# Kempf複体の超判別式への応用

| メタデータ | 言語:<br>出版者: 前田高士<br>公開日: 2010-10-05<br>キーワード (Ja): 対称群, 半順序, べき零線形変換, Jordan標準形, グラスマン多様体, 等質空間, Little wood-Rithardson盤, Littlewood-Richardson盤, Scnubert多様体, べき零行列, コクセター群, プファッフィアン, プリュッカー埋込, 交代群, 双対多様体, 特異点集合<br>キーワード (En): Bruhat order, nil potent linear trans formation, Jordan canonical form, grassmann variety, Little wood-Richardson tableaux, nil potent matrix, Schubert cell, homogeneous space, singular set<br>作成者: 前田, 高士, 志賀, 博雄, Maeda, Takashi, Shiga, Hiroo<br>メールアドレス:<br>所属: |
|---|---|
| URL | http://hdl.handle.net/20.500.12000/18187 |

# Kempf複体の超判別式への応用

（研究課題番号　１４５４００３５）

平成１４年度－平成１５年度

科学研究費補助金（基盤研究（C）(2)）

研究成果報告書

平成１６年３月

研究代表者　　　前田　高士

求大学理学部教授）

# まえがき

本研究は『Kempf 複体の超判別式への応用』と題し、2002（平成 13）年度から 2003（平成 14）年度までの２年間にわたる継続研究として科学研究費補助金（基盤研究（C）（２））の交付（課題番号 14540035）を受けて行ったものである。ここにその研究成果を報告する。

２年間にわたる本研究の分担者は次の研究組織の項の記載通りである。この研究の遂行においてお世話いただいた関係各位に心からの謝意を表する。

研究代表者　前田　高士

研究組織

研究代表者：　前田　高士（琉球大学理学部数理科学科教授）

研究分担者：　志賀　博雄（琉球大学理学部数理科学科教授）

交付決定額（配分額）　（金額単位：千円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---|---|---|---|
| 平成 14 年度 | 600 | 0 | 600 |
| 平成 15 年度 | 500 | 0 | 500 |
| 総額 | 1,100 | 0 | 1,100 |

研究発表

論文

［　］内にこの報告書における記載ページを示した。

１．Takashi Maeda, A partial order on the symmetric groups defined by 3-cycles, Ryukyu J. Math., 15 (2002) 19-42 [5-28]

２．Takashi Maeda, The varieties of subspaces stable under a nilpotent transformation, Ryukyu J. Math., 16 (2003) 43-71 [29-57]

研究成果

平成 14 年度 : A partial order on the symmetric groups defined by 3-cycles ( 3 サイクルで定義される対称群の半順序)

群 $G$ とその生成元の集合 $S$ ($S$ は $G$ の単位元を含まないとする) に対して、$(G, S)$ の Cayley graph $\Gamma = \Gamma(G, S)$ は以下のようにして定義される。$G$ を頂点の集合、$x, y \in G$ はある $S$ の元 $a$ に対して $y = ax$ のとき、$x$ と $y$ を辺で結ぶ。例えば、$G$ が $S$ を基底とする自由群のとき、$\Gamma$ は tree で、また、$G$ が simple reflexion の集合 $S$ で生成される Coxeter 群のときは、$\Gamma$ によって Bruhat order が定義される。14 年度は、$G$ を $n$ 次交代群 $A_n$、$S$ を連続する 3 文字の $(n-2)$ 個の 3 サイクル $a_j = (j, j+1, j+2)$ $(1 \le j \le n-2)$ のとき、その Cayley graph および、それに付随する $A_n$ の半順序に関して考察した。

3 サイクル $a_j = (j, j+1, j+2)$ は連続する 2 文字の互換 2 つの積なので、交代群 $A_n$ の元 $\pi$ を $2(n-2)$ 個の 3 サイクル $\{a_1, \cdots, a_{n-2}, a_1^{-1}, \cdots .a_{n-2}^{-1}\}$ で積表示すると、$i(\pi)/2$ 個以上必要である (ここで $i(\pi)$ は置換 $\pi$ の逆転数)。すると次のような自然な疑問が起こる。$A_n$ のどんな元がちょうど $i(\pi)/2$ 個の 3 サイクルの積で表されるか? また Coxeter 群の元の最短表示に相当するような、3 サイクルによる自然な積表示があるか?

この問題は置換で考えるより、以下のように word ($n$ 個の文字 $1, \cdots, n$ を並べかえた列) で考える方がわかりやすい。長さ $n$ の word $x = x_1 \cdots x_n$ における連続する 3 文字 $x_{j-1}x_jx_{j+1}$ は、$abc, acb, bac, bca, cab, cba$ (ここで $a < b < c$) の 6 通りが起こりえるが、ある 3 サイクル $a_j^{\pm 1}$ を施して逆転数が減少するのは後半の 3 つ、つまり $x_{j-1} > x_{j+1}$ が必要十分条件である。とくに、どの 3 サイクル $a_1^{\pm 1}, \cdots, a_{n-2}^{\pm 1}$ を施しても逆転数が減少しない word (minimal word と名づける) は、$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots$ かつ $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$ である (このような概念は計算機プログラミングにおける Shell sort に現れる)。そこで $S_n(l)$ を $n$ 次対称群 $S_n$ の逆転数が $l$ の元に対応する word 全体からなる集合として、$S_n$ の半順序を次のように定義する。

[定義 A] $x \in S_n(l)$, $y \in S_n(m)$ が $x \le y$ とは、$m - l = 2k \ge 0$ 非負偶数、かつ、$x$ は $2(n-2)$ 個の 3 サイクル $\{a_1^{\pm 1}, \cdots, a_{n-2}^{\pm 1}\}$ から $k$ 個 (重複を許す) を $y$ に施して得られる。また、単位元に対応する word $12 \cdots n$ と比較可能な word を general、そうでない word を special という。

つまり、偶置換に対応する word $\pi$ ( even word という) が special とは、3 サイクル $\{a_j\}$ の $i(\pi)/2$ 個の積表示が不可能ものである。定義 A は、simple reflexion $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ で生成される Coxeter 群に対して、3 サイクル $a_j$ を $s_j s_{j+1}$ として形式的に一般化可能である。 general word つまり、$12 \cdots n$ と比較可能な word であるための十分条件として次の定理を得た。

[定理 B] 最大の文字 $n$ が左端、または、左から 2 番目にある even word は general である。

involution $(x_1 \cdots x_n)^* = n+1-x_n, n+1-x_{n-1}, \cdots, n+1-x_1$ を考えることにより、最小の文字 1 が右端または右から 2 番目にある even word も general である。しかし、1 が右から 3 番目にある word、例えば 2143 や 246135 は general でない。$n = 3, 4$ のとき、定理 A は容易に確認できる。例えば $n = 4$ の even word の

なす poset $S_4^{(e)}$ において、2143 が唯 1 つの special word である。一般に、$x$ が $\{1,\cdots,k\}$ の odd word, $y$ は $\{k+1,\cdots,n\}$ の odd word ならば、$xy$ は $\{1,\cdots,n\}$ の special even word になることは明らかである。そこでこのような自明な special word を省くために以下の定義をする。

[定義 C] (i) word $x=x_1\cdots x_n$ は、ある $1\le k\le n-1$ に対して $x_1\cdots x_k$ は $\{1,\cdots,k\}$ の word、$x_{k+1}\cdots x_n$ は $\{k+1,\cdots,n\}$ の word のとき decomposable、このような $k$ が存在しないとき indecomposable という。

(ii) even word は、(1) indecomposable かつ minimal、または、(2) indecomposable かつ、$x$ によって cover される word はすべて decomposable、のとき nearly decomposable という。

例えば 415263 は indecomposable minimal なので nearly decomposable であり、indecomposable word 3257146 が cover する word は 3215746 と 3251476 で、この 2 つは decomposable なので、3257146 は nealy decomposable である。定義 C から次の 3 つのことが導かれる。

(i) $S_n$ の indecomposable word の集合は poset $S_n$ の dual order ideal、つまり $x$ が indecomposable で $x\le y$ ならば、$y$ も indecomposable である。

(ii) general word の集合は、$12\cdots n$ で生成される $S_n$ の dual order ideal なので、special word の集合は、$S_n$ の order ideal、つまり $x$ が special で、$x\ge y$ ならば、$y$ も special である。

(iii) 任意の indecomosable even word $x$ に対して、$x$ とある nealy decomposable word を結ぶ chain が存在する。

(i)-(iii) から、indecomposable special word の集合は、 nearly decomposable word $x$ を cover する special word の集合 $V_x\cap S_n^{(s)}$ の和集合であることがわかる (ここで $V_x=\{y\in S_n\ ;\ x\le y\}$ は、$x$ で生成される dual order ideal)。結局、nealy decomposable special word がわかれば、$V_x\cap S_n^{(s)}$ は (手間がかかるが) 容易にわかる。とくに $n$ が 8 以下のとき、すべての nearly decomposable special word を書き出した。

一方、indecomosable minimal word の個数は、$n=2r$ 偶数のとき、$r-1$-th Catalan 数 $\frac{1}{r}\cdot\binom{2r-2}{r-1}$ であり、$n$ が奇数のとき、minimal word はすべて decomposable であることがわかった。

平成 15 年度 : The varieties of subspaces stable under a nilpotent transformation (べき零変換で安定な部分空間のなす多様体)

ベクトル空間のべき零線形変換 $f : V \to V$ の Jordan 標準形のタイプを type $V = \lambda$ つまり、Jordan ブロックのサイズを $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l$ とする。整数 $0 < d < n = \dim V$ に対して、$V$ の $d$ 次元部分空間で $f$-安定なもの全体 $X(\lambda, d) = \{W \subset V \ ; \ \dim W = d, \ f(W) \subset W\}$ は、$W$ と $V/W$ のタイプによって分解される : $X(\lambda, d) = \coprod_{\nu,\mu} S(\lambda, \nu, \mu)$ ここで、

$$S(\lambda, \nu, \mu) = \{ \ W \subset V \ ; \ \text{type } W = \nu, \ \text{type } V/W = \mu \ \}$$

である。べき零変換 $f$ を表現する $n$ 次べき零行列の共役類の、$n$ 次行列全体における閉包に関しては多くの研究があるにもかかわらず、$V$ の $d$ 次元部分空間のなすグラスマン多様体 $G(d, V)$ における、$S(\lambda, \nu, \mu)$ の Zaiski 閉包 $X(\lambda, \nu, \mu)$ はあまり研究されていないようである。 15 年度の研究は、$X(\lambda, \nu, \mu)$ の特異点集合に関して以下の結果を得た。

$S(\lambda, \nu, \mu)$ の連結成分は、shape $\lambda/\mu$, content $\nu$ の Littlewood-Richardson 盤 (LR 盤) と 1 : 1 に対応し、それらの次元はすべて $n(\lambda) - n(\nu) - n(\mu)$ (ここで $n(\lambda) = \sum_i (\lambda_i - 1)$) であることが知られている (LR 盤 $T$ に対応する連結成分を $S_T$、その閉包を $X_T$ と書く)。$X(\lambda, \nu, \mu)$ の既約成分 $X_T$ は、分割の dominance 順序 $\lhd$ について $\bar{\nu} \lhd \nu$ かつ $\bar{\mu} \lhd \mu$ なる $\bar{\nu}, \bar{\mu}$ に関する $S(\lambda, \bar{\nu}, \bar{\mu})$ たちの和集合に含まれることは容易に示すことができる。しかし、後に定義する generic vectors を使うと、一致しない例を構成することができる。

$\nu = (1^k)$ のとき、つまり $f$-安定部分空間 $W$ が $f(W) = 0$ をみたすとき、$S(\lambda, (1^k), \mu)$ はいくつかの Schubet cell の和集合、$X(\lambda, (1^k), \mu)$ は Scubert 多様体である。グラスマンの Schubert 多様体の特異点集合は既知なので、この研究は Schuert 多様体の 1 つの一般化とみなせる。 Schubert cell は parabolic 部分群に関する等質空間なので非特異有理多様体である。一般の $S(\lambda, \nu, \mu)$ は $(V, f)$ の自己同型群 $A(V, f) = \{g \in \mathrm{GL}(V); f \circ g = g \circ f\}$ に関して等質空間ではないので、この 2 つの性質は明らかではない。しかし、自己同型群 $A(V, f)$ の構造と、$S(\lambda, (1^k), \mu)$ の等質性から次の定理が得られた。

[定理A] $S(\lambda, \nu, \mu)$ の非特異有理多様体。

次に $X_T$ の特異点集合を調べるために、$S_T$ の生成点を構成して、生成点の $S_T$ の境界での退化を記述することを考えた。そのために、各 LR 盤に関して「generic vectors」というものを定義して、具体的にこれらを求めるアルゴリズムを与えた。これが 15 年度の研究の主結果である。LR 盤 $T$ に関する generic vectors は、最小の数字が書き込まれている $T$ の cell と 1:1 に対応し、1 つの cell を除いて代数的に独立なパラメータを係数とする。 $T$ の各 cell に対応する generic vector の代数的に独立なパラメータの個数の和は、$X_T$ の次元 $N$ に等しくなり、generic vector の Plücker 座標を対応させることにより、$N$ 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^N$ から $X_T$ への写像 $\varphi : \mathbb{A}^N \to X_T$ が定義される。$T$ の、$k$ より小さい数字が書き込まれているすべての cell を省いてできる LR 盤を $T_{\geq k}$ と書くと、次の定理が得られた。

[定理 B] (i) $T$ に関する generic vectors で生成される $f$-安定な部分空間は、$T, T_{\geq 2}, T_{\geq 3}, \cdots, T_{\geq \nu_1}$ に関する generic vectors を基底にもつ。
(ii) 写像 $\varphi : \mathbb{A}^N \to X_T$ は双有理射、よって (i) における $f$-安定部分空間は $X_T$ の生成点である。

写像 $\varphi$ の像が $S_{\bar{T}}(\subset X_T)$ と交わるための条件は、LR 盤 $\bar{T}$ の shape が $T$ の shape に等しいことであり、とくに $\mathbb{A}^N$ の原点の像は $T$ の cell vector で生成される部分空間 $W_0$ である。定理 B によってグラスマン $G(V,d)$ の主開集合 $U_{W_0}=\{\wedge^d W_0 \neq 0\}$ に含まれるような $X_T$ の特異点集合を決定することは比較的容易である。しかし、shape が真に小さい LR 盤 $\bar{T}$ に関する $S_{\bar{T}}$ に含まれるような $X_T$ の特異点集合の記述には別の工夫が必要である。多くの例から推測すると、$X_{\bar{T}} \subset X_T$ で $\bar{T}$ の shape, content ともに $T$ のそれらより真に小さいならば、 $X_T$ は $X_{\bar{T}}$ に沿って特異点集合であると予想している。

最も簡単な余次元 2 の特異点集合は、$X((22),(2),(2))$ である、これは平面 2 次曲線上の cone で、頂点が特異点である。この例を一般化して、高次元の余次元 2 の特異点集合をもつ $X_T$ の例を見つけた。$X_T$ のアフィン座標環は超曲面でその定義方程式を具体的に記述した（命題 3）。