正方形断面棒の弾塑性捩り

正方形断面棒の弾塑性振り†

真喜志　康　二*
宮　城　清　宏*
兼　城　英　夫*

On the Elastic-Plastic Torsion of a Bar of a Square Cross Section

Yasuji MAKISHI
Kiyohiro MIYAGI
Hideo KANESHIRO

To take a step of the research for the elastic-plastic problems authors take the torsion of a shaft of a square cross section which is easier in the application of the numerical analysis. To obtain the approximate solution within the elastic limit the fundamental partial differential equation of the torsion can be transformed into the finite-difference equation and to get better accuracy the relaxation method applied.

By placing the square net over the cross section of the bar authors obtain the resultant shearing stress and the twisting moment within elastic limit and over it by the application of the relaxation method and descrives the elastic-plastic boundary when a plastic deformation takes place somewhere in its cross section.

1. 緒　言

材料力学の分野において，電子計算機の出現に伴ない急速に研究対象として取り扱われるようになったものの一つに，一様断面棒の弾塑性振り問題が挙げられる。本報では弾塑性振り問題の初歩的研究として，断面形状が比較的簡単で数値解析の適用しやすい正方形断面棒について，振りの基礎偏微分方程式を差分方程式でおきかえ，正方形断面上に正方形網目を設定し，弛緩法によりその弾塑性振りの挙動を近似的に解析した。

2. 弾性振り

弾性状態における一様断面棒の振り問題は，u，v，wをx，y，z軸方向の変位，θを単位長さ当りの振れ角とすれば，サンブナンの半逆解法[1)]により

$$\left.\begin{aligned} u &= -\theta z y \\ v &= \theta z x \\ w &= w(x, y, \theta) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

なる仮定より出発する。従って，横断面上の任意点における剪断応力成分 τ_{zx}，τ_{zy} は

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta y\right) \\ \tau_{zy} &= G\gamma_{zy} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta x\right) \end{aligned} \tag{2}$$

で，また断面周辺上においては

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial y} + \theta x}{\dfrac{\partial w}{\partial x} - \theta y} \tag{3}$$

なる関係式を満足しなければならない。

一方，振り問題においては応力の平衡方程式は

†受付：1971年9月30日
*琉球大学理工学部機械工学科

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}=0 \tag{4}$$

となり，従っていまϕを捩りの応力函数とすれば

$$\tau_{zx}=\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy}=-\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{5}$$

なる関係式があるから，この式と(2)式とから偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=-2G\theta \tag{6}$$

が得られる。また断面周辺においては捩りの応力函数ϕは

$$\phi=0 \tag{7}$$

を満足していなければならないし，加えられたトルクTとϕとの間には

$$T=2\int_A \phi \, dA=2\iint \phi \, dx \, dy \tag{8}$$

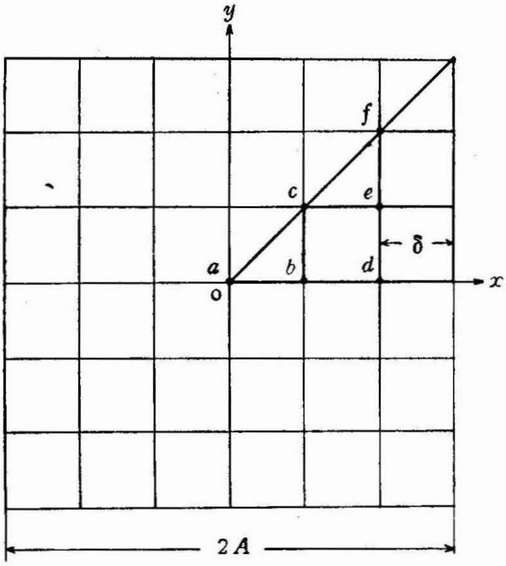

Fig.1

なる関係が存する。以上のことから断面全体が弾性状態にある場合の捩りの問題は，(6)式なるポアソンの方程式を満足し，かつ断面周辺で(7)式を満足する応力函数ϕを見い出すことに帰着する。

正方形断面棒の捩り問題は旧知の問題であるが，本報では弛緩法によって正方形断面棒の捩りの近似解を求めてみる。弛緩法を適用して問題解決にあたる場合は，最初に第0次近似解を仮定して残留値を求め，それを逐次清算していかなければならない。その際の収束の遅速は第0次近似解の選定に左右される。図1に示す一辺2Aの正方形断面棒の捩り問題を弛緩法によって解くにあたって，我々は最終的には一辺の長さを24等分した正方形格子を用いたのであるが，その際における第0次近似解としては，一辺の長さを6等分，従って格子間$\delta=A/3$なる場合の各格子点におけるϕを(6)式の階差方程式より求め，それらの値を4等分して最終的な24等分の場合の第0次近似値とした。

従って，最初に図1に示すように断面を$\delta=A/3$なる正方形格子に細分すれば，格子点a，b，c，d，e，fにおける(6)式の階差表示は[2]

$$\left.\begin{aligned}
&4\phi_b-4\phi_a+2G\delta\theta^2=0\\
&\phi_a+\phi_d+2\phi_c-4\phi_b+2G\theta\delta^2=0\\
&2\phi_b+2\phi_e-4\phi_c+2G\theta\delta^2=0\\
&\phi_b+2\phi_e-4\phi_d+2G\theta\delta^2=0\\
&\phi_c+\phi_d+\phi_f-4\phi_e+2G\theta\delta^2=0\\
&2\phi_e-4\phi_f+2G\theta\delta^2=0
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

この一次連立方程式を解いて

$$\left.\begin{aligned}
\phi_a&=2.598\times 2G\theta\delta^2\\
\phi_b&=2.348\times 2G\theta\delta^2\\
\phi_c&=2.125\times 2G\theta\delta^2\\
\phi_d&=1.539\times 2G\theta\delta^2\\
\phi_e&=1.404\times 2G\theta\delta^2\\
\phi_f&=0.952\times 2G\theta\delta^2
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

かくして求められたϕの値は非常に小さいので便宜上

$$\chi=\phi\times\frac{1000}{G\theta A^2} \quad 即ち\phi=\frac{\chi}{1000}G\theta A^2 \tag{11}$$

と置くことにする。[3] ここにχは無次元数である。この

式より計算され χ_a，χ_b…，χ_f を使って，χ_a と χ_b，χ_b と χ_c，……，χ_e と χ_f 間の格子点におけるχの値を比例計算より求めて，24等分の場合の各格子点におけるxの第0次近似値とした。図2はこのようにして得られたχの第0次近似値である。

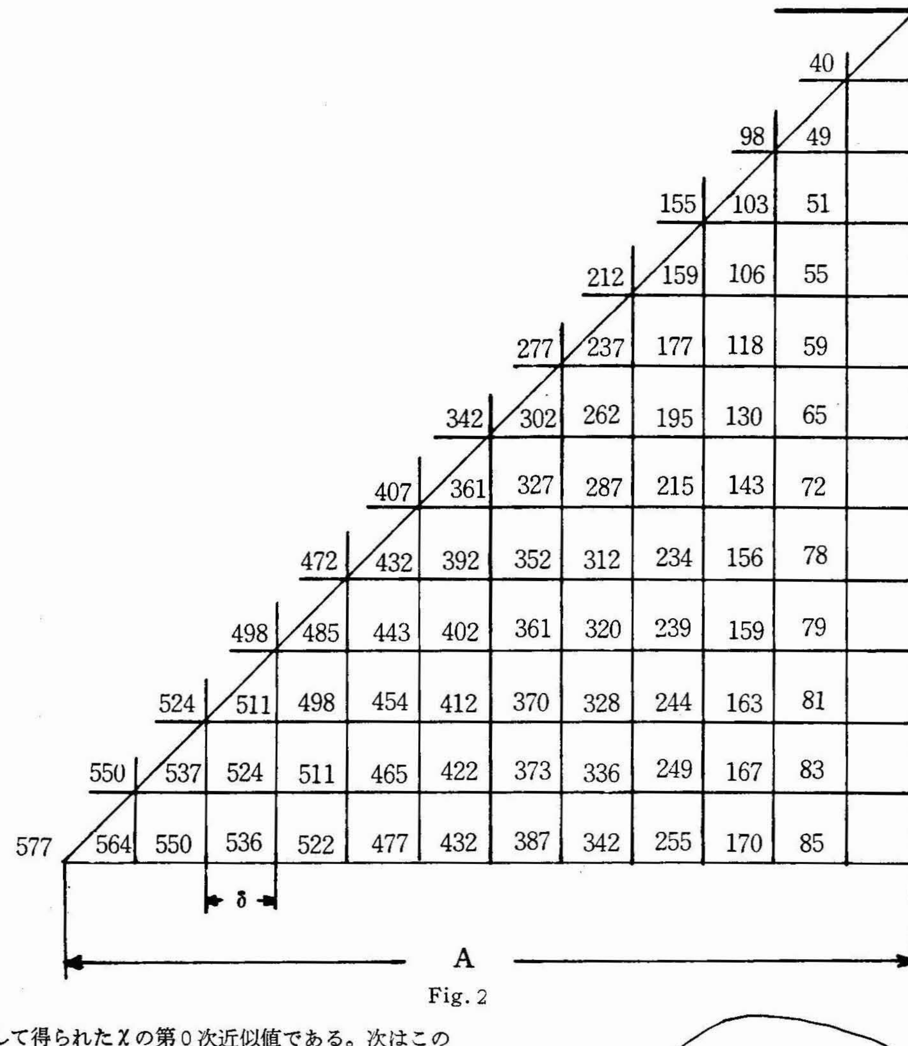

Fig. 2

次はこのχの値を出発値として逐次弛緩法を適用すれば良い。

そのためにまず(6)式をχを用いて表示すれば

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \chi^2}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}=-\frac{2000}{A^2} \tag{12}$$

で，またこの式に対する階差方程式は図3において

$$\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4-4\chi_0+\frac{2000}{A^2}\delta^2=0 \tag{13}$$

となる。従って，残留値Rを求める式は

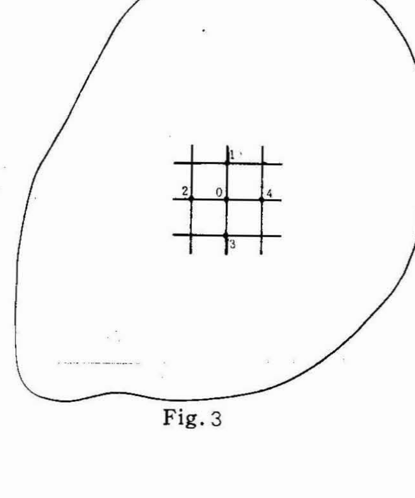

Fig. 3

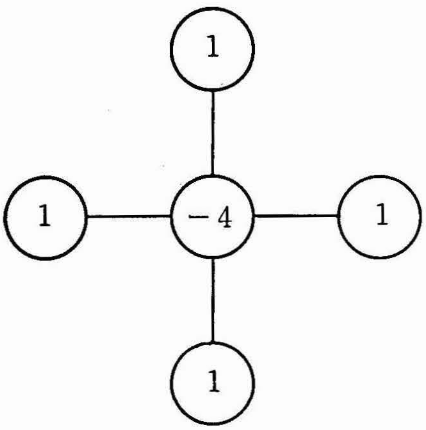

Fig. 4

$$R=(\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4)-4\chi_o+2000\left(\frac{\delta}{A}\right)^2$$
$$=(\chi_1+\chi_2+\chi_3+4)-4\chi_o+\frac{2000}{144} \qquad (14)$$

である。各格子点における残留値が零になるときが微分方程式の正解となるわけであるから，得られた残留値を零にするよう操作すれば良い。

図4は正方形格子の場合の弛緩模型で，中央の函数値に1なる変化が生じたときに，中央の残留値は −4 変化し，上下左右の残留値は1変化することを示している。従って，逆に残留値を零ならしめるように各格子点の函数値に補正すべき値を求めれば良い。

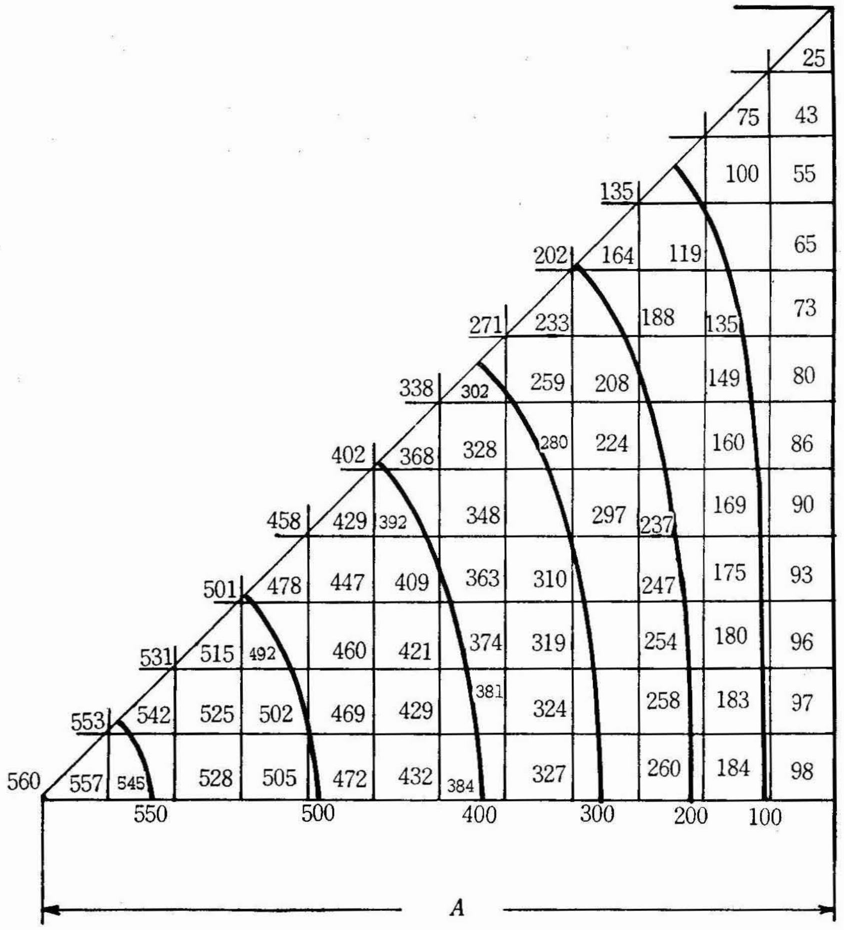

Fig. 5

図5はこのようにして各点の残留値が3以下になるまで清算を続けていって得られたχの値と等高線図を表わす。

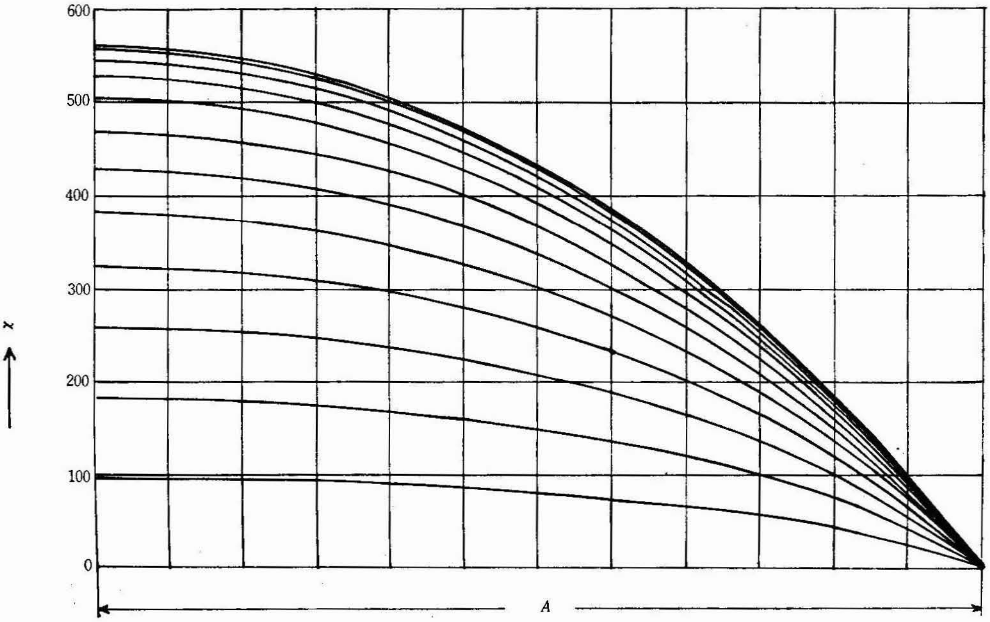

Fig. 6

次に断面内における最大剪断応力τ_{max}を求めてみる。断面内の任意点における剪断応力は応力丘上での最大傾斜の値に等しいので，従って最大剪断応力は周辺のうちで図心から一番近い点に生ずる。この点は正方形断面棒の場合は各辺上の真中に相当する。いま図7に示すように横軸にξ軸を周辺中央点より図心の方向に取り，縦軸にχを取ることにする。函数$\chi = f(\xi)$がξ_0，ξ_1，ξ_2のときχ_0，χ_1，χ_2，をとるとすれば，原点0とP_1，P_2点をとおる近似曲線としてはラグランジェの多項式より

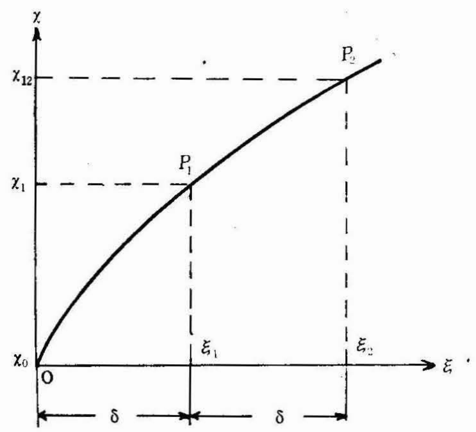

Fig. 7

$$\chi = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)}\chi_0 + \frac{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_2)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_2)}\chi_1 + \frac{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)}{(\xi_2-\xi_0)(\xi_2-\xi_1)}\chi_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

ここで$\chi_0 = 0$，$\xi_1 - \xi_0 = \xi_2 - \xi_1 = \delta$，

$\xi_2 - \xi_0 = 2\delta$を代入すれば

$$\chi = -\frac{1}{\delta^2}\left\{\xi^2 - (\xi_0+\xi_2)\xi + \xi_0\xi_2\right\}\chi_1 + \frac{1}{2\delta^2}\left\{\xi^2 - (\xi_0+\xi_1)\xi + \xi_0\xi_1\right\}\chi_2 \quad \cdots(16)$$

ξに関して微分すれば

$$\frac{d\chi}{d\xi} = -\frac{1}{\delta^2}\left\{2\xi - (\xi_0+\xi_2)\right\}\chi_1 + \frac{1}{2\delta^2} \times \left\{2\xi - (\xi_0+\xi_2)\right\}\chi_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

τ_{max}を求めるためにこの式において，$\xi = 0$，

$\xi_1=\delta$, $\xi_2=2\delta$, $\chi_1=93$, $\chi_2=184$, $\delta=A/12$ を代入すれば

$$\tau_{max} = \frac{G\phi A^2}{1000}\left(\frac{d\chi_1}{d\xi}\right)_{\xi=0}$$

$$= \frac{G\theta A^2}{1000} \times \frac{1}{\delta}\left(2\chi_1 - \frac{\chi_2}{2}\right)$$

$$=1.243\,G\theta A \cdots\cdots(18)$$

この値は弾性論による正解 $\tau_{max}=1.351G\theta A$[2] と比較するとまだ7.5%の誤差がある。

3. 弾塑性捩り

材料は図8に示すように歪硬化のない弾完全塑性体であるとする。一様断面棒を捩っていけば，周辺上で断面図心から一番近い点の合剪断応力が材料固有の限界値τ_Yに等しくなったときに，その点から降伏が始まる。さらに捩っていった場合に塑性領域のひろがる様相や弾塑性境界等を求めるためには「まず断面周辺より一定傾斜$\tan^{-1}\tau_y$の固定した屋根即ち Prantle の屋根を建てる。次に断面周辺に張り付けた薄膜に外圧力を増加していくとやがてプラントルの屋根に接するようになる。この接した部分を断面上に投影した領

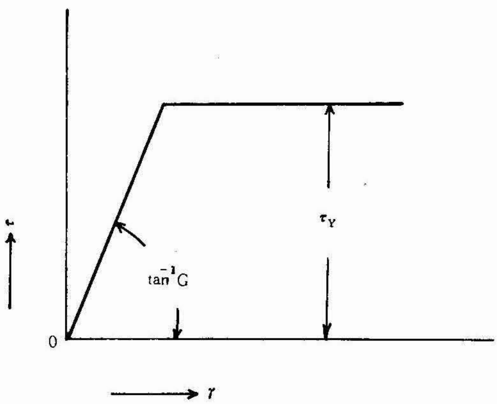

Fig. 8

域がある捩りモーメントに対する塑性領域を表わす。」という考え方より求まる。従って，今この薄膜を図5に示すような細かい正方形網目で置き代えた場合に次の操作を実行して弾塑性捩りの問題解決にあたる。[3]

a）屋根より離れているところの格子点の残留値は清算を要する。

b）屋根に接している格子点においては，正の残留値は清算してはならないが，負の残留値は清算しなければならない。何故なら残留値が正数である格子点には屋根を押し上げようとする力が働くことになるが，この力は剛性屋根による反力と釣合うことになるからである。

従って，ϕの値は次のようになる。

i）断面周辺上では（単一連結のとき）$\phi=0$である。

ii）各結節点においてその固有の値（プラントルの屋根の高さ）を越えてはならない。

iii）屋根に接していない格子点では階差方程式を満足していなければならない。

以上のことを考慮して正方形断面棒の弾塑性捩り問題の解決にあたることにする。

いま降伏応力をτ_y，弾性限度の比捩れ角をθ_eとすれば，(18)式よりτ_yとθ_eとの間には

$$\tau_y=1.243\,G\theta_e A$$

$$=\lambda G\theta A \qquad (19)$$

なる関係がある。ここに

$$\lambda\theta=1.248\,\theta_e, \qquad \lambda\leqq 1.248 \qquad (20)$$

である。次に図9に示すように断面周辺からd離れた任意の点Pが塑性域内にあるとすれば，プラントルの

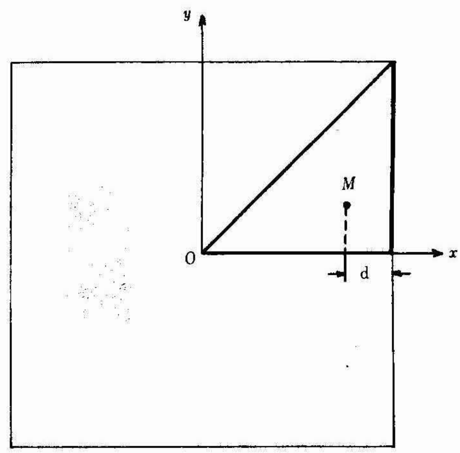

Fig. 9

屋根の考え方よりϕ_yとτ_yとの間には

$$\tau_y=\frac{\phi_y}{d} \qquad (21)$$

なる関係がある。ϕ_yは格子点の位置が定まれば固有の値をとるから，その点におけるχの値をχ_Yとすれば(11)，(21)式より

$$\tau_Y=\frac{\chi_Y}{d}\times\frac{G\theta A^2}{1000} \qquad (22)$$

従って，(19)，(22)式より

$$\chi_Y = 1000\frac{d}{A}\lambda \tag{23}$$

この式より λ が与られれば任意の格子点における χ_Y の値は決定出来ることになる。以下にその例を示す。

1)　$\lambda=0.960$　即ち $\frac{\theta}{\theta e}=1.3$ の場合

(23)式よりこの場合の断面内の塑性域における χ_Y の値は

$$\chi_Y = 960\frac{d}{A} \tag{24}$$

で与えられる。次にこの式より計算される各格子点の χ_Y の値と図5の χ の値とを比べて，χ の値が χ_Y の値より大きいところは χ_Y の値に置き換え，小さいところは χ のままにして上記(a)，(b)に留意しつつ弛緩法を行なって残留値の清算を行なう。清算後，χ が χ_Y に等しくなっているところは塑性域内の格子点であり，χ が χ_Y より小さいところは弾性域内の点を与える。そしてその境界を滑らかな曲線で結べばそれが弾塑性境界線を与える（図10のMN）。

実際上は，図11に示すようなプラントルの屋根を $z\chi$ －平面に平行な平面で切った曲線を描き，その曲線上において降伏した部分の直線部分と未降伏の曲線部分との接点を求め，これらの接点を結んで得られるのが弾塑性境界線になる。

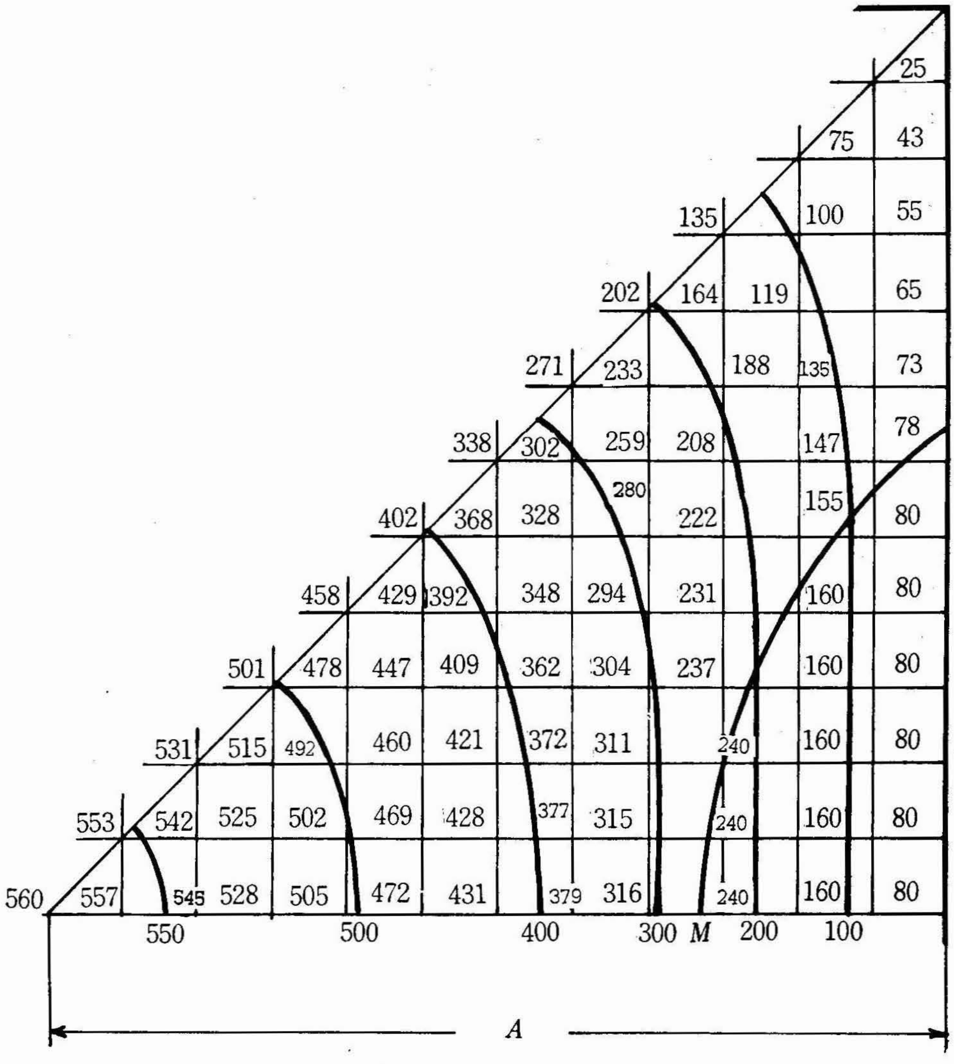

Fig.10

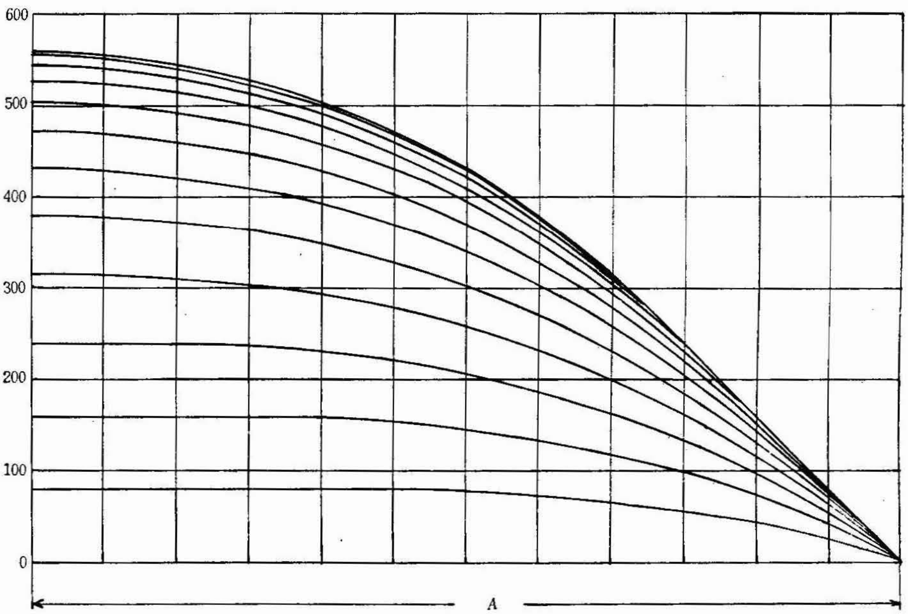

Fig.11

2)　同様にして

$\lambda=0.780$　即ち $\dfrac{\theta}{\theta e}=1.6$ の場合は図12，13を得る。

$\lambda=0.624$　即ち $\dfrac{\theta}{\theta e}=2.0$ の場合は図14，15を得る。

$\lambda=0.416$　即ち $\dfrac{\theta}{\theta e}=3.0$ の場合は図16，17を得る。

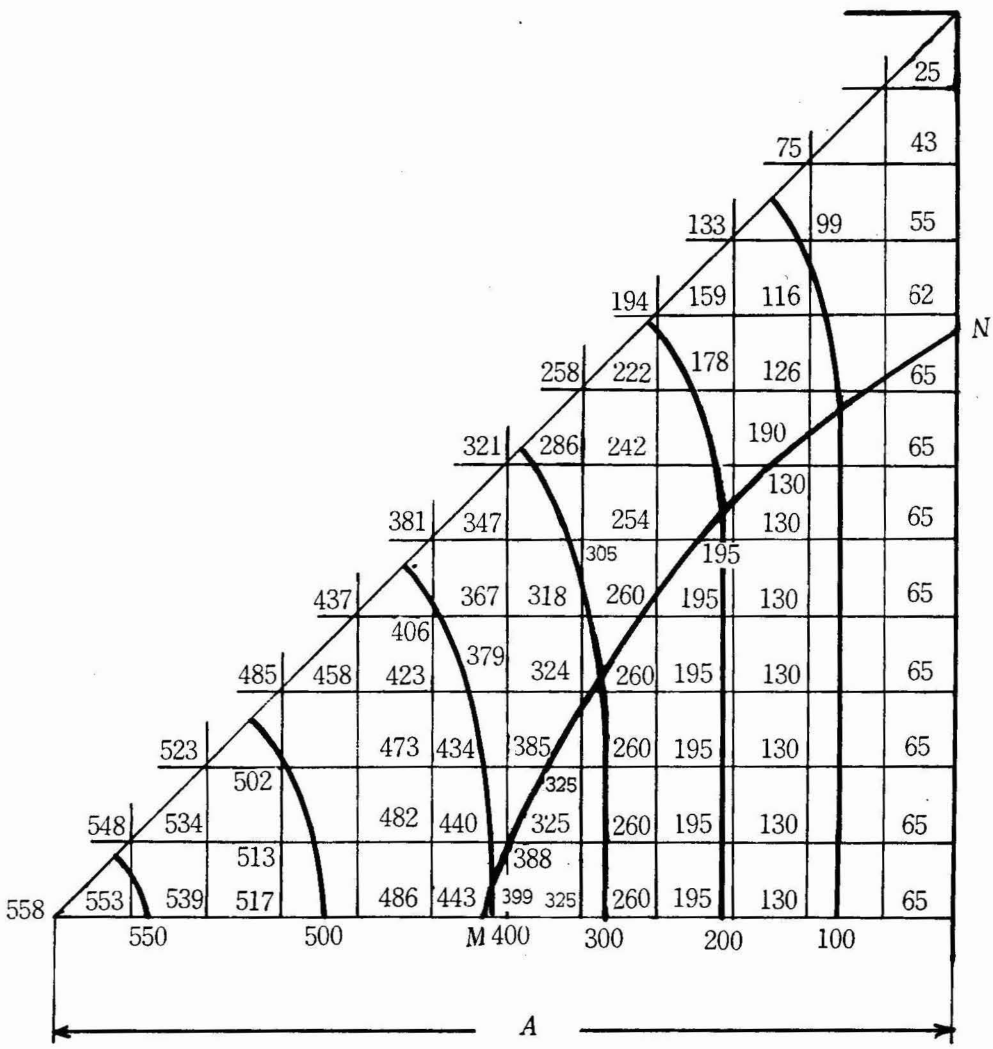
25
75
43
133
99
55
194
159
116
62
N
258
222
178
126
65
321
286
242
190
65
130
381
347
254
130
65
305
195
437
367
318
260
195
130
65
406
485
458
423
379
324
260
195
130
65
523
473
434
385
260
195
130
65
502
325
548
534
482
440
325
260
195
130
65
513
388
558
553
539
517
486
443
399
325
260
195
130
65
550
500
M
400
300
200
100
A

Fig.12

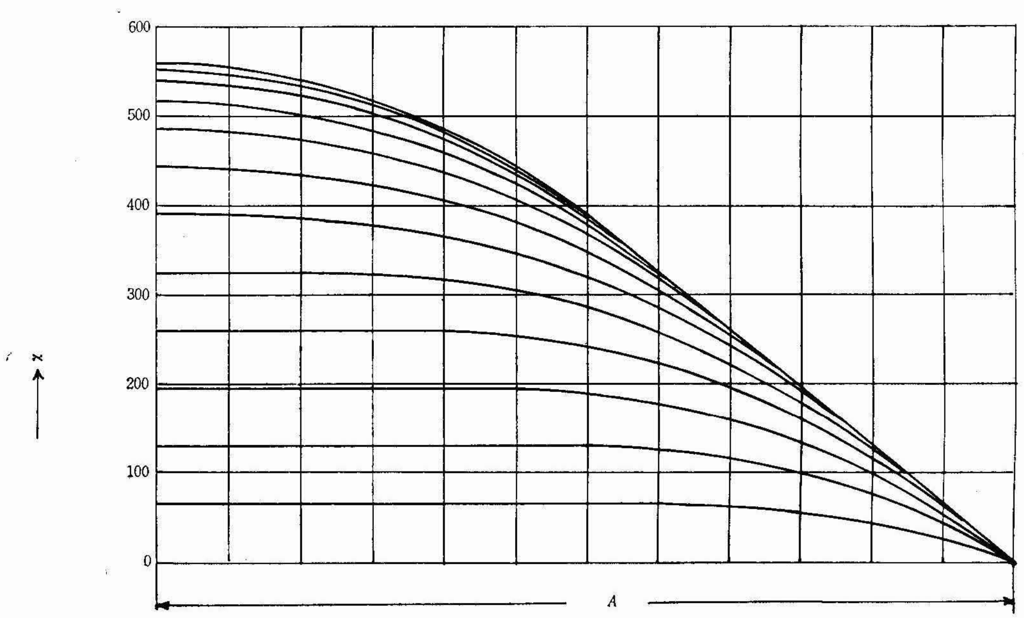
600
500
400
300
200
100
0
x
A

Fig.13

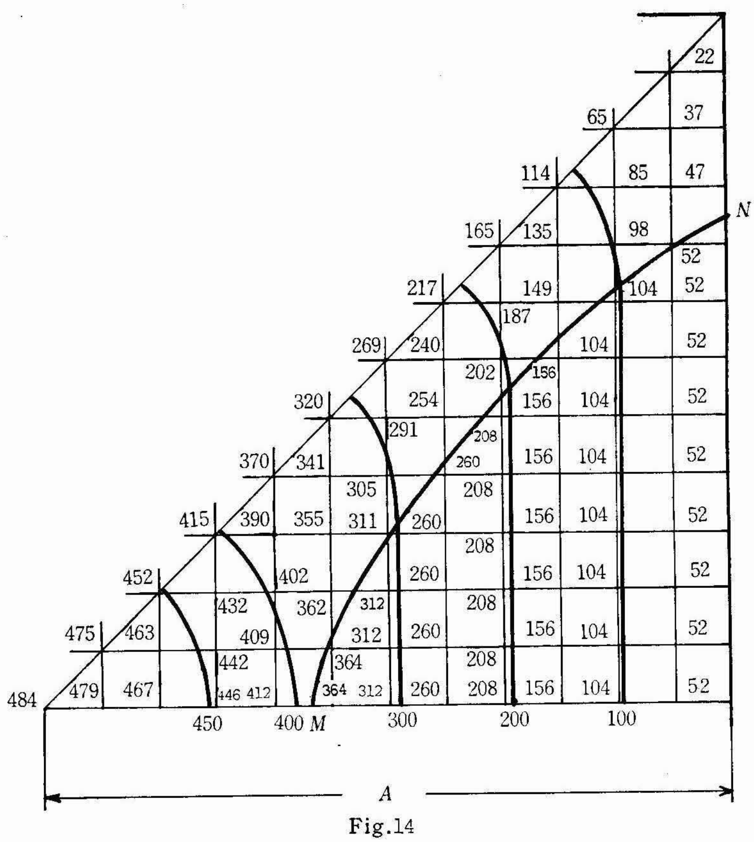
22
37
65
114
85
47
N
165
135
98
52
217
149
104
52
187
269
240
104
52
202
156
320
254
156
104
52
291
208
370
341
260
156
104
52
305
208
415
390
355
311
260
156
104
52
208
452
402
260
156
104
52
432
362
312
208
475
463
409
312
260
156
104
52
442
364
208
484
479
467
446
412
364
312
260
208
156
104
52
450
400
M
300
200
100
A

Fig.14

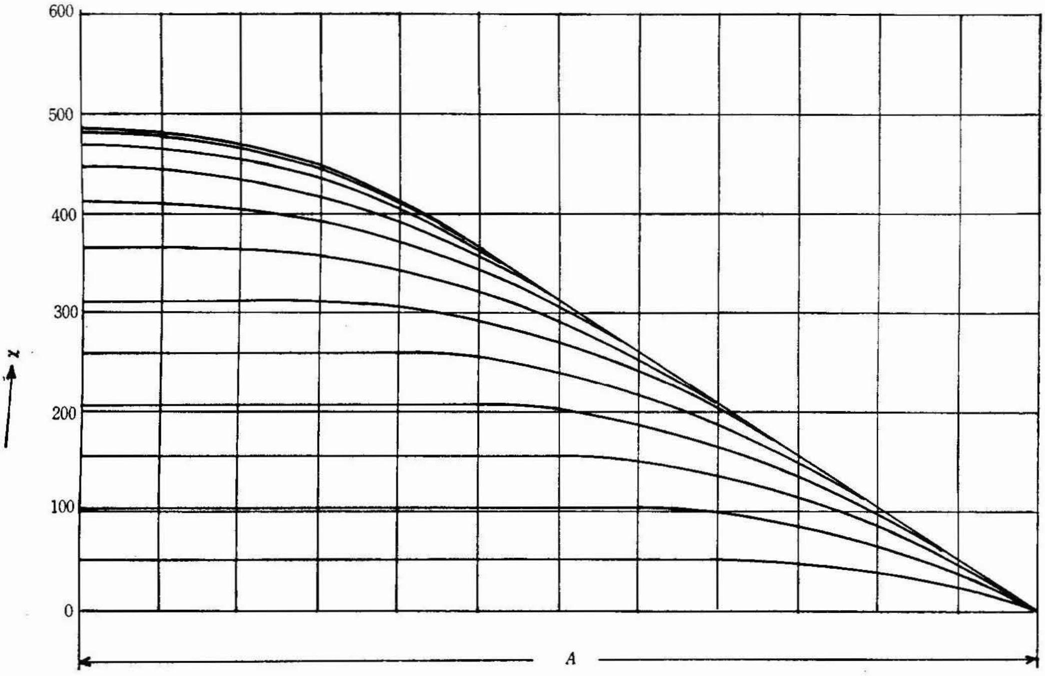
600
500
400
300
200
100
0
z
A

Fig.15

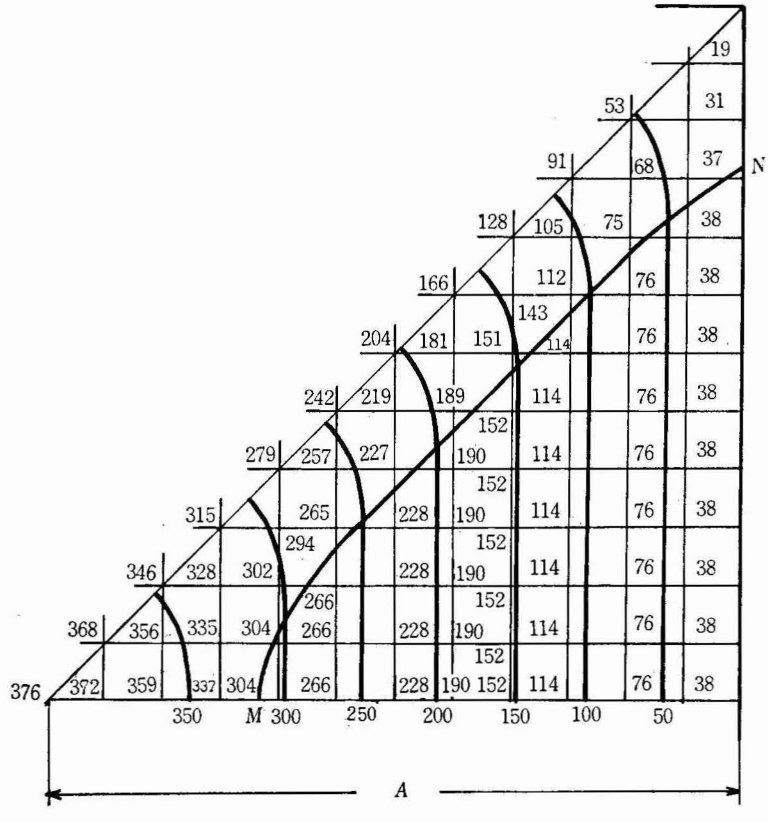
19
53
31
91
68
37
N
128
105
75
38
166
112
76
38
143
204
181
151
114
76
38
242
219
189
114
76
38
152
279
257
227
190
114
76
38
152
315
265
228
190
114
76
38
294
152
346
328
302
228
190
114
76
38
266
152
368
356
335
304
266
228
190
114
76
38
152
376
372
359
337
304
266
228
190
152
114
76
38
350
M
300
250
200
150
100
50
A

Fig.16

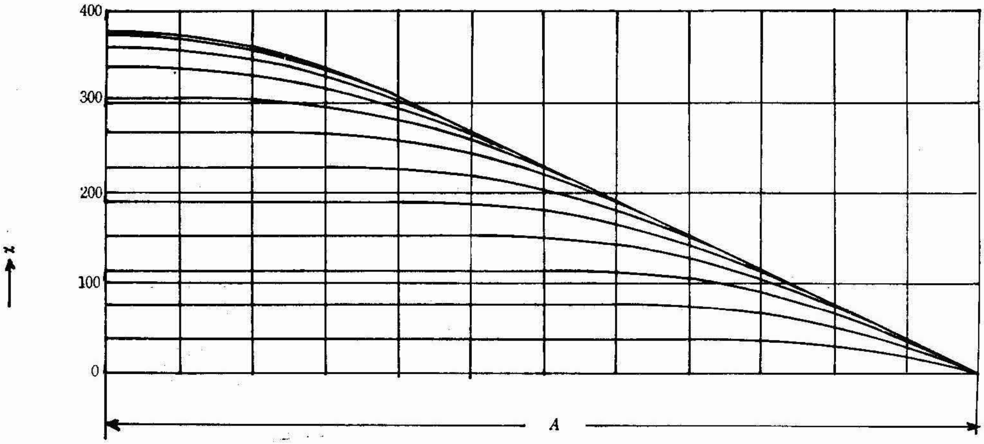

Fig.17

次に振りモーメントTと振れ角θとの関係について求めるために(8)，(11)，(19)式より

$$T = \frac{2}{1000}\frac{A}{\lambda}\tau_Y \iint \chi \ dx\, dy$$

ここで　$\iint \chi \, dx\, dy$ は正方形網目に対しては近似的に $\iint \chi \ dx\, dy = \frac{A^2}{144}\Sigma(\chi)$

で，$\Sigma\chi$は断面内の全ての格子点におけるχの総和である。従って

$$T = \frac{A^3}{72000}\times\frac{\tau_y}{\lambda}\Sigma\chi \tag{25}$$

この式より断面周辺の中央点の応力が降伏点に達した時のλを$\lambda_e=1.248$，TをTe，$\Sigma\chi$を$\Sigma(\chi)e$とすれば

$$T_e = \frac{A^3}{72000}\times\frac{\tau_Y}{\lambda_e}\Sigma(\chi)e \tag{26}$$

従って

$$\frac{T}{T_e} = \frac{\theta}{\theta_e}\quad\frac{\Sigma\chi}{\Sigma(\chi)e} \tag{27}$$

上記 1)，2) のλに対して$\frac{T}{Te}$を計算した結果を表1と図18に示す。

λ	1.248	0.960	0.780	0.624	0.416
$\theta/\theta e$	1.0	1.3	1.6	2.0	3.0
T/Te	1.0	1.282	1.450	1.506	1.560

Table. 1.

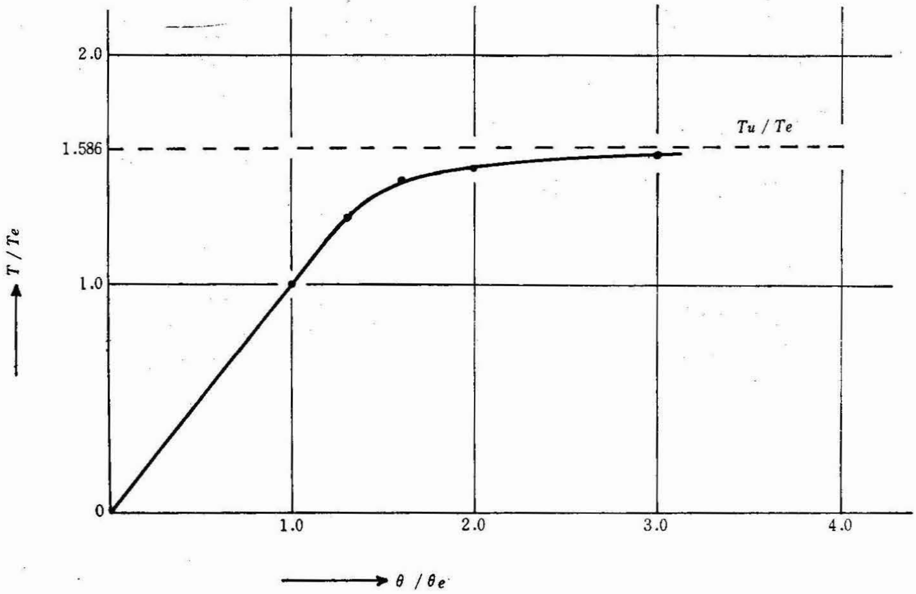

Fig.18

4. 断面全体が降伏したとき

断面全体が降伏したときのT をTuと表わすと，トルクTuは図19における正四角錐の全体積に等しく

$$T_u = 2\int_A \phi \, dA = \frac{8}{3} A^3 \tau_Y \tag{28}$$

となる。また弾性限トルクTeは

$$T_e = 2\int_A \phi \, dA = 2 \times \frac{G\,\theta_e A^2}{1000} \int_A \chi \, dA$$

であるが，図5より

$$\int_A \chi \, dA = \frac{A^2}{144} \Sigma \chi_e = \frac{151034}{144} A^2$$

であるから

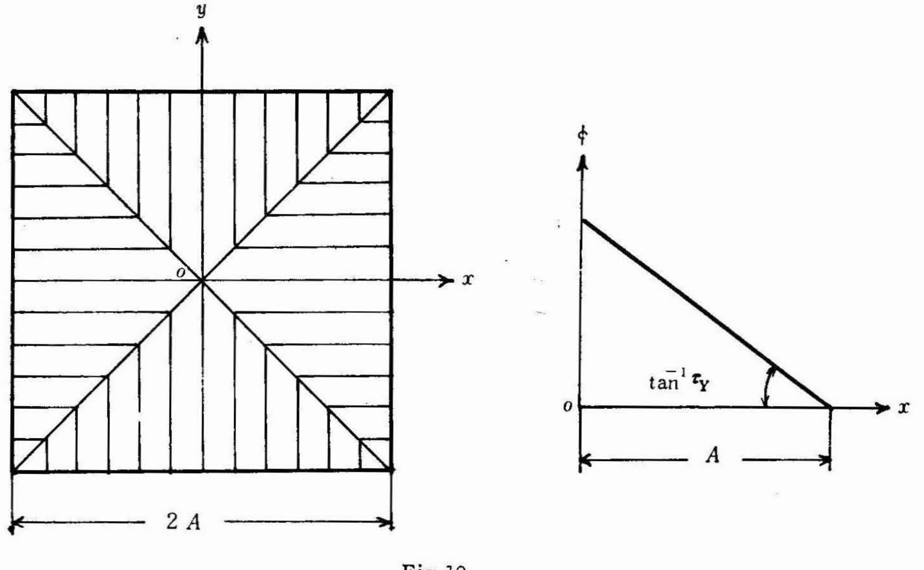

Fig.19

$$\mathrm{Te} = 2 \times \frac{G\ \theta e A^2}{1000} \times \frac{151084}{144} A^2$$

$$\therefore\ \frac{Tu}{Te} = 1.583 \qquad (29)$$

図18は$\frac{T}{Te}$と$\frac{\theta}{\theta e}$との関係を示し，$\frac{\theta}{\theta e}$が大きくなれば$\frac{T}{Te}$は$\frac{Tu}{Te}$に次第に接近することがわかる。

5. 結　言

正方形断面棒の弾塑性捩りを，弾完全塑性体に対して弛緩法を適用して求めた結果，次のことが判明した。

i) 弛緩法による近似解は最大剪断応力については正解と7.5%の誤差があった。

ii) 降伏領域の進展状況が良くわかった。

iii) T/Teのθ/θeが大きくなればなる程Tu/Teの値に漸近した。

参　考　文　献

1) Theory of Elasticity, Jimoshenko and Goodier, MCGraw Hiu

2) 薄板構造力学，関谷壮，共立出版

3) 「輻方向に6個の半円切欠を有する丸棒の弾塑性塑りについて」，中山孝，機械学論文全集，29巻　200号