立体ラーメンに関する研究1 独立部材角について

立体ラーメンに関する研究 I

独立部材角について

具　志　幸　昌*

Yukimasa GUSHI: A study on spaced rigid frames I.

1 梗　　概

立体ラーメンを撓角法あるいはモーメント分配法によって解く場合，多くの節点が移動する時は，独立部材角の選定と独立部材角による各部材の部材角の表示が必要となってくる。この論文では平面ラーメンの解法の際に用いられている置換トランスの考え方を立体ラーメンに適用して，立体ラーメンの置換トラスのメカニズムを安定トラスにする際の支持リンクに新らしい意味をもたせて，その位置，方向の定め方をのべ，次いでその新らしい意味をつけた支持リンクによって，立体ラーメンの独立部材角の数の算定を行ない，更に独立部材角による一般の部材角の表示，モーメント分配法の場合の固定端モーメントの算定および auxially force system のえらび方，撓角法の場合の部材方程式の作り方に資する様にした。

2 序　　説

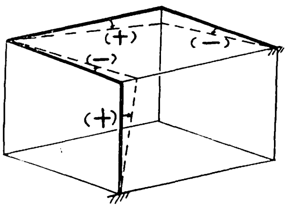
立体ラーメンの解法については，色々研究が行なわれているが[1][2]，筆者も数年前東京工大二見研究室で撓角法形式による解法[3]を研究した。しかしながら多くの節点が移動し，独立部材角が沢山生ずる複雑な場合の解法はまだ提示されていない。筆者はそこでそのような場合で一番問題になる独立部材角の数，えらび方について研究を行ない，モーメント分配法，撓角法形式によって立体ラーメンを解くことに資することにした。

3 角度，モーメントのえらび方，符号その他

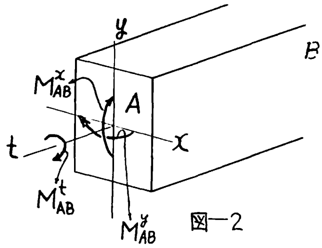
角度の正負　通常撓角法やモーメント分配法では節点角，部材角，端モーメントは時計まわりを正としているが，立体ラーメンの場合はただ時計まわり，反時計まわりと指示しても見る方向，位置によっては正になったり負になったりするので，この論文では，ラーメンをみる方向を常に一定しておくことにする。つまり立体ラーメンを常に左，前，上方からみることにし，時計針方向と一致する回転方向を正とする。念のため部材角の場合の例を図 1 に示しておく。

材端モーメント，曲げモーメントのえらび方　ラーメンの構成部材は簡単のため断面は対称軸を有し，一様断面で材軸は直線であるとする。端モーメントは主軸に関する2つのモーメントと主軸に垂直な軸（つまり材軸）に関する捩りモーメントに分け（図 2 参照），前2者を適当に $M_{AB}{}^{x}$, $M_{AB}{}^{y}$ 後者を $M_{AB}{}^{t}$ と云う記号を使う。サフィックス AB は慣習通り AB 材の A 端に関する端モーメントを意味し，x, y, t は夫々 x 軸まわり，y 軸まわり，t 軸（材軸）まわりのモーメントを意味する。

* 琉球大学農家政工学部土木工学科



図−1



図−2

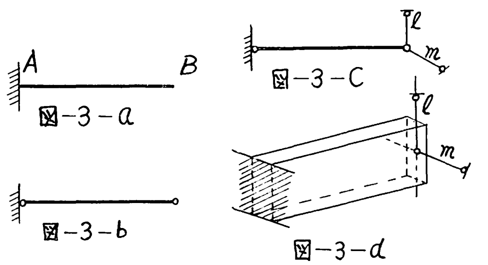
撓み角も同様に $\theta_{AB}{}^x$, $\theta_{AB}{}^y$, $\theta_{AB}{}^t$ あるいは夫々に $2EK_0$ を乗じたものを $\varphi_{AB}{}^x$, $\varphi_{AB}{}^y$, $\varphi_{AB}{}^t$ などと記す。

部材角 通常の平面ラーメンでは部材角は各部材毎に1つであったが，立体ラーメン（平面ラーメンが面外荷重を受ける場合を含む。以下特にことわらない限り同じ）では1部材毎に2つ考えられる。これを端モーメントのとり方と一致させて $R_{AB}{}^x$, $R_{AB}{}^y$ あるいは $-6EK_0R_{AB}{}^x=\Psi_{AB}{}^t$, $-6EK_0R_{AB}{}^y=\Psi_{AB}{}^y$ などの符号をつける。部材の移動つまり部材角は必ずしもこの2方向に起るとは限らないが，これらの量がベクトルであることから，この2つの主軸方向に分けて表わすことができる。

4 独立部材角の数およびえらび方

4.1 置換トラスと部材角の数 上記部材角は全部独立でない。その中独立なものは限られたものだけである。平面ラーメンの場合，独立部材角の数の算定には，置換トラスが用いられているが[4]，立体ラーメンの場合も置換トラスの考え方を用いることができる。即ち立体ラーメンの各節点をピンに置きかえると立体的メカニズムを形成するが，これを運動の自由度零のメカニズム即ち立体安定トラスにするには，何本の支持リンクが必要であるかと云うことを考える。この必要な支持リンクの最低数が独立部材角の数を示す。

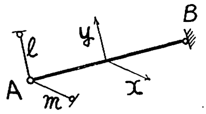
4.2 部材が1つの場合 今図 3-a の如く片持梁を考える。これの独立部材角を計算するために，節点（この場合は支端のみ）をヒンジに置きかえると図 3-b の如くになり，不安定メカニズムとなる。これを安定ならしめるには，図 3-c の如く B 端を AB 材とは同一平面を形成しない2本の棒によって結んでやればよい。点 B は一平面上にない3本の棒によって支持されているから動かない。つまり空間ラーメンの節点を動かないように支持するには，一平面上にない3本の棒が必要であり，その中部材を除いた棒の数が，独立部材の数になると一応考えられる。



図−3−a 図−3−b 図−3−C 図−3−d

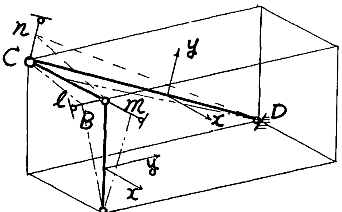
つぎに支持リンクの節点の支持のしかたであるが単に支持するだけなら一平面上にない 3 本の棒（部材も含めて）で勝手に支えてやればよいが，この支持リンクに部材 AB の独立部材角の回転方向あるいは立体メカニズムの運動方向（即ち後述の運動の自由度1のメカニズムの節点の移動方向）を示させることにすると，独立部材角は互いに独立でないといけないから，お互いに成分をもたない。つまり独立部材角の回転方向を示す支持リンクは一つの節点で互いに直交しなくてはいけない。その上部材軸に直交する面上に支持リンクをとるとその材の部材角は独立部材角の函数として表現し易い。もっと云うならば部材 AB の主軸と一致させれば，AB の部材角は独立部材角そのものになり一層簡単になる（図 3-d）。

4.3 支持リンクによって独立部材角の方向を示すと云うこと 支持リンクによって独立部材角の方向またはメカニズムの運動方向を示すようにすると云うことはつぎのようなことである。今図 4 のように部材 AB があって，B 節点で AB 材が動かないように支えられているとする。すると A 節点は部材端断面の主軸方向に 2 つのリンク l, m をとれば不動となる。すると支持リンク l は x 軸に関する部材角 $R_{AB}{}^{x}$ の方向を示し，m は y 軸まわりの部材角 $R_{AB}{}^{x}$ の方向を示す。また AB 材が立体ラーメンの一部である時は，支持リンク l を取去れば，節点 A は l 方向に可動となる。支持リンク m についても同様であり，支持リンクは置換トラスの形成するメカニズムの運動方向も示すことになる。



図－4
x, y は断面の主軸方向

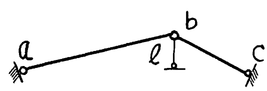
更に図 5 をみれば判る通り，ラーメン $ABCD$ の節点をヒンジで置きかえたものを 3 本の支持リンク l, m, n で支えれば安定トラスとなる。（l は面 ABC に垂直，m は部材 BC の方向，n は面 BCD に垂直）l は独立部材角 $R_{BA}{}^{x}$ に，m は同じく $R_{AB}{}^{y}$ に，n は $R_{CD}{}^{x}$ に対応する。又例えば支持リンク n を取去ると，運動の自由度 1 のメカニズムになり，n はその際の節点 C の可動方向を示す。他の m, l についても同様である（図 5 の点線参照）。また，モーメント分配法における auxiliary force の位置方向をも支持リンク l, m, n は示すものである。



図－5

4.4 部材 2 つが 1 節点に会する場合 図 6-1 を考える。a, c 点は不動点であるから，b 点を動かない様にすればよい。そのためには，b 点に 1 本の支持リンクをもってくればよい。その際支持リンク l は ab, bc が形成する平面内になければよいのであるが，独立部材角並びにその方向を示し，リンク l を取去った場合の b 点の可能移動方向を示すためには，リンク l は面 abc に垂直にとらねばならない（図 6-2）。

図－6－1



図－6－2

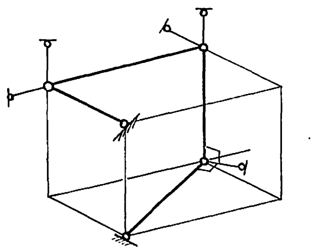
次に中間節点が沢山ある場合の支持リンクの取り方を考えてみよう。（勿論各節点に集る部材数は 2 であるとする。）この場合，上述の事が一般には言えるのであるが，更に大切なことは，リンクを定めることは，対応する独立部材角を定めること並びに節点の可動方向を指示することになるのだから，置換トラスの形成するメカニズムの全体的な運動を考えて支持リンクを定めなくてはならない。勝手に支持リンクを 2 個づつとっていくと，対応する独立部材角が独立にならないことが生ずる。一般的に云うとこの場合一端より，順次に各節点毎に支持リンクを定めることができるが，（節点を構成する 2 部材の形成する平面に直交して一本，そしてそれに直交して一本定める。後の 1 本は片方の材軸方向にとれれば簡単になる）最後の節点（n と名付ける）の支持リンクは方向が一義的に定まって，節点 n に集る 2 部材の作る面に直交する方向になる。中間節点の数を j とすると，独立部材角の数 n は次のようになる。

$$n=2j-1 \tag{1}$$

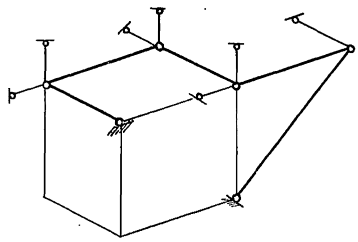
つぎに支持リンクの取り方の例を図 7 に示す。

4.5 3 本以上の部材が 1 つの節点に集る場合を含む場合

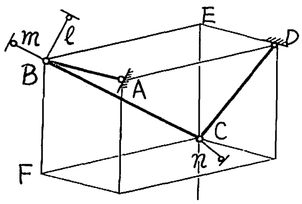
節点が 1 つの時 中間節点が 1 つの時は，簡単で，その 3 本以上の部材が全部 1 平面上にある時は，メカニズムの考え方からすぐ判る様に支持リンクはその平面に直交して 1 本必要となることが判る。その 3 本以上の部材が全部は同一平面上にない時は，その節点は不動点となり，置換トラスは安定トラスで動かず，従って部材角はどの部材にも存在しない。



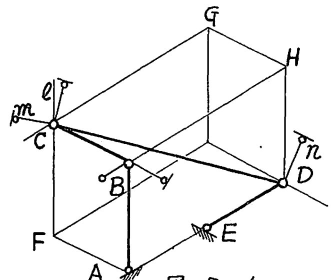
図－7－1



図－7－2



図－7－3
ℓは面BEF内にありBCに垂直
mはBC方向
nは面CDE内でCDに垂直



図－7－4
ℓは面BCDに垂直，つまり面CFG内にあってCDに垂直
mは面CFG内にあってℓに垂直
nは面BCDに垂直，つまり面GHD内にあってCDに垂直

節点が２つ以上ある時　この場合の取扱いは複雑であり置換トラスメカニズムの性状を注意深く観察して，支持リンクの数，方向を定めねばならない。中間節点の１つが１平面上にない３本以上の支点に直接連なる部材によって連結され，不動点になっている時は，不動点を境にして，ラーメンを２つの部分にわけ，その各部分について，前述または後述の方法を適用する。不動点が２つ以上あっても取扱いはこれに準ずる。

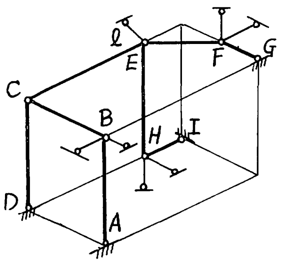
節点に集るどの３部材も１平面上にない場合は，支持リンクの位置方向を定め易い他の節点で先にきめてから，置換トラスメカニズムの全体的運動を考えて，残りの節点の支持リンクの方向を定めるとよい。この場合一応支持リンクの数は次に述べるように知ることができるから，一旦支持リンクを全部きめてから，その中の１本を外してみて運動の自由度１のメカニズムにしてみて，外の節点が支持リンクと直交する方向に移動するかあるいは全然移動しないですむか，直角変位図をかいてためしてみる。他の節点がどうしても上記以外の方向に運動しなくてはならないなら，独立部材角の独立性が保てないから，支持リンクのえらび方が悪かったことを示す。そこで新しい位置，方向を探す。支持リンクの数については，この場合

$$n=2j-1-\sum(m_i-2) \qquad (2)$$

但し m_i は３本以上（３本を含む）の部材が集る節点 i に集る部材数である。３本以上の部材が１平面上に存在し，且つその中２本以上の部材が不動点または支点に連結されている時は上式は適用できないで次式となる。

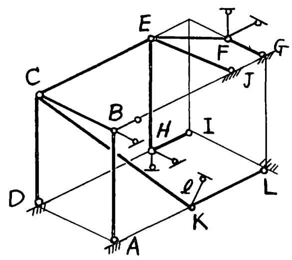
$$n=2j-1-\sum(m_i-p_i) \qquad (3)$$

但し p_i は i 節点で直接不動点または支点に連結されている部材数である。勿論場合によっては，(2)，(3) 式を一緒にして使わねばならないことも生ずる。2，3 の例を図 8 に示す。



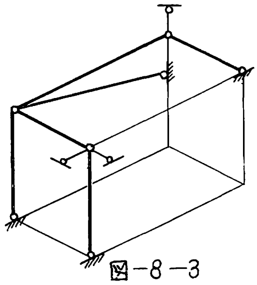
図−8−1

$n=2j-1-\Sigma(m_i-2)=2\times5-2(3-2)$
$=7$
lは面BCEFG内にあってEFに垂直



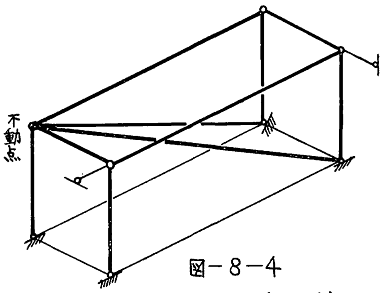
図−8−2

$n=2j-1-\Sigma(m_i-2)$
$=2\times6-1-(4-2)\times2$
$=7$
lは面CKLに直交



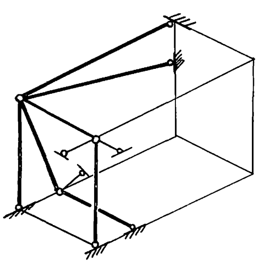
図−8−3

$n=2j-1-\Sigma(m_i-2)$
$=2\times3-1-(4-2)$
$=3$



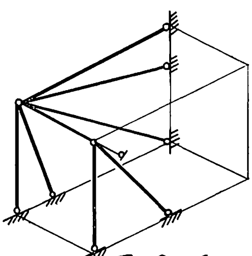
図−8−4

$n=2j-1-\Sigma(m_i-2)-\Sigma(m_i-p_i)$
$=2\times4-1-(3-2)\times3-(5-3)$
$=2$
又は不動点を考えて
$n=2j-1-\Sigma(m_i-2)$
$=2\times3-1-(3-2)\times3$
$=2$



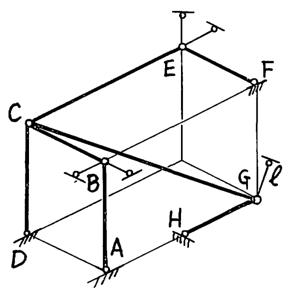
図−8−5

$n=2j-1-\Sigma(m_i-p_i)$
$=2\times3-1-(5-3)$
$=3$



図−8−6

$n=2j-1-\Sigma(m_i-p_i)-\Sigma(m_i-2)$
$=2\times2-1-(6-5)-(3-2)$
$=1$



図−8−7

$n=2j-1-\Sigma(m_i-2)$
$=2\times4-1-(4-2)$
$=5$
lは面GEF上にあってGCと直交

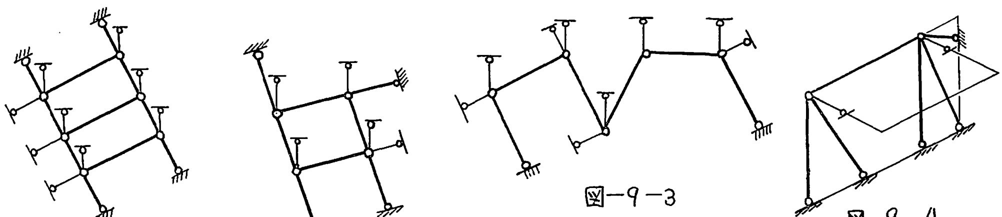
4.6 平面ラーメン 平面ラーメンが面外荷重を受ける時も立体ラーメンの場合と同様に置換トラスを考えて支持リンクの数，方向を定めることができる。この場合は数，方向共に立体ラーメンに較べて決定が簡単であり，支持リンクの方向は構面に垂直なものと面内のものとに大別できる。平面ラーメンの中間節点の数を j，面内荷重を受ける時の独立部材角の数を r とすると一般に

$$n=j+r \tag{4}$$

で表わされる。格子梁状のものに対しては（斜交する場合も含む）

$$n=j+q \tag{5}$$

が成立する。q は直接支点につながっていない部材列の数を示す。格子梁状でない平面ラーメンに対しては (2)，(3) 式を適用することもできる。例を図 9 に示す。



図−9−1 $n=j+q=6+3=9$

図−9−2 $n=j+q=4+1=5$

図−9−3 $n=j+r=5+4=9$ $=2j-1=2\times5-1=9$

図−9−4 $n=j+r=2+0=2$

5 応　　用

5.1 モーメント分配法に対する応用 モーメント分配法で立体ラーメンを解く場合，平面ラーメンの時と同じく，各独立部材角毎にある量の変形を起させ，ラーメンを変形させ，その際各節点の回転および考えている独立部材角に対応する以外の節点の移動を止めておいて，節点固定に必要な固定端モーメントを計算し，その固定端モーメントを解放する。その際各節点を変位しない様にするための支持力を計算するのであるが，これがいわゆる auxiliary force の計算である。これをすべての独立部材角毎に行なって auxiliary force system を算出し，auxiliary force system と外力との釣合から，独立部材角数に等しい連立一次方程式を立てる。次にそれを解いてから，ラーメンの各端モーメントを計算すると云うことになる。この際ある独立部材だけに変形を起させた時，どの節点にいかなる固定端モーメントが必要となるかを計算するのに，前記置換トラスを考えるとよい。つまり支持リンクによって支持された置換トラスは安定で不動である。今１本の支持リンクだけを取去ると，運動の自由度１のメカニズムになり，変形させることができる。この際この一次不安定トラスの取去ったリンクの支持していた節点の運動方向はそのリンクの方向のみに制限される（そのように支持リンクをえらんであるから）。それ故その節点を取去ったリンクの方向にある量だけ動かした時の（ラーメンが複雑でも殆んどの節点は支持リンクで固定されて不動であるか，支持リンクと直交する方向にしか動くことができないので割合簡単にかける）１次不安定トラスの直角変位図をかき，その際動いた部材の部材角を計算すればよい（今考えている取去った支持リンクに対応する独立部材角の函数として計算できる）。つぎにその計算した各部材角を引き起すに必要なだけの固定端モーメント（もちろん各節点の回転はとめておく）を計算する。またこの固定端モーメントを解放した後の auxiliary force の計算の際，その作用位置と方向は支持リンクによって指示されている。今の所この固定端モーメントの解放は節点に集る各部材の軸並びに部材断面の主軸が互いに直交あるいは平行している場合にのみ

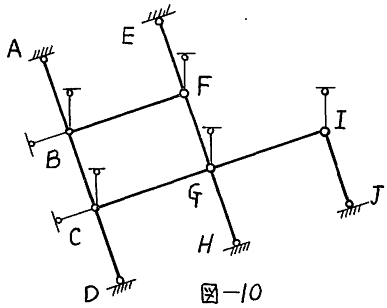
適用できる。

5. 2 たわみ角法に対する応用 立体ラーメンをたわみ角法によって解く時も，上述の置換トラスを支持リンクで支えた安定トラスより１本の支持リンクを取去った運動の自由度１の立体メカニズムを考える。そしてこれを運動させて変形を引き起した時の状態を，荷重を受けたラーメンを釣合系とみなして，これに仮想変位として与え，仮想仕事式を作ればこれが撓角法の部材方程式となる。また運動の自由度１のメカニズムを運動させた時起る各部材の部材角の値は，ラーメンが荷重を受けた時の各部材角を計算するのに使われる。この場合通常取外した支持リンクの独立部材角 R_i は１になるように変形をとり，この $R_i=1$ に対応する各部材の部材角を R_{ji} とする。すると荷重を受けた時のラーメンの部材角 R_j は次式で表わされる。

$$R_j=\sum_{i=1}^{n} R_{ji}R_i \qquad (5)$$

n は独立部材角の数である。

5. 3 格子梁について 格子梁の支持リンクは上述の通り $n=j+q$ で表わされ図 10 の場合 $n=5+2=7$ であり j は構面に垂直なリンクの数を示す。平面ラーメンの場合その面内の独立部材角のとり方は通常の面内荷重を受ける時と同じであるのでふれぬことにするが，面外の支持リンクに対応する独立部材角は丁度中間節点数に一致する。図 10 の場合，独立部材角を R_{AB}, R_{CD}, R_{EF}, R_{GH}, R_{IJ} にとると，これは丁度各節点に強制沈下を起させて auxiliary force system を計算する解法（文献 (1) の方法）に一致する。所が独立部材角のとり方は平面の場合そうであったように上述の通りだけでなく，例えば R_{AB}, R_{BC}, R_{FG}, R_{GH}, R_{GI} にとってもよいのである。



図−10

参　考　文　献

1) W. W. Ewell, S. Okubo and J. I. Abrams, 1952 "Deflections in Gridworks and slabs", Trans. ASCE, Vol. 117, p. 869-909.

2) James Michalos, 1958 "Theory of Structural Analysis and Design", The Ronald Press Company. New York. 402-419.

3) 具志幸昌 1954 撓角法による立体ラーメンの解法，東京工業大学卒業研究，(未発表).

4) 小野 薫，撓角法，紀元社.

Synopsis

Every deflection angle must be expressed in terms of independent deflection angles when a space rigid frame is to be solved by the moment distribution method or the slope deflection method.

This paper is a study on independent deflection angles of space rigid frames. Applying the concept of the transformed truss to space rigid frames, which is employed in solving the problems of plane rigid frames, the supporting links of transformed truss are re-evaluated and newly defined. And their utilization are indicated as follows;

1) Calculating of the number of the independent deflection angles in space rigid frames.

2) Expressing the deflection angles as a function of independent ones.

3) Selecting and establishing the auxiliary force systems in the method of moment distribution

4) Setting up the deflection angle equations in the slope deflection method.