = U \pm C_1\Gamma^a\ ,\ U^b = U \pm C_1\Gamma^b\\ &V^a = \Gamma^a\ ,\ V^b = \Gamma^b\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

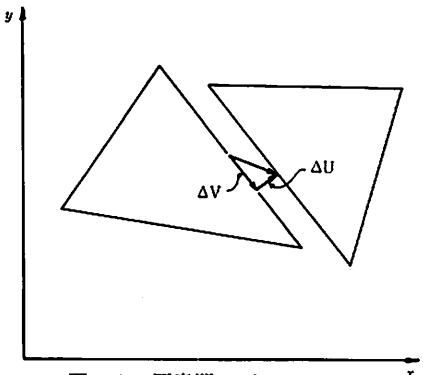
$$\left.\begin{aligned} &\sigma_n^a=\sigma_n^b,\quad \tau_{ns}^a\pm C_1\sigma_n^a=0 \\ &\tau_{ns}^b\pm C_1\sigma_n^b=0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(9), (10)より次の事がいえる。

1) σ_n^aとσ_n^bは等しく，互にモール・クーロンの式を満しているので，$\tau_{ns}^a=\tau_{ns}^b$となった。

2) Lagrange の未定乗数Γは局所座標系のs方向の変位である。n方向の変位はUとΓから求められる。

3) 図－4に示すように，要素間のずれをΔU，開き巾をΔVとすると，



図－4　要素間のズレ

$$\Delta U=U_n^a-U_n^b=C_1(\pm\Gamma^a\mp\Gamma^b) \tag{11}$$

$$\Delta V=\Gamma^a-\Gamma^b \tag{12}$$

となり，ΔUとΔVの関係式は，

$$\Delta U=\pm C_1\Delta V \tag{13}$$

となる。式(13)は辷りが生じた時の関係式としてよく知られた式である。

したがって，式(7)で釣合応力場を仮定すれば，辷り面でモール・クーロンの式を満足する hybrid 型コンプリメンタリエネルギーの原理の汎関数が得られる。すなわち，

$$-\Pi_{CH}^{**}=\sum_e\Big[\int_{V_n}B(\sigma_{ij})dxdy-\int_{\partial V_n}(U\sigma_n+V\tau_{ns})dS$$
$$+\int_{S\sigma}(U\bar{\sigma}_n+V\bar{\tau}_{ns})dS-\int_{S_{slip}}\Gamma(\tau_{ns}\pm C_1\sigma_n)dS\Big] \tag{14}$$

ここで，S_{slip}：辷り面，∂V_n：要素の境界，V_n：要素の体積である。付帯条件は，

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{ij,j}=0;\ V_n\ \text{内} \\ &V=0;\ \text{Sslip 上} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

である。

3　剛性マトリックスの誘導

式(14)を用いて，辺中央に3自由度を有する三角形要素の剛性マトリックスを導く方法を示す。応力場は釣合条件を満足するように，

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0\\ 0 & -y & 0 & 0 & 0 & -x & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_7\end{Bmatrix} \tag{16}$$

と仮定し，これを，

$$\{\sigma\}=[B]\{\beta\} \tag{17}$$

とおく。応力と歪の関係式は，

$$\{\varepsilon\}=[C]\{\sigma\} \tag{18}$$

とする。ここで，$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x\,\varepsilon_y\,\gamma_{xy}\}^T$であり，[C]は平面ひずみ問題では，

$$[C]=\frac{1+\nu}{E}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \tag{19}$$

平面応力問題では，

$$[C]=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix} \tag{20}$$

である。

式(14)でコンプリメンタリエネルギー関数の積分は式(17), (18)を用いて，

$$\int_{V_n}B(\sigma_{ij})dxdy=\frac{1}{2}\{\beta\}^T[H]\{\beta\} \tag{21}$$

となる。ここで，

$$[H]=\int_{V_n}[B]^T[C][B]dxdy \tag{22}$$

である。次に式(14)の第2項の積分を図－1に示す辺$\overline{12}$について示す。外向き法線の方向余弦をl, mとし，図－1に示すように，辺$\overline{12}$の変位を節点iの変位u_i, v_i, θ_iを用いて，次式のように仮定する。

$$\left.\begin{aligned} &U=u_i-\theta_iS \\ &V=v_i \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

ここで，Sは辺$\overline{12}$の局所座標系の原点からの距離である。つぎに，式(2), (23)を式(14)の第2項に代入すれば，

$$\int_1^2 (U\sigma_n + V\tau_{ns})dS = \int [(u_i - \theta_i S)(\sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2) + v_i(-(\sigma_x - \sigma_y)lm + \tau_{xy}(l^2 - m^2))]dS$$

$$= \{\beta\}^T \int_1^2 \begin{bmatrix} l^2 & -lm & -l^2 S \\ l^2 x - 2lmy & -lmx - y(l^2 - m^2) & -xl^2 S + 2lmyx \\ l^2 y & -lmy & -l^2 Sy \\ m^2 & lm & -m^2 S \\ m^2 x & lmx & -m^2 Sx \\ m^2 y - 2lmx & lmxy(l^2 - m^2) & -m^2 Sy + 2lmS \\ 2lm & l^2 - m^2 & -2lmS \end{bmatrix} dS \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \tag{24}$$

となる。同様な計算を辺$\overline{23}$, 辺$\overline{31}$について行い，これをたし合わせ，

$$\int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns})dS = \{\beta\}^T [G]\{u\} \tag{25}$$

とおく。ここで，

$$\{u\} = \{u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j \ u_k \ v_k \ \theta_k\}^T \tag{26}$$

である。

つぎに，式(14)の第3項を辺$\overline{12}$について示す。式(23)を用いれば，

$$\int_1^2 (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns})ds = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \int_1^2 \bar{\sigma}_n dS \\ \int_1^2 \bar{\tau}_{ns} dS \\ -\int_1^2 S\bar{\sigma}_n dS \end{Bmatrix} \tag{27}$$

となる。したがって，これを各辺について計算し，和を求め，

$$\int_{s_\sigma} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns})ds = \{u\}^T \{\bar{F}\} \tag{28}$$

とおく。ここで$\{\bar{F}\}$は荷重ベクトルである。

式(14)の第4項の辷り面での積分は，式(2)を用いて，

$$\int_{S_{slip}} \Gamma(\sigma_n \pm C_1 \tau_{ns})dS = \{\beta\}^T \int_{S_{slip}} [\pm C_1 l^2 - lm \quad x(\pm C_1 l^2 - lm) - y(\pm C_1 l^2 - lm) \quad \pm C_1 m^2 + lm \quad x(\pm C_1 m^2 + lm) \quad y(\pm C_1 m^2 + lm) - x(\pm 2lmC_1 + l^2 - x^2) \quad \pm 2lmC_1 + (l^2 - m^2)]^T dS\,\Gamma \tag{29}$$

となる。1個の三角形要素で辷り個所が2または3個所あるなら，式(29)の積分は辷り個所の数だけ実行する。したがって，一般的に示せば，Γをベクトルと考えて，

$$\int_{S_{slip}} \Gamma(\tau_{ns} \pm C_1 \sigma_n)ds = \{\beta\}^T [G^*]\{\Gamma\} \tag{30}$$

とする。

つぎに，式(21), (25), (28), (30)を式(14)に代入すれば，

$$-\Pi_{CH}^{**} = \frac{1}{2}\{\beta\}^T [H]\{\beta\} - \{\beta\}^T [G]\{u\} - \{u\}^T \{\bar{F}\} - \{\beta\}^T [\dot{G}]\{\Gamma\} \tag{31}$$

となる。ここで，$\{\beta\}$に関する条件より，

$$\{\beta\} = [H]^{-1}([G]\{u\} + [\dot{G}]\{\Gamma\}) \tag{32}$$

となり，これを式(31)に代入し$\{u\}$, $\{\Gamma\}$について停留条件を求めると，

$$[K_{11}]\{u\} + [K_{12}]\{\Gamma\} = \{\bar{F}\} \tag{33}$$

$$[K_{21}]\{u\} + [K_{22}]\{\Gamma\} = \{0\} \tag{34}$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned} &[K_{11}] = [G]^T[H]^{-1}[G], \ [K_{12}] = [G]^T[H]^{-1}[\dot{G}] \\ &[K_{21}] = [\dot{G}]^T[H]^{-1}[G], \ [K_{22}] = [\dot{G}]^T[H]^{-1}[\dot{G}] \end{aligned} \tag{35}$$

である。式(33), (34)より$\{\Gamma\}$を消去すれば，

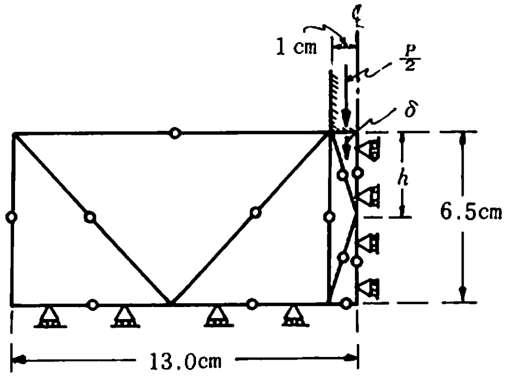
$$\{[K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]\}\{u\} = \{\bar{F}\} \tag{36}$$

となる。式(36)で$[K_{11}]$は辷りがない時の剛性マトリックスで，$[K_{12}]$, $[K_{21}]$, $[K_{22}]$は辷りが生じた時に新に必要になった項である。なお，辷り個所ではS方向の変位vを零にしておく必要がある。

4　数値計算例

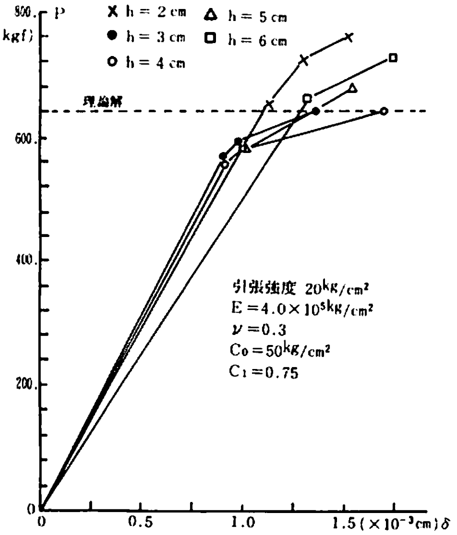
4－1　コンクリートブロックの支圧強度解析

末永らはRC梁のせん断強度式を導くのに，コンクリート・ブロックの支圧強度の理論解を利用した[5]。ここではハイブリッドストレスモデルでコンクリート・ブロックの支圧強度解析を行い，理論解と比較した。コンクリート・ブロックは，たて：13cm，よこ：26cmの大きさで，上下から幅2cmの剛板を通して荷重を受けている。なお，ここでは平面歪問題として解析した。

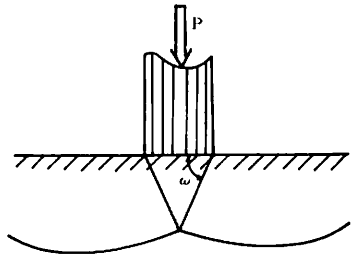


図－5　コンクリートブロックの支圧強度

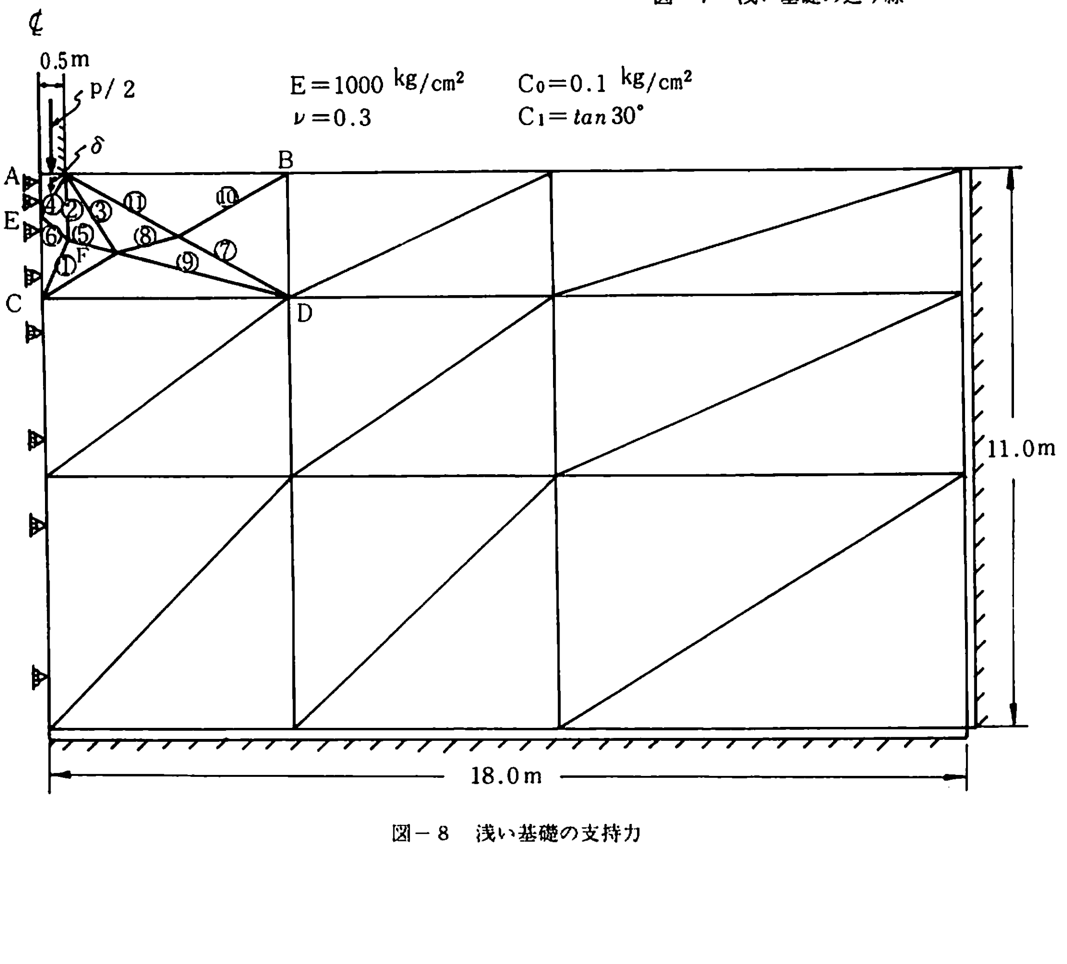
図－5には要素の分割を示した。ここで提案した解析法により一つの上界解が得られる。しかし，最良の解は最小の荷重であるから，剛板の下部に発生するくさびの深さhを2cm～6cmまで変え，5ケースについて解析した。図－6は各ケースに対する荷重一変位曲線を示した。解析結果ではh＝3cmの時，最小の荷重でその大きさはP＝644.6kgfとなった。なお，末永らの理論式より最小の荷重を求めるとP＝640.0kgfとなるので，解析結果は良好と言える。



図－6　荷重一変位曲線



図－7　浅い基礎の辷り線

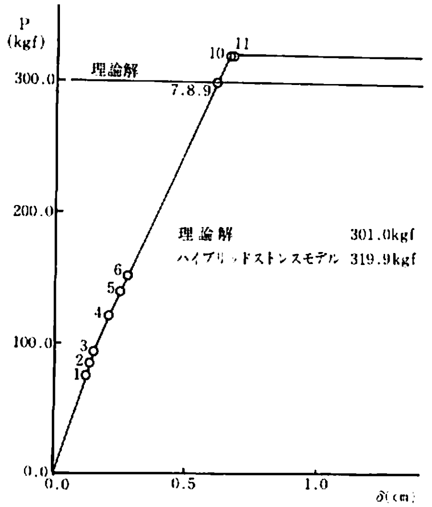


図－8　浅い基礎の支持力

4 − 2　浅い基礎の支持力

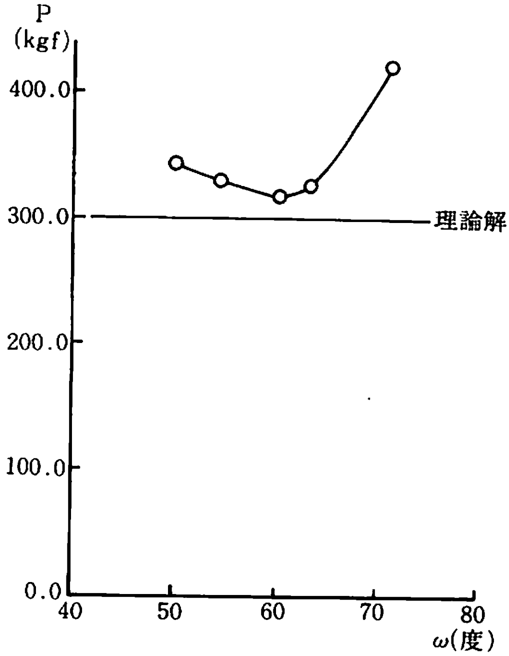
図−7に示す，浅い基礎の支持力の問題をハイブリッドストレスモデルで解析し，プラントルの理論解と比較した。地盤の解析領域は深さ：11m，幅：36mとし，基礎の幅は1mとした。なお，地盤側面および底面の境界条件は固定として解析を行った。要素はプラントルが上界解を得るために使った辷り線および竹内らの研究[6]を参考にして分割した。なお，この解析では土の自重を無視した。

図−8に辷り線の発生順位，図−9に荷重−変位曲線を示した。辷り線は最初に基礎端部から発生すると考えられるが，解析の結果では2番目に発生しているこれは要素分割が粗いためである。しかし，図−9に見られるように，辷りの発生順位1，2の荷重差は小さい。ハイブリッドストレスモデルによる極限荷重はプラントルの解よりも少し高目になっているが，要素の分割を細くすることによって，もっと良い解を得ることができる。



図−9　荷重−変位曲線

つぎに，図−7に示す基礎底面のくさびの角ωによって荷重がどのように変化するかを知るために，図−8の辷り線の発生領域（長方形：$\overline{ABCD}$）だけを取り出して解析を行った。解析ではωの増加と共にE点が深くなるので，辷り線が滑らかになるように，F点を鉛直に移動して計算した。解析結果は図−10に示した。プラントルの解では $\omega = 45^\circ + \phi/2$ であるから，摩擦角 $\phi = 30^\circ$ を代入すれば $\omega = 60^\circ$ となる。一方，図−10



図−10　荷重− ω曲線

から分かるように，ハイブリッドストレスモデルの結果でも $\omega = 60^\circ$ の時に最小の荷重を与えている。

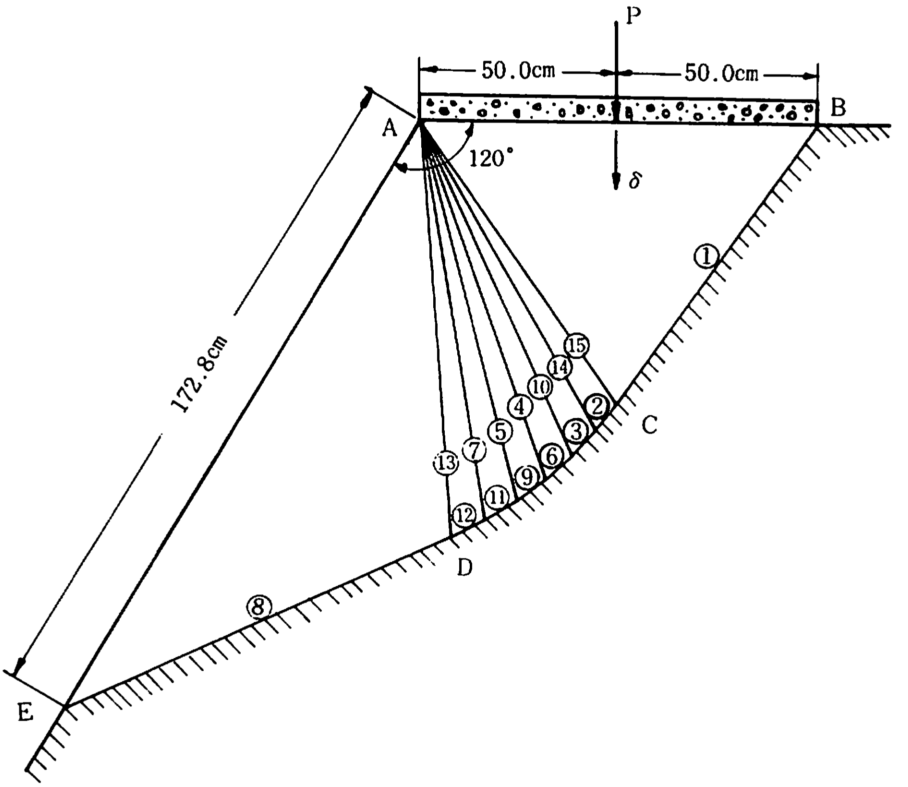
4 − 3　斜面上の基礎の支持力

図−11に示すように，斜面端部に基礎がある時の支持力問題を解析し，W. F. Chen の理論解と比較した[7]。解析領域は $\overline{ABCDE}$ だけを弾性体とし，残りの部分は剛体と仮定した。なお，要素は W.F. Chen の辷り線を参考にして分割した。

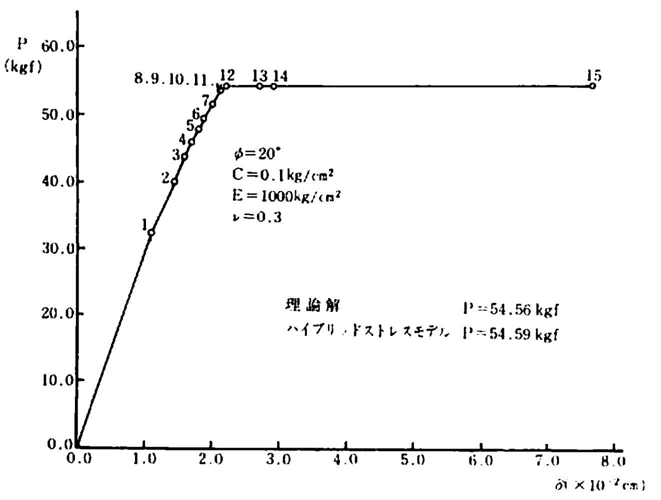
図−11は扇形領域 $\overline{ACD}$ を6分割した図で，図中の数字は辷り線の発生順序を示す。図−12には6分割の時の荷重−変位曲線を示したが，解析領域が限定されているため実際の荷重−変位曲線とは異なる。しかし，辷り線の発生順位ごとの荷重が分かっているので，工学的に有用な資料となる。表−1には扇形領域の要分割数と荷重の関係を示した。荷重は1要素でもかなり良い精度であるが，6要素では，ほとんど理論解に一致している。

5　あとがき

有限要素法では塑性を要素内で表わす方法と要素境界で表わす方法がある。ここで提案した方法は要素境界で塑性を表わす方法の一つで，一般に要素内で塑性



図－11　斜面上の基礎の支持力



図－12　荷重と変位

分割数	荷重：P (kgf)
1	55.41
2	54.77
3	54.90
6	54.59
理論解	54.56

表－1　要素分割による荷重の変化

を表現する方法よりも少ない要素数で良い解を得ることができる。しかし，少ない要素数で良い解を得るためには，正しい辷り線を要素境界線でうまく近似することが必要である。このため，要素分割は与えられた問題と類似の問題の辷り線を利用するか，または，模型実験を行い，辷り線を確認の上で分割する方法が考

えられる。なお，本研究で得られた結果を要約すると，次のようになる。

1）辷りを考慮に入れたハイブリッドストレスモデルを導き，モール・クーロンの降伏条件で表わされる材料の極限解析法を示した。

2）剛性マトリックスを導く時，渡辺[2]と同じ応力場および変位場を仮定しているので，弾性時においては渡辺の提案したハイブリッドストレスモデルに一致する。

3）辷り線を有する要素の剛性マトリックスは，応力パラメータと Lagrange の未定乗数を消去することにより９×９の大きさとなった。したがって，プログラミングの上で取り扱いが簡単である。

4）数値計算の結果は一般的に良好で，特に，計算例4－3から分かるように，要素分割を細かくすることによって，正解に収束することが明らかになった。

謝辞：本研究にあたり、貴重な御助言をいただいた東京大学生産技術研究所：川井忠彦教授，広島大学工学部：近藤一夫博士，三菱総合研究所：渡辺正明博士，御鞭撻をいただいた琉球大学工学部：具志幸昌教授、上原方成教授，大城武教授，和仁屋晴讃助教授，図面作成に御助力いただいた琉球大学工学部技官：玉那覇宜雄氏に心から感謝の意を表します。

参　考　文　献

1）川井忠彦編：生研セミナーテキスト（物理モデルによる連続体力学諸問題の解析），生産技術研究奨励会，第１回（1978年）

2）渡辺正明，川井忠彦：ハイブリッドストレスモデルによる辷り線，塑性関節，塑性関節線の表現，日本造船学会論文集（昭和55年５月），Ｐ297～Ｐ305

3）近藤一夫：平面応力問題に対する一離散化手法，日本鋼構造協会第13回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集（昭和54年６月），Ｐ191～Ｐ196

4）鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピューターによる構造工学講座Ⅱ－３－Ａ，培風館（1972年）

5）末永保美，石丸麟太郎：組み合わせ応力を受けるコンクリート材の動力学的解析，日本建築学会論文報告集，No.220（昭和49年６月），Ｐ１～Ｐ７

6）竹内則雄，川井忠彦：新離散化モデルによる支持力問題の極限解析，土木学会第35回年次学術講演会講演概要集第１部（昭和55年９月），Ｐ79～Ｐ80

7）W.F.Chen : Soil Mechanics and Theorems of Limit Analysis, Proceedings of the ASCE, EM 2 (March, 1969), Ｐ493～Ｐ518