

# 琉球大学学術リポジトリ

## Constant Coupling Approximations to Anisotropic Heisenberg Model

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2012-03-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: Matayoshi, Seitaro, Shinjo, Tsuneo, 又吉, 清太郎, 新城, 恒夫 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/20.500.12000/23673">http://hdl.handle.net/20.500.12000/23673</a>

## Constant Coupling Approximations to Anisotropic Heisenberg Model

Seitaro MATAYOSHI\* and Tsuneo SHINJYO\*

### Abstract

The Curie points  $T_c(\mu)$  as the function of anisotropic interaction parameter  $\mu$  are calculated by both the constant coupling and the improved constant coupling approximations.

$T_c(\mu)$  by these approximations decrease, as the parameter  $\mu$  increases, with similar tendencies on the whole. Especially in two dimensional system, the Curie points become  $T_c = 0$  and  $dT_c/d\mu =$  infinity at  $\mu = 1$ .

The short range orders are investigated to understand the physical meaning of the sudden change in the neighbourhood of  $\mu = 1$ .

The effect of the second neighbour anisotropic exchange interaction on the curie point is studied by two approximations mentioned above.

It is obtained that the occurrence of the order in this anisotropic system is enhanced if the second neighbour exchange interaction parameter is ferromagnetic, and is suppressed if antiferromagnetic, as in the isotropic system.

The Curie points calculated by these two approximations are in contradiction to the rigorous theory in the isotropic low dimensional systems.

Discussions are given how to overcome the faults in these approximate methods.

It is carried out to extend the theorem due to Mermin and Wagner into the anisotropic Heisenberg model with finite range interactions.

### §1. Introduction

磁性イオンスピン間の相互作用, すなわち, 交換相互作用はスピンについて等方的であるが, イオン内のスピン軌道相互作用をも考慮して, 拡張すると, 二つのスピンのベクトル積に比例した反対称型の Dzyaloshinski-Moriya 相互作用<sup>1),2)</sup> や, 方向によって有効スピンの大きさの異なる異方性交換相互作用<sup>3)</sup> などが得られる。

---

Received : October 30, 1978

\*Dept. of Phys., Sci. & Eng. Div., Univ. of the Ryukyus.

ここでは、一軸性の異方性交換相互作用

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= -2 \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \hat{J} \mathbf{S}_j \\ &\equiv -2 J \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ \lambda S_i^x S_j^x + \mu (S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

を研究する。ただし、 $\mathbf{S}_j$  は  $j$  格子点上のスピン演算子であり、 $\lambda$  と  $\mu$  は異方性パラメーターである。 $J$  はスピン軌道相互作用の影響を考慮していない場合の“等方的”交換相互作用パラメーターで、正の量であるものとする。

$\sum_{\langle ij \rangle}$  は結晶中のすべての最隣接格子点対についての和である。

Ising型交換相互作用 ( $\lambda = 1, \mu = 0$ ) や Heisenberg型交換相互作用 ( $\lambda = \mu = 1$ ) の研究に比較して、一般の異方性交換相互作用についての研究は、はるかに少ない。

Obokata, Ono and Oguchi<sup>1)</sup> は susceptibility  $\chi$  を高温展開し、この結果に Pade' 近似を応用して、Curie point  $T_c$  を推定した。それによると、異方性交換相互作用の場合 ( $\lambda \neq \mu$ ) には Pade' 近似の収束性は良いが、等方的な場合 ( $\lambda \approx \mu$ ) には悪い。

Jasnow and Wortis<sup>2)</sup> は classical な異方性交換相互作用で、spin pair correlation をやはり高温展開法で計算し、ratio method と Pade' 近似により、種々の物理量の critical exponent を求めた。彼等は critical exponent が異方的な系 ( $\lambda > \mu$ ) では一定であるが、等方的な系 ( $\lambda = \mu$ ) になると突然変化するという興味深い結果になることを指摘した。

Kawasaki and Mori<sup>3)</sup> は二時間 Green 関数法に、R.P.A. を使って、static spin pair correlation や susceptibility を計算し、これらの量が、異方的な系と等方的な系とでは、大きく異なることを示した。

Dalton and Wood<sup>4)</sup> も前述のように、Pade' 近似や R.P.A. を使って、やはり、critical behaviour を研究した。critical exponent のふるまひは、Jasnow 等の結果と同じ傾向のふるまいであった。ただ、R.P.A. による Curie point  $T_c$  は Pade' 近似によるものとは異なり、異方的な場合 ( $\lambda > \mu$ ) から等方的な場合 ( $\lambda = \mu$ ) まで、当然のことながら、きちんとした値として求められる (収束性がよい)。

この R.P.A. による  $T_c$  に注目すべきことがある。それは二次元系の等方的な近傍 ( $\lambda \approx \mu$ ) で、急激に減少して、zero になることである (図 I 参照)。

Matayoshi<sup>5)</sup> はこの Curie point  $T_c$  を低次元で、R.P.A. と Callen 近似<sup>11)</sup> で計算し直し、二、三、の厳密理論と比較することにより、近似理論の検討を行なった。結果は、Ising model 近傍 ( $\lambda = 1, \mu \approx 0$ ) で近似理論は最も悪くなるということであり、この近傍で近似を良くすることが重要であると指摘した。

Kasteleijn and Van Kranendonk<sup>6)</sup> は Oguchi の有効ハミルトニアン<sup>10)</sup> におけるパラメーター  $\bar{S}$  の意味を解釈し直し (Oguchi は  $\bar{S} = \langle \vec{S}^2 \rangle$  としてあつかった)、変分パラメーターとみなして自由エネルギーを計算し、これを最小にするという条件から、 $\bar{S}$  についての self-consistent equation を得た。

この近似-constant coupling 近似を Ising model に応用すると Bethe 近似<sup>10)</sup> と同じ結果を与える。従って、R.P.A. や Callen 近似<sup>11)</sup> が Ising model に応用されると Weiss の分子場近似<sup>12)</sup> と同等になる<sup>8)</sup> ことを考えれば、constant coupling 近似はより良い近似法だと言える。ただし、低温領域では collective mode をうまく表現できないので悪くなる。今後、我々の関心を一応  $T \approx T_c$  に限定する。

Bethe近似では、 $(Z + 1)$ 体問題 ( $Z$ は最近接格子点の数) をあつかわねばならないのに、constant coupling近似では2体問題ですむ。そのうえ、任意の $\lambda$ と $\mu$ について殆んど同じ結果を与える<sup>10)</sup>。従って、constant coupling近似はBethe近似に比べて、優れた方法であると言える。それにもかかわらず、constant coupling近似法における自由エネルギーの計算には、尚、多くの労力を要する。

Strieb, Callen and Horwitz<sup>11)</sup>はハミルトニアン(1)についての自由エネルギーにパラメーター $S = S_i^z - \sigma_i$ をもちこんでcluster expansionし、 $S$ について変分した。2個のspinまで考慮する近似はconstant coupling近似と同等である。しかも、このconstant coupling近似と同等になる $\bar{S}$ を決定するための最終の表式は単純である。すなわち、Oguchiの2体有効ハミルトニアン<sup>16)</sup>で定義されるdensity matrixは一個のspinについて縮約されると、Weissの一体有効ハミルトニアンで定義されるdensity matrixに等しいという表式である。この単純化された式から出発すると、計算も少い労力ですむ。

我々は、この計算方法をも、今後、constant coupling近似法と呼ぶことにしよう。

Oguchi and Ono<sup>10)</sup>は異方性交換相互作用を前述のconstant coupling近似で研究した。critical exponentはPade'近似やR.P.A.によるものとは異なって、異方性パラメーター $\mu$ には無関係で、一定である。

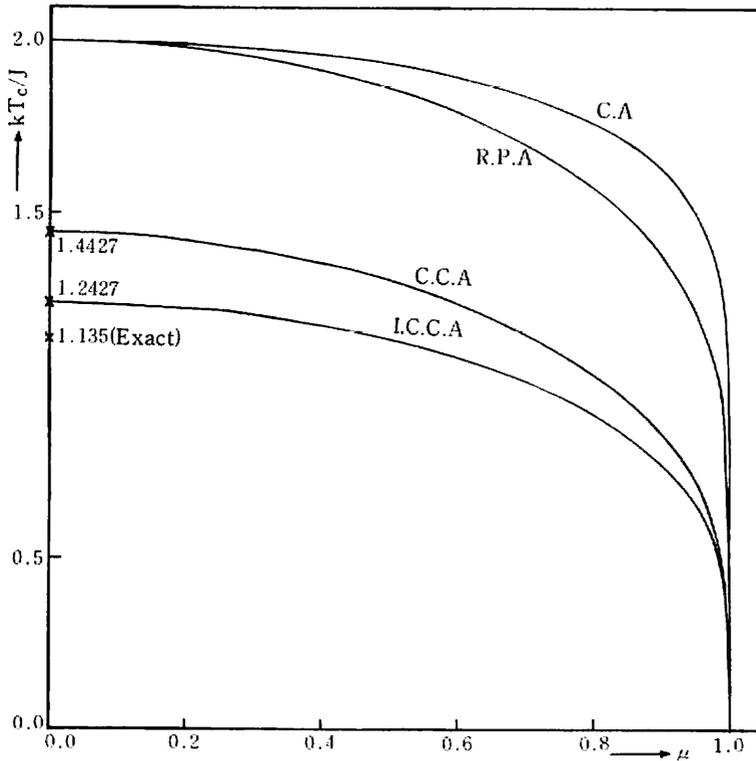
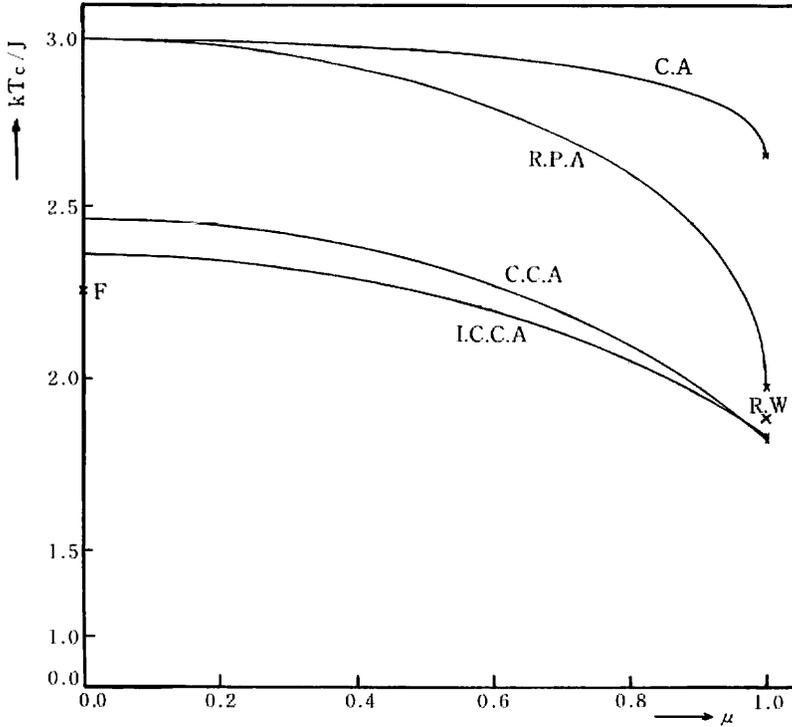


図1 two dimensional anisotropic Heisenberg model ( $Z=4; \lambda=1, 0 \leq \mu \leq 1$ ) のC.C.A.とI.C.C.A.によるCurie point  $T_c(\mu)$ 。R.P.A.<sup>7)</sup>とC.A.<sup>8)</sup>による $T_c(\mu)$ も比較のためにのせた。縦軸は $kT_c/J$ 、横軸は異方性パラメーター $\mu$ である。 $\mu=0$ のときは、Ising model,  $\mu=1$ のときはHeisenberg modelにそれぞれ対応する。



図II three dimensional anisotropic Heisenberg model ( $Z=6: \lambda=1, 0 \leq \mu \leq 1$ ) の Curie point  $T_c(\mu)$ 。以下、図 I についての説明と同じである。

我々は異方性交換相互作用についての研究の流れを一瞥してみたが、等方的系の近傍 ( $\lambda \approx \mu$ ) における critical behavior の特異なふるまいに関心が向かざるを得ない。すなわち、R.P.A. などの近似による結果は等方的系の近傍 ( $\lambda \approx \mu$ ) で突然又は急激の変化をするということに興味をもつ。同時に、その物理的な意味についても興味がある。

この論文では、R.P.A. や Callen 近似とその近似方法 (近似精神) を異にする constant coupling 近似とその改良された近似をとりあげて、この問題にとりくんだ。

まず、 $T_c$  について言うならば、これらの4種の近似法による結果は類似の傾向を示した。特に、二次元正方格子 ( $Z=4$ ) の  $T_c$  の  $\lambda \approx \mu$  近傍における急激な変化の仕方の類似性は著しい。

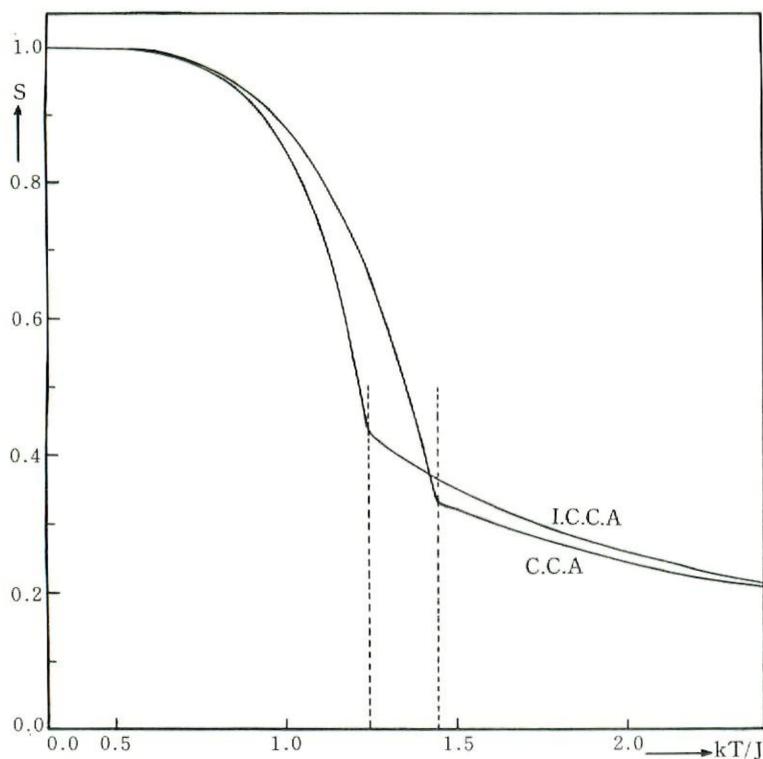
この  $T_c$  の激しいふるまいを理解するため short range order  $S$  を計算した。

この結果が、我々に、教えてくれることは、short range order が著しく発達しているということである。このことが  $T_c$  に強く影響して、そのような  $T_c$  のふるまいができたのだと考えざるを得ない。

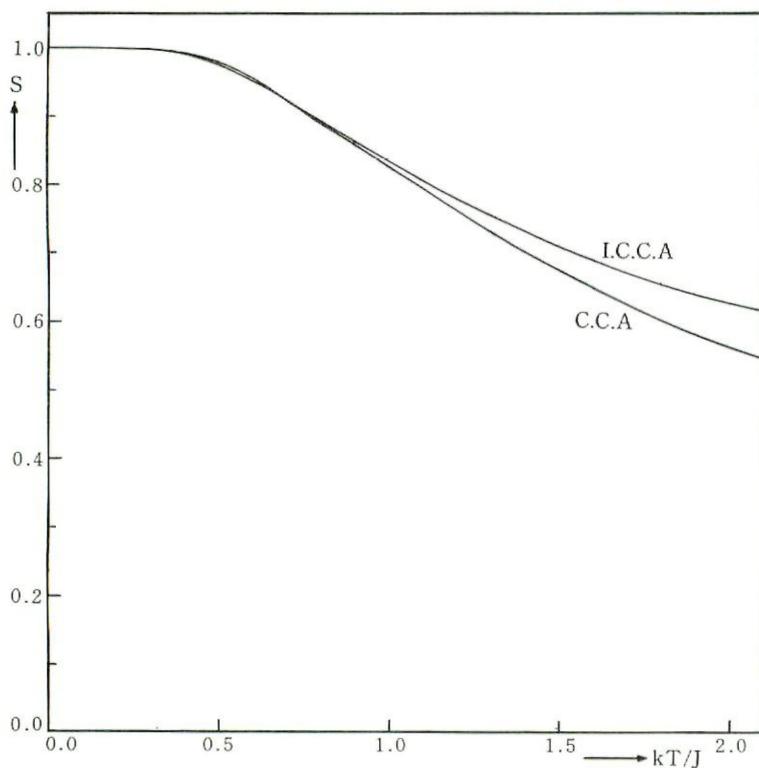
以上のことに反して、susceptibility  $\chi$  などの critical exponent には類似の傾向はでてこなかった。

Ising model では第二近接交換相互作用の影響についての研究は、数多くなされているが、等方的モデルでは少い。まして、一般の異方的モデルでは著者の知る限り、皆無に等しい。

Fujishiro, Takano and Oguchi<sup>15)</sup> は等方的なモデルでの第二近接交換相互作用の影響を constant coupling 近似で研究した。



図III two dimensional Ising model ( $Z=4$ ) についての short range order  $S$ 。C.C.A.とI.C.C.A.で計算した。縦軸は $S$ 、横軸は $kT/J$ である。変曲点は Curie point に対応する。



図IV two dimensional Heisenberg model ( $Z=4$ ) についての short range order  $S$ 。変曲点は Curie point に対応しない。以下、図IIIの説明と同じである。

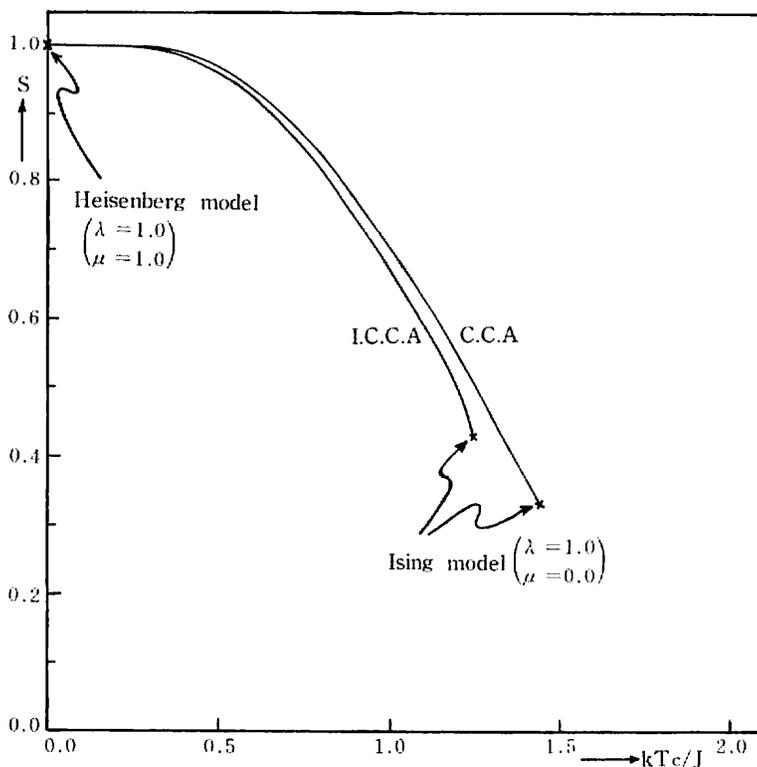


図 V two dimensional anisotropic Heisenberg model ( $Z=4 : \lambda=1.0, 0 \leq \mu \leq 1$ ) についての  $T_c(\mu)$  における short range order  $S$ 。縦軸は  $S$ ，横軸は  $kT_c(\mu)/J$  である。

この方法には Watson 積分などはでてこないのので，計算は容易であるという利点がある。

我々は，この constant coupling 近似と improved constant coupling 近似で，異方的なモデルにおける第二近接交換相互作用の Curie point  $T_c$  に対する影響を調べた。

等方的なモデルのときと同じように，第二近接交換相互作用パラメーターが強磁性的な場合 ordering state の形成は助けられ，反強磁性的の場合には妨げられる。

低次元の等方的なモデルで Mermin and Wagner の定理に反するような問題の存在することが指摘される。

以上のような理由で，我々の主要な興味の対象は低次元の系の問題にある。

§ 2 では Constant coupling 近似と improved constant coupling 近似で Curie point  $T_c$  やこの近傍での susceptibility  $\chi$  などを計算する。§ 3 では同じ方法で第二近接交換相互作用の  $T_c$  への影響を調べる。

§ 4 では求められた結果に基づいて，我々が問題にしていることを議論する。第二近接交換相互作用についての新しいとり扱い方も論ずる。Appendix では Mermin and Wagner の定理を finite range interaction についての異方的なモデルの場合に拡張する。

§2. Formulations and Results by Constant Coupling and Improved Constant Coupling Approximations.

Oguchi and Ono<sup>10)</sup>の方法と結果を要約する。

まず、一体と二体の有効ハミルトニアンとして、次のものをとる（以後、簡単のため  $S = \frac{1}{2}$  とする）。

$$\mathfrak{H}_I = -2 C_1 S_1^z \equiv -2 \left( ZJ\lambda \bar{S} + \frac{1}{2} g\mu_B H \right) S_1^z \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{II} = & -2 S_1 \hat{J} S_2 - 2 C_2 \left( S_1^z + S_2^z \right) \equiv -2 J \left\{ \lambda S_1^z S_2^z + \frac{1}{2} \mu \left( S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+ \right) \right\} \\ & - 2 \left\{ \left( Z - 1 \right) J \lambda \bar{S} + \frac{1}{2} g\mu_B H \right\} \left( S_1^z + S_2^z \right) \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、便宜上 notation などは多少 Oguchi and Ono のものからかえてある。

$\bar{S}$  は self-consistent equation によって決定されるべき、“変分パラメーター”である。 $g$  は,  $g$ -factor,  $\mu_B$  は magnetic moment,  $H$  は外場である。その他の記号は § 1 に定義しておいた。この一体や二体の問題は容易に解けるので、これから定義される density matrix も容易に求められる。 $\bar{S}$  についての self-consistent equation は、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} T_{r(2)} \rho_{II} &= \rho_I & (3) \\ \rho_I &\equiv e^{-\beta \mathfrak{H}_I} / T_r e^{-\beta \mathfrak{H}_I} \\ \rho_{II} &\equiv e^{-\beta \mathfrak{H}_{II}} / T_r e^{-\beta \mathfrak{H}_{II}} \end{aligned}$$

ただし、 $T_r$  はハミルトニアンに含まれている全てのスピンについての縮約を意味し、 $T_{r(2)}$  はハミルトニアンの中の格子点 2 にあるスピン  $S_2$  についてだけの縮約を意味するものとする。

結果は次の通りである。

$$th\beta c_1 = \frac{sh 2 \beta c_2}{ch 2 \beta c_2 + e^{-\beta J \lambda} ch \beta J \mu}$$

ここで、 $H \rightarrow 0$ ,  $\bar{S} \rightarrow 0$  とおけば Curie point  $T_c \equiv 1/k\beta c_c$  を定める式が得られる。

$$e^{-\beta c_c \lambda} ch \beta c_c J \mu = \frac{Z - 2}{Z} \tag{4}$$

又、magnetization  $\sigma$  や parallel susceptibility  $\chi$  は、 $H \rightarrow 0$  において

$$\sigma \propto \begin{cases} \sqrt{T_c - T} & \text{for } T \lesssim T_c \\ 0 & \text{for } T > T_c \end{cases} \tag{5}$$

$$\chi \propto \begin{cases} \frac{1}{T_c - T} & \text{for } T \lesssim T_c \\ \frac{1}{T - T_c} & \text{for } T > T_c \end{cases} \tag{6}$$

となる。

short range order  $S$

$$S = \frac{4}{J} T_r S_1 \hat{J} S_2 \rho_{11}$$

は最大値が1になるように定義してあり、結果は、次の通りになる。

$$S = \frac{\lambda ch 2 \beta c_2 - \lambda e^{-\beta J \lambda} ch \beta J \mu + 2 \mu e^{-\beta J \lambda} sh \beta J \mu}{ch 2 \beta c_2 + e^{-\beta J \lambda} ch \beta J \mu} \quad (7)$$

$\sigma$ や $S$ が求まると、系のenergy  $E$ は直ちにだせる。 $H \rightarrow 0$ とすると

$$E = \begin{cases} a - b(T_c - T) & \text{for } T \lesssim T_c \\ a + c(T - T_c) & \text{for } T \gtrsim T_c \end{cases} \quad (8)$$

であり、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ は温度 $T$ には無関係な正の定数である。Oguchi and Ono<sup>10)</sup>はshort range order  $S$ や系のenergy  $E$ を算出してはいない。

Fujishiro, Takano and Oguchi<sup>10)</sup>は等方性交換相互作用を研究するために、constant coupling 近似を改良した“improved constant coupling approximation”を提案した。

ここで、“改良された近似”という意味はこういうことである。この“改良された近似”(以後I.C.C.A.と呼ぶ)で、三角形格子の $T_c$ を計算すると、厳密な値であるところの $T_c=0$ を得ることができるのに、constant coupling 近似(以後C.C.A.と呼ぶ)やその他の近似では $T_c \neq 0$ となってしまう。更に、二次元アイジングモデルにI.C.C.A.を応用するとC.C.A.によるものよりも厳密な $T_c$ にかなり近い値を与えるということなどが提案者達により指摘された(図1参照)。

以下に、I.C.C.A.による取り扱いを要約しよう。二次元正方格子、三次元単純立方格子、同じく三次元体心立方格子などを念頭におくとsmallest bond loopとして正四角形状に配列された4個のspinを選び出すことができる。smallest bond loopをとるのは、最隣接格子間相互作用をとりあげていることと、理論従って計算を単純化するためである。

smallest bond loopを構成している4個の格子点上のspinを $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$ で表わすと、有効ハミルトニアンは、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{IV} = & -2J(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_4 + S_4 S_1) \\ & -2C_3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$C_3 \equiv (Z-2)J\bar{S} + \frac{1}{2}g\mu_B H$$

記号の意味は前と同じである。この4体の有効ハミルトニアンは前に述べた1体や2体の有効ハミルトニアンを自然な拡張になっている。

この4体の有効ハミルトニアンから作られるdensity matrix  $\rho_{IV}$ を用いて、self-consistent equationを得るために、Fujishiro, Takano and Oguchi<sup>10)</sup>は、条件を

$$T_{r(2,3,4)}\rho_{IV} = \rho_I \quad (10)$$

とおかないで、次のようにおいた。

$$T_{\pi(3,4)}\rho_{IV} = \rho_{II} \tag{11}$$

ここで、 $\rho_I$ や $\rho_{II}$ はそれぞれ1体や2体の density matrix であり、 $T_{\pi(3,4)}$ は $S_3, S_4$ について縮約することを意味する。

(10)式から得られる独立な式の数、縮約されずに残っている spin の数が1個であるため1個である。これに対して、(11)式の場合は2個の spin が残っているので3個の独立な式を得る可能性がある。(注意、我々はこの論文で、 $S = \frac{1}{2}$ の場合だけを考えている。spin 1個の張る部分空間の次元数は2であり、2個の張る部分空間の次元数は $2^2 = 4$ である。従って、これらの部分空間から作られる density matrix の部分空間の次元数も同じであり、それぞれ、2や4になる。これに、density matrix の規格化を考慮すると、前に述べた(10)式や(11)式から得られる独立な条件の数はそれぞれ1や3になる。)

Fujishiro, Takano and Oguchi<sup>15)</sup>はこの事実に着目し(たのであろう?)て、(11)式の $\rho_{II}$ を作るための2体有効ハミルトニアンを

$$\mathfrak{H}_{II} = -2JS_1S_2 - 2C_2(S_1^z + S_2^z)$$

とおかないで、パラメーター $A, B$ を新たに2個導入し、合計3個にして、

$$\mathfrak{H}_{II} = -2AS_1S_2 - 2BS_1^zS_2^z - 2C_2(S_1^z + S_2^z)$$

$$C_2 = (Z-1)J\bar{S} + \frac{1}{2}g\mu_B H$$

とおいた。

このことの意味を一口で言うならば、“変分パラメーター”を1個の $\bar{S}$ から3個の $A, B, \bar{S}$ にふやして、近似の改良の可能性をねらったのであると言える。事実、前述したように、彼等のねらいどうりの改良された結果を得ることができた。

我々は、以下に、等方性交換相互作用についてのI.C.C.A.を異方性交換相互作用の場合に拡張する。等方的な場合のハミルトニアンの自然な拡張として、

$$\mathfrak{H}_{II} = -2S_1\hat{A}S_2 - 2B\lambda S_1^zS_2^z - 2C_2(S_1^z + S_2^z) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{IV} = & -2(S_1\hat{J}S_2 + S_2\hat{J}S_3 + S_3\hat{J}S_4 + S_4\hat{J}S_1) \\ & - 2C_3(S_1^z + S_2^z + S_3^z + S_4^z) \end{aligned} \tag{13}$$

のように、2体と4体の有効ハミルトニアンをおく。ここで、新たに入ってきた記号の意味をはっきりさせておこう。

$$S_1\hat{A}S_2 \equiv A \left\{ \lambda S_1^zS_2^z + \frac{1}{2}\mu(S_1^+S_2^- + S_1^-S_2^+) \right\}$$

$$C_2 \equiv (Z-1)J\lambda\bar{S} + \frac{1}{2}g\mu_B H$$

$$C_3 \equiv (Z-2)J\lambda\bar{S} + \frac{1}{2}g\mu_B H$$

この他は前に出てきたものと同じである。

$$T_{r(3,4)}\rho_{IV} = \rho_{II}$$

より出てくる独立な3個のself-consistent eqsと種々の結果をまとめておく。

$$\begin{aligned} & \frac{e^{2\beta c_2}}{2(ch2\beta c_2 + e^{-\beta\lambda(A+B)}ch\beta A\mu)} \\ &= \left\{ e^{2\beta(\lambda+2c_3)} + \frac{1}{4}e^{-\beta J\lambda}(ch\beta J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+8\mu^2}}sh\beta J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2}) \right. \\ &+ (1+ch2\beta J\mu)e^{2\beta c_3} + \frac{3}{4} \left. \right\} \left/ \left\{ 2e^{2\beta J\lambda}ch4\beta c_3 + e^{-2\beta J\lambda} \right. \right. \\ &+ 4(1+ch2\beta J\mu)ch2\beta c_3 + 2e^{-\beta J\lambda}ch\beta J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2} + 3 \left. \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\beta\lambda(A+B)}sh\beta A\mu}{2(ch2\beta c_2 + e^{-\beta\lambda(A+B)}ch\beta A\mu)} \\ &= \frac{-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+8\mu^2}}e^{-\beta J\lambda}sh\beta J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2}}{2e^{2\beta J\lambda}ch4\beta c_3 + 4(1+ch2\beta J\mu)ch2\beta c_3 + e^{-2\beta J\lambda} + 2e^{-\beta J\lambda}ch\beta J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2} + 3} \end{aligned} \quad (15)$$

(14)式で $C_2$ ,  $C_3$ をそれぞれ $-C_2$ ,  $-C_3$ でおきかえたものがもう一つの独立な式を与える。以上の式がパラメーター $A$ ,  $B$ ,  $\bar{S}$ を決定する式である。 $\bar{S}=0$ が常に解になっていることは、直ちにわかる。

Curie point  $T_c$  は

$$\begin{aligned} & \frac{2e^{2\beta c J\lambda} + ch2\beta c J\mu + 1}{e^{2\beta c J\lambda} + ch2\beta c J\mu + \frac{7}{4} + \frac{1}{4}e^{-\beta c J\lambda}(ch\beta c J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+8\mu^2}}sh\beta c J\sqrt{\lambda^2+8\mu^2})} \\ &= \frac{Z-1}{Z-2} \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。

magnetization  $\sigma$  や parallel susceptibility  $\chi$  は,  $H \rightarrow 0$ において,

$$\sigma \propto \begin{cases} \sqrt{T_c - T} & \text{for } T \lesssim T_c \\ 0 & \text{for } T > T_c \end{cases} \quad (17)$$

$$\chi \propto \begin{cases} \frac{1}{T_c - T} & \text{for } T \lesssim T_c \\ \frac{1}{T - T_c} & \text{for } T \gtrsim T_c \end{cases} \quad (18)$$

short range order  $S$  は

$$S = \left\{ \frac{2 \lambda e^{2\beta J \lambda} ch 4 \beta c_3 + 4 \mu sh 2 \beta J \mu ch 2 \beta c_3 - \lambda e^{-2\beta J \lambda} - \lambda e^{-\beta J \lambda} ch \beta J \sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2} + \sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2} e^{-\beta J \lambda} sh \beta J \sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2}}{2 e^{2\beta J \lambda} ch 4 \beta c_3 + e^{-2\beta J \lambda} + 4 (1 + ch 2 \beta J \mu) ch 2 \beta c_3 + 2 e^{-\beta J \lambda} ch \beta J \sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2} + 3} \right\} \quad (19)$$

この short range order  $S$  も最大値が 1 になるように normalization してある。  
energy  $E$  は

$$E = \begin{cases} a' - b' (T_c - T) & \text{for } T \lesssim T_c \\ a' + c' (T - T_c) & \text{for } T \gtrsim T_c \end{cases}$$

であり、 $a'$ 、 $b'$ 、 $c'$  は正の定数である。

以上に見たように、critical exponent は C.C.A. や I.C.C.A. の両方の取り扱いで、異方性パラメーター  $\mu$  に無関係である。むしろ Weiss の分子場近似と同じような結果になっている。

図 I は、二次元正方格子 ( $Z=4$ ) についての Curie point  $T_c$  のグラフである。縦軸は  $kT_c/J$  であり、横軸は異方性パラメーター  $\mu$  ( $\lambda=1$  とおいてある) である。参考のために、R.P.A.<sup>7)</sup> によるものと Callen 近似<sup>8)</sup> (C.A.) によるものも、あわせて載せてある。 $\mu=0$  のときの厳密な値  $kT_c/J=1.135$  は Wannier<sup>17)</sup> の表裏変換理論によるものであり、 $\mu=1$  のときの厳密な値  $T_c=0$  は Mermin and Wagner<sup>18)</sup> の定理によるものである。

図 II は、三次元単純立方格子 ( $Z=6$ ) についての Curie point  $T_c$  のグラフである。

$\mu=0$  のときの値  $kT_c/J=2.255$  は Fisher<sup>19)</sup> が ratio method によって推定した値であり、 $\mu=1$  のときの値  $kT_c/J=1.888$  は同様に、Rushbrooke and Wood<sup>20)</sup> によって推定された値である。

図 III より図 V までは、short range order  $S$  についてのグラフである。図 III と図 IV は、温度  $T$  についての変化をみたものである。図 III においては、 $T \leq T_c$  で long range order のできている様子が読みとれる。

図 V は、 $T_c(\mu)$  での short range order  $S$  をみたものである。

図 IV と図 V を見ると、等方的な系では、short range order  $S$  が相当大きく成長していることに気づく。

### §3. Effect of Second Neighbour Interaction on Magnetic Transition

Fujishiro, Takano and Oguchi<sup>15)</sup> は等方的な系 ( $\lambda = \mu = 1$ ) で, second neighbour interaction の Curie point  $T_c$  への影響を C.C.A. で研究した。

我々は, この同じ問題を, 異方的な場合に拡張し, C.C.A. と I.C.C.A. で研究する。

計算の仕方は前節と全く同じであるので, 理論展開の出発点となるハミルトニアンと結果だけを記すことにする。

まず, C.C.A. によるものから記すことにする。1 体と 2 体の有効ハミルトニアンは

$$\mathfrak{H}_1 = -2 (ZJ\lambda + Z'J'\lambda') \bar{S} S_1^z$$

$$\mathfrak{H}_2 = -2 S_1 \hat{J} S_2 - 2 \left\{ (Z-1)J\lambda + Z'J'\lambda' \right\} \bar{S} (S_1^z + S_2^z)$$

である。 $Z'$  は第二近接格子点の数であり,  $J'$  は, 系が等方的な場合の第二近接格子点にある spin からの交換相互作用であり,  $\lambda'$  はその異方性パラメーターであるが, 一般に  $\lambda \neq \lambda'$  であると仮定した。このハミルトニアンの特徴を簡単に言うならば, 第二近接 spin からの影響を "分子場的" に取り入れてあるということである。このハミルトニアンで  $\lambda = \mu = \lambda' = 1$  とおけば Fujishiro, Takano and Oguchi の有効ハミルトニアンになる。

Curie point  $T_c$  についての結果は

$$e^{-\beta_c J \lambda} ch \beta_c J \mu = \frac{(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda'}{ZJ\lambda + Z'J'\lambda'} \quad (20)$$

となる。この式で,  $J' \rightarrow 0$  とおけば, 当然のことながら, (4) 式に一致し,  $\lambda = \mu = \lambda' = 1$  とおけば Fujishiro, Takano and Oguchi の対応する式になる。

この式をくわしく吟味する前に, I.C.C.A. による Curie point  $T_c$  もだしておこう。

議論の出発点となる 2 体と 4 体の有効ハミルトニアンは

$$\mathfrak{H}_2 = -2 S_1 \hat{A} S_2 - 2 B \lambda S_1^z S_2^z \\ - 2 \left\{ (Z-1)J\lambda + Z'J'\lambda' \right\} \bar{S} (S_1^z + S_2^z)$$

$$\mathfrak{H}_4 = -2 \left( S_1 \hat{J} S_2 + S_2 \hat{J} S_3 + S_3 \hat{J} S_4 + S_4 \hat{J} S_1 \right) \\ - 2 \left\{ (Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda' \right\} \bar{S} (S_1^z + S_2^z + S_3^z + S_4^z)$$

である。このハミルトニアンの説明は必要ないであろう。Curie point  $T_c$  についての結果をいさなり書くことにする。

$$\frac{2 e^{2\beta_c J \lambda} + ch 2 \beta_c J \mu \pm 1}{e^{2\beta_c J \lambda} + ch 2 \beta_c J \mu + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} e^{-\beta_c J \lambda} \left( ch \beta_c J \sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2}} sh \beta_c J \sqrt{\lambda^2 + 8 \mu^2} \right)} \\ = \frac{(Z-1)J\lambda + Z'J'\lambda'}{(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda'} \quad (21)$$

この式で、 $J' \rightarrow 0$ とおけば、(16)式になる。

さて、Curie point  $T_c$ についての(4)式と(16)式のグラフでもある図Iと図IIを見てわかるように、(4)式の場合は右辺が大きいときに、又(16)式の場合は小さいときに大きなCurie point  $T_c$ を与える。

このことは、それぞれ同じ形式の式である(20)式と(21)式にも、そっくりあてはまる。このことに着目すると、第二近接交換相互作用からの影響についての考察は容易になる。

まず(20)式から考察する。

$$\frac{(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda'}{ZJ\lambda + Z'J'\lambda'} - \frac{Z-2}{Z} = \frac{2Z'J'\lambda'}{Z(ZJ\lambda + Z'J'\lambda')}$$

であるから、factor  $J'\lambda'$ の符号が右辺の符号になる。

すなわち

$$J'\lambda' > 0 \text{ ならば } \frac{(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda'}{ZJ\lambda + Z'J'\lambda'} > \frac{Z-2}{Z}$$

$$J'\lambda' < 0 \text{ ならば } \frac{(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda'}{ZJ\lambda + Z'J'\lambda'} < \frac{Z-2}{Z}$$

であるので、 $J'\lambda' > 0$ ならば第二近接交換相互作用でCurie point  $T_c$ は大きくなるし、 $J'\lambda' < 0$ ならば、小さくなる。

特に、 $J'\lambda' < 0$ のとき

$$(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda' = 0$$

が成立するならば、 $T_c = 0$ となる。

これはantiferro的な第二近接交換相互作用がferro的な第一近接交換相互作用を打ち消してしまったことを意味する。

ここで、一つ指摘しなければならないことが低次元の等方的な系( $\lambda = \mu = \lambda' = 1$ )の場合にある。

二次元の系で、 $J' > 0$ のとき、 $T_c > 0$ となる。一次元の系でも、 $J' > J$ のとき、 $T_c > 0$ となるが、これらは、Mermin and Wagner<sup>10)</sup>の定理によれば、 $T_c = 0$ であるので、否定されなければならない。

しかし、物理的には $J' > J$ となることはないので、一次元の場合は問題にする必要はないかも知れないが、二次元の場合は問題になるであろう。

(21)式についても同様の考察をすることができる。結論をいえば、 $J'\lambda' > 0$ ならば $T_c$ は大きくなるし、 $J'\lambda' < 0$ ならば小さくなる。

更に、 $J'\lambda' < 0$ のとき、

$$(Z-2)J\lambda + Z'J'\lambda' = 0$$

が成立するならば、 $T_c = 0$ となる。

低次元の等方的な系で、前述したような問題も起る。

さて、この低次元での問題をどう考えれば克服することができるであろうか。これについて、後に議論することにしよう。

#### § 4. Discussions and Concluding Remarks

我々は、図 I に示してあるように、二次元系の Curie point  $T_c(\mu)$  が " $\mu=1$  近傍で急激に変化して、zero になる" ということに興味をもつ。

それにしても、我々が得た  $T_c(\mu)$ <sup>7, 8)</sup> は全て近似的なものである。これらの近似の何らかの欠陥からでてきた fictitious な事柄であるかも知れぬという疑いが残る。

例えば、真実は  $\mu=0$  のときの厳密な値  $kT_c/J=1.135$  と  $\mu=1$  のときの厳密な値  $T_c=0$  とを直線で結んだものであるかも知れない。

" $T_c(\mu)$  は  $\mu=1$  の近傍で急激な変化をして zero になる" という事柄が、少なくとも定性的な傾向として真実である又は真実ではないということを確認める為に、我々はどうしたらよいのであろうか、或いは、どう考えたらよいのであろうか。これが、我々の設定した問題の一つである。

我々はこう考えた。近似精神の異なる他のいくつかの妥当な方法で、同一傾向の結論に達するならば、その結論は近似の個性に依存しているというよりは、むしろ、真実の事柄の表われ又は反映であると。ここで、"妥当な" という形容詞を使ったが、この言葉の意味をもう少しはっきりさせなければならない。近似精神さえ異なっているのであれば、どんな方法でもよいというわけではない。例えば、Weises<sup>9)</sup> の分子場近似は除外されるべきである。少なくとも現在知られている厳密な結果に一致するか、又は、全体的な傾向として近いといえなければならない。このような意味で "妥当な" という言葉を使ったのである。いわば、それぞれ個性をもち且参加する資格のある者による多数決によって、真理 (又はその反映) をつかもうという考え方である (物理的民主主義?)。

このような理由で、R.P.A. や C.A. と明らかに近似精神の異なる C.C.A. や I.C.C.A. をとりあげて、それぞれで  $T_c(\mu)$  を計算し、比較したのが図 I である。図 II は、三次元 ( $Z=6$ ) の場合で参考のために載せた。

図 I、図 II をとどうして、全体としての右下りの傾向は似ている。特に、二次元の場合、 $\mu=1$  の近傍での類似性は著しい。従って、二次元の系で " $T_c(\mu)$  は  $\mu=1$  の近傍で急激な変化をして、zero になる" という事はモデルハミルトニアン(1)に含まれている本質的な事の表われであると考えざるを得ない。

さて、次に問題になるのは、この事の物理的意味は何かということである。

我々は、これを調べるために short range order  $S$  を計算した。この結果が図 III から図 V までのグラフである。図の見方はそれぞれの箇所に説明してあるので、ここではくりかえさない。図 IV の二次元ハイゼンベルグモデルについての short range order  $S$  をみても、long range order  $\sigma$  は  $\sigma=0$  であるにもかかわらず、おどろく程に、成長発達している。このことは、long range order の存在する図 III と比較するならば、尚、はっきりとする。

殆んど、 $S \approx 1$  という温度領域がかなりひろい範囲にわたって存在するにもかかわらず、long range order は依然として  $\sigma=0$  である。この状態は、例えて言うならば、歴史上内乱状態にある民族が、地域別に地方別に統一が進行して民族全体の大統一がまさに生れようとしていて、天人共に熟しているとしてもいえばよいか? かかる秋であるからこそ、少しでも anisotropy が入ってくる (即ち、 $\mu$  が  $\mu=1$  より減少する) と、たちまち long range order が生れ、急速に成長するのである。このことの表われが図 I の  $T_c$  の急激な変化である。

ここで、我々は新たな問題を設定したくなる。この  $\sigma=0$ 、 $S \approx 1$  という状態の表われ方が、別の現象として存在してはいないかということである。

Stanley and Kaplan<sup>20)</sup> は spin の大きさ  $S$  が  $S \geq 1$  のときに, susceptibility  $\chi$  を高温展開 (項数は数項) し, これに ratio method を応用して項数が無限項まであるときのことを推定した。

注目すべきことに, 二次元のハイゼンベルグモデルにおいて, ある "有限温度" で  $\chi$  が発散するのを見出した。

彼等は, この "有限温度" 以下で "order" ができており, しかも  $\sigma = 0$  であるので, long range の order とは異なった或る新しい種類の ordering state であると解釈した。我々の C.C.A. や I.C.C.A. による susceptibility  $\chi$  には, このようなことはないけれども, 確かに Stanley and Kaplan の主張するような新しい種類の相転移現象が存在する可能性はある。それは, どのようなものなのか。"anti-ferromagnet" 的なものだろうか。そうかと言って, ただちに彼等の主張することに同調することはできない。

Ising model やその他の model で ratio method がよかったからといって, 二次元 Heisenberg model でもよいという保証はどこにもない。第一データがあまりにも少ない (高温展開による項の数) ので, 本当に特異性に関わる重要なデータを含んでいるのかどうか疑問が残る。更に, この同じ問題に ratio method に代わる Padé' 近似を応用すると収束しない<sup>4)</sup>。これは, 又, 何を意味するのであろうか。

Tahir-Kheli<sup>21)</sup> は spectral function で moment が保存するような decoupling scheme (S.C.M.C.D) を使って, first order two time Green function を求め, Stanley and Kaplan に支持を与えるような結果を得た。

しかしながら, 彼が指摘しているように, anisotropic parameter  $\lambda$  と  $\mu$  に関して,  $\lambda \neq \mu$  のとき, 彼の理論は不合理なことを起す。もし,  $\lambda = \mu$  のときに, 良い理論であるならば,  $\lambda \approx \mu$  のときにもそうであると期待するのは当然のことではないだろうか。従って, parameter のわずかなちがい  $\lambda \approx \mu$  に, 不合理なことの起る彼の理論には疑問が残るので, Stanley and Kaplan に支持を与えたということに同調できない。

これと等価な Mubayi and Lange<sup>22)</sup> 理論や Tahir-Kheli の使った S.C.M.C.D. による Ghosh<sup>24)</sup> の理論も検討の余地があり, Stanley and Kaplan に支持を与えたというには未だはやすぎる。更に, Stanley and Kaplan に支持を与えようとした Lines<sup>25)</sup> の理論についてもふれることにする。

first order Green function における理論とは, 要するに free magnon energy をどのように renormalization するかということである。renormalization factor を最も簡単な形に選んだのが R.P.A. である。

Mubayi and Lange や Tahir-Kheli はこれをできるだけ, self-consistent になるような形に設定した。

Lines は異方性交換相互作用のときも含め magnon energy の dispersion がどうあるべきかを物理的に考察して, renormalization factor を選んだ。

Lines の理論は本質をついているのかも知れない。それにしても, 近似理論であることにはまちがいないので, 確かなものと比較するという作業がなされないと, どのくらい信用してよいかかわからない。

二次元正方格子の Ising model についての Onsager の解によれば, short range order  $S$  は  $kT_c/J = 1.135$  で傾き  $dS/dT$  が大きく, 且この  $kT_c/J = 1.135$  の近傍で対称的である。

図 III のグラフには, それぞれの近似的  $kT_c/J$  で, それ程大きな傾き  $dS/dT$  もなく, 対称性もない。従って, C.C.A. や I.C.C.A. による critical exponent は悪い。おそらく, Heisenberg

model 近傍 ( $\lambda \approx \mu$ ) でも悪いだろう。

しかし、先に議論したように、Curie point そのものを求める近似法としてなら、C.C.A. や I.C.C.A. 法は良い。特に、I.C.C.A. 法は良い近似法である。 $\mu = 1$  では厳密値  $T_c = 0$  を与え、 $\mu = 0$  では、厳密値に一番近い値を与えるからである。

§ 3 において、C.C.A. と I.C.C.A. で、第二近接交換相互作用の  $T_c$  への影響を調べたが、reasonable な結果であった。

しかし、二次元 Heisenberg model ( $\lambda = \mu = 1$ ) で、本来  $T_c = 0$  であるべきものが、第二近接交換相互作用パラメーター  $J'$  が強磁性的である限り、 $T_c \neq 0$  となるという欠点があられた。これは、 $\mathfrak{H}_0$  に第二近接交換相互作用の影響を“分子場的”に取り入れたからであろう。

“分子場”は強い作用があつて、ゆらぎが小さい場合には比較的良い近似になるはずである。

これに対し、第二近接交換相互作用のような弱い作用に対して、分子場的な扱いをするのはその作用を過大に評価することになる。

逆説的に言うならば、第一近接交換相互作用に対して、分子場近似を使ったとしても、第二近接交換相互作用に対しては、bond 又は bond loop をとるべきであると考ええる。

§ 3 の理論を改良する可能性のある簡単なものとして、以下のものを考えてみる。

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1 &= -2 \left( ZJ\lambda\bar{S} + Z'J'\lambda'\bar{S} + \frac{1}{2}g\mu_B H \right) S_i^z \\ &\equiv -2 C_1 S_i^z \\ \mathfrak{H}_0 &= -2 \left\{ (J\lambda + J'\lambda') S_i^z S_j^z + \frac{J\mu + J'\mu'}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \right\} \\ &\quad - 2 \left\{ (Z-1)J\lambda\bar{S} + (Z'-1)J'\lambda'\bar{S} + \frac{1}{2}g\mu_B H \right\} (S_i^+ + S_i^-) \\ &\equiv -2 S_i \left( \hat{J} + \hat{J}' \right) S_j - 2 C_2 (S_i^+ + S_i^-)\end{aligned}$$

一体のハミルトニアンは、前出のものと同じであるが、二体のハミルトニアンは、ここで始めてる。この二体のハミルトニアンの特徴を簡単に述べると、第一近接交換相互作用  $\hat{J}$  が第二近接交換相互作用  $\hat{J}'$  の影響をうけて  $\hat{J}(1 + \hat{J}'^{-1}\hat{J}') = \hat{J} + \hat{J}'$  となっているということである。これは、§ 1 に述べたように、等方的な交換相互作用  $J$  がスピン軌道相互作用の影響をうけて、異方的な相互作用  $\hat{J}$  になったことに、形式的に類似している。

density matrix

$$\rho_1 \equiv e^{-\beta \mathfrak{H}_1} / \text{Tr} e^{-\beta \mathfrak{H}_1}$$

$$\rho_0 \equiv e^{-\beta \mathfrak{H}_0} / \text{Tr} e^{-\beta \mathfrak{H}_0}$$

に要請される self-consistent equation は前と全く同じで

$$T\mathfrak{H}_{(2)}\rho_0 = \rho_1$$

である。結果は、次のとうりになる。

$$th\beta C_1 = \frac{sh 2\beta C_2}{ch 2\beta C_2 + e^{-\beta(J\lambda + J'\lambda')} ch\beta(J\mu + J'\mu')}$$

Curie point  $T_c$ は

$$ZJ\lambda + Z'J'\lambda' = \frac{2(Z-1)J\lambda + 2(Z'-1)J'\lambda'}{1 + e^{-\beta C_2(J\lambda + J'\lambda')} ch\beta_r(J\mu + J'\mu')}$$

から求められる。この  $T_c$  についての式を簡単に吟味しよう。 $J' \rightarrow 0$  とおけば、(4)式になる。

一次元の系 ( $Z=Z'=2$ ) では、任意の anisotropic parameter に対して  $T_c=0$  となることがただちにわかる。

二次元の系 ( $Z=Z'=4$ ) でも  $J\lambda + J'\lambda' = J\mu + J'\mu'$  が成立するとき、 $T_c=0$  である。

この一次元と二次元の系において  $T_c=0$  となることは Mermin and Wagner<sup>10)</sup> の定理とその拡張 (Appendix 参照) とに consistent になっている。

上に述べたこと以外の一般の場合には、第二近接交換相互作用の働きは、それが ferro 的などときには  $T_c$  を大きくし、antiferro 的などときには小さくすることもわかる。

従って、以上の吟味により、この approach は § 3 の理論の改良になっている可能性がある。

この approach は、しかし、第一原理から導びかれたものではない。2時間 Green 関数の近似法における R.P.A. と同じように物理的考察で設定したものである。Fujishiro, Takano and Oguchi が I.C.C.A. を提案するとき主張したことを、ここでも、必要とするが長くなるので省略する。唯、この approach による  $T_c$  は Mermin and Wagner の定理とその拡張とに consistent になっていることを強調しておく。

### Acknowledgment

著者 (S.M. and T.S.) は manuscript を注意深く読んで、種々の助言を与えて下さった当物理教室の神里氏と丹慶氏に心より感謝したい。

### Appendix

Mermin and Wagner<sup>10)</sup> による long range order についての定理を anisotropic exchange interaction system の場合に拡張しよう。議論の出発点となるハミルトニアンを次のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -2 \sum_{\langle ij \rangle} S_i \hat{J} S_j - 2 \sum_{\langle i'j' \rangle} S_i \hat{J}' S_{j'} \\ & - g\mu_B H \sum_j S_j^z \end{aligned}$$

第二項は、second neighbour anisotropic exchange interaction で anisotropic parameter も一般に  $\lambda \neq \lambda'$ ,  $\mu \neq \mu'$  であると仮定した。 $\sum'$  は第二近接 spin pair について和をとることを意味する。この他の記号の意味は前と全く同じである。計算の便宜上格子空間内の spin  $S_j$  を波数空間内の spin  $S_k$  に Fourier 変換してから議論をすすめることにする。

Bogolyubov の不等式を利用するために統計平均量  $\langle [S_k^z, \mathcal{H}]_-, S_{-k}^- \rangle > 0$  の大きさをまず評価しよう。 $[A, B]_{\pm} \equiv AB \pm BA$  である。

$$\begin{aligned}
& \langle [[S_k^+, \mathbf{H}]_-, S_{-k}^-] \rangle \\
&= \left\{ \frac{4J}{N} \sum_{k'\rho} (\lambda - \mu e^{-i k \rho}) e^{i k' \rho} \langle S_k^z S_{-k'}^z \rangle + \frac{1}{4} \langle S_k^+ S_{-k} + S_k^- S_{-k}^+ \rangle \right. \\
&\quad + \frac{J}{N} \sum_{k'\rho} (\lambda - \mu) (1 + e^{-i k \rho}) \langle S_k^+ S_{-k}^- + S_k^- S_{-k}^+ \rangle \\
&\quad + \frac{2J}{N} \sum_{k'\rho} (\lambda - \mu) (1 + e^{-i k \rho}) (1 + e^{i k' \rho}) \langle S_k^z S_{-k'}^z \rangle \\
&\quad \left. - \frac{2J}{N} \sum_{k'\rho} (\lambda - \mu) (1 + e^{-i k \rho}) (1 + e^{i k' \rho}) \langle S_k^- S_{-k'} \rangle \right\} \\
&\quad + \left\{ J, \lambda, \mu, \rho \Rightarrow J', \lambda', \mu', \rho' \right\} + 2 g \mu_B H \langle S_0^z \rangle
\end{aligned}$$

第二項の curly bracket { } は第一項の curly bracket { } で  $J \rightarrow J'$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda'$ ,  $\mu \rightarrow \mu'$ ,  $\rho \rightarrow \rho'$  のような置き換えをすれば得られることを表わしている。  $\rho$  は最近接格子間のベクトル、  $\rho'$  は第二近接格子間のベクトルである。

さて、  $\lambda \geq \mu$  且  $\lambda' \geq \mu'$  ならば我々の統計平均の大きさを次のように評価することができる。

$$\begin{aligned}
\langle [[S_k^+, \mathbf{H}]_-, S_{-k}^-] \rangle &< \left\{ 4 NZJS(S+1)(\lambda - \mu \gamma_k) + 8 NZJS(S+1)(\lambda - \mu) \right\} \\
&\quad + \left\{ Z, J, \lambda, \mu, \gamma_k \Rightarrow Z', J', \lambda', \mu', \gamma_k' \right\} + 2 g \mu_B H \langle S_0^z \rangle
\end{aligned}$$

ただし、

$$\gamma_k = \frac{1}{Z} \sum_{\rho} e^{i k \rho}, \quad \gamma_k' = \frac{1}{Z'} \sum_{\rho'} e^{i k \rho'}$$

同様の議論で  $\lambda < \mu$  且  $\lambda' < \mu'$  の場合にも大きさが評価できる。

$$\begin{aligned}
& \langle [[S_k^+, \mathbf{H}]_-, S_{-k}^-] \rangle \\
&< \left\{ 4 ZNJJS(S+1)(\mu - \lambda \gamma_k) + 16 NZJS(S+1)(\mu - \lambda) \right\} \\
&\quad + \left\{ Z, J, \lambda, \mu, \gamma_k \Rightarrow Z', J', \lambda', \mu', \gamma_k' \right\} + 2 g \mu_B H \langle S_0^z \rangle
\end{aligned}$$

この評価した不等式を Bogolyubov の不等式から導かれる関係式

$$\frac{1}{2} \sum_k \langle [S_k^+, S_{-k}^-]_+ \rangle \geq k T \sum_k \frac{|\langle [S_k^+, S_{-k}^-]_- \rangle|}{\langle [[S_k^+, \mathbf{H}]_-, S_{-k}^-] \rangle}$$

に利用する。更に、

$$\frac{1}{2} \sum_k \langle [S_k^+, S_{-k}^-]_+ \rangle < N^2 S(S+1)$$

$$kT \langle [S_k^+, S_{-k}^-] \rangle^2 = 4kTN^2\sigma^2$$

に注意すると、次の結果を得る。

(i) 一次元

$$\sigma^2 < \frac{2\pi S(S+1)}{kT} \frac{\sqrt{(A+\Delta)B_1}}{\tan^{-1}\left(k_0 \sqrt{\frac{B_1}{A+\Delta}}\right)}$$

(ii) 二次元

$$\sigma^2 < \frac{4\pi S(S+1)}{kT} \frac{B_2}{\ln\left[1 + \frac{B_2 k_0^2}{A+\Delta}\right]}$$

(iii) 三次元

$$\sigma^2 < \frac{2\pi^2 S(S+1)}{kT} \frac{B_3}{k_0 - \sqrt{\frac{A+\Delta}{B_3}} \tan^{-1}\left(k_0 \sqrt{\frac{B_3}{A+\Delta}}\right)}$$

ここで、

$$A/S(S+1) = \begin{cases} 3ZJ(\lambda-\mu) + 3Z'J'(\lambda'-\mu') & \text{for } \lambda \geq \mu \text{ and } \lambda' \geq \mu' \\ 5ZJ(\mu-\lambda) + 5Z'J'(\mu'-\lambda') & \text{for } \lambda < \mu \text{ and } \lambda' < \mu' \end{cases}$$

$B$ は正の量であるが、議論には直接関係しないので、具体的な形には興味ない。積分は第一 Brillouin zone に内接する半径  $k_0$  の球内(二次元のときは円、一次元のときは第一 Brillouin zone 全域)で行なった。

外場  $\Delta = \frac{1}{2}g\mu_B H$  が zero になると低次元で  $A=0$  のとき、long range order  $\sigma$  は zero になる。即ち、一次元と二次元で

$$ZJ(\lambda-\mu) + Z'J'(\lambda'-\mu') = 0$$

が成立するとき、Curie point  $T_c$  は zero になる。この結果は、third neighbour interaction, fourth neighbour interaction 等がある場合にも容易に拡張できる。

$$ZJ(\lambda-\mu) + Z'J'(\lambda'-\mu') + Z''J''(\lambda''-\mu'') + \dots = 0$$

しかし、この等式が成立していなくても、long range order が zero、従って Curie point  $T_c$  が zero になる可能性は残っている。

### References

- 1) I. Dzyaloshinski : J. Phys. Chem. Solids 4 (1958) 241.
- 2) T. Moriya : Phys. Rev. Letters 4 (1960) 228.
- 3) T. Moriya and K. Yoshida : Progr. Theor. Phys. 9 (1953) 663.
- 4) T. Obokata, I. Ono and T. Oguchi : J. Phys. Soc. Japan 23 (1967) 516.
- 5) D. Jasnow and M. Wortis : Phys. Rev. 176 (1968) 739.
- 6) K. Kawasaki and H. Mori : Progr. Theor. Phys. 28 (1962) 690.

- 7) N.W.Dalton and D.W.Wood : Proc. Phys. Soc. **90** (1967) 45.
- 8) S.Matayoshi : 琉大理工学部紀要理学篇No.26 (1978) 9.
- 9) P.W.Kasteleijn and J.Van Kranendonk : Physica **22** (1956) 317.
- 10) H.A.Bethe : Proc. Roy. Soc. **A150** (1935) 552.
- 11) H.B.Callen : Phys. Rev. **130** (1963) 890.
- 12) P.Weiss : J.Phys. Radium **4** (1907) 661.
- 13) B.Strieb, H.B.Callen and G.Horwitz : Phy. Rev. **130** (1963) 1798.
- 14) T.Oguchi and I.Ono : J.Phys. Soc. Japan **21** (1966) 2178.
- 15) T.Fujishiro, F.Takano and T.Oguchi : J.Phys. Soc. Japan **19** (1964) 1666.
- 16) T.Oguchi : Progr. Theor. Phys. **13** (1955) 148.
- 17) G.H.Wannier : Rev. Mod. Phys. **17** (1945) 50.
- 18) N.D.Mermin and H.Wagner : Phys. Rev. Letters **17** (1966) 1133.
- 19) M.E.Fisher : Rep. Progr. Phys **30** (1967) 615.
- 20) G.S.Rushbrooke and P.J.Wood : Mol. Phys. **1** (1958) 257.
- 21) H.E.Stanley and T.A.Kaplan : Phys. Rev. Letters **17** (1966) 913.
- 22) R.A.Tahir--Kheli : Phys. Rev. **B1** (1970) 3163.
- 23) V.Mubayi and R.V.Lange : Phys Rev **178** (1967) 882.
- 24) D.K.Ghosh : Phy. Rev **B8** (1973) 392.
- 25) M.E.Lines : Phys. Rev. **B3** (1971) 1750.