

琉球大学学術リポジトリ

球形構造物の波による振動に関する基礎的研究

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2012-07-13 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 河野, 二夫, Kono, Tsugio メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/24957

第2篇 波動による球の干渉

第1章 緒言

第2篇においては波動の中に2箇の球状物体を接近しておいた場合、波動によってお互の球がどのような干渉を受けるかについて検討した。

大別すると次の3通りになる。

- ① 図2-1に示す様に板ばねに球を取りつけた2箇の倒立振子（以下単に球と呼ぶ）をその中心を結ぶ線が波の進行方向に一致するようにした場合のX干渉の問題。

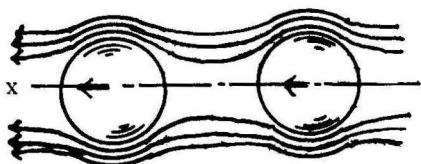


Fig. 2-1

- ② 図2-2に示すように2箇の球の中心を結ぶ線が、波の進行方向に対し直角方向にした場合、波動によって球がY振動する場合のY干渉の問題。

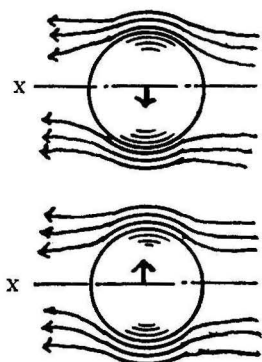


Fig. 2-2

- ③ 図2-3に示すように2箇の球の中心を結ぶ線が波の進行方向に対し直角方向にした場合波動によって球がX振動する場合のY干渉の問題である。

（注：X干渉，Y干渉などの定義は第1篇第1章にしてあるので、こゝでは省略する）。

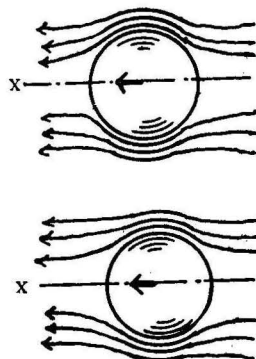


Fig. 2-3 : Pattern of flow around two spheres ;

さて、このような流れの中における物体の干渉問題についての研究は多くなされている。

たゞ流体力学的な観点に基づく基礎的な研究であり、かつ定常流における場合が多いように思われる。従って非圧縮性完全流体の連続的な流れのみでは解決されない、いわゆる d'Alembert の背理を考える場合、やはり粘性流体としての Navier-Stokes の運動方程式に基づかざるを得ない。それ故にその解析も非常に難かしくなる。この様な問題について、例えば、粘性流体の中を鉛直方向に2箇の球をある間隔をおいて落下させた場合の干渉の問題や流れの中に2箇の球をおいた場合の流れ方向の干渉の問題やその他多くの研究はなされている。いずれも粘性流体を考えていることから、取扱いは複雑である。1例として K.W. Christopher の論文 (1969) について簡単に説明すると、彼は2箇の球が流れ方向に置かれた場合の上流側の球（半径 a、球の中心間隔 d）に作用する流体力を求める場合、下流側の球（半径 b）を Point force として考えた。そうすると上流側の球に作用する流体力を求めるための方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{U} - \nabla p &= DB \delta(x-d) \delta(y) \delta(z) \\ \hat{e}_x & \quad (2-a) \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \quad (2-b) \end{aligned}$$

\mathbf{U} 、 P 、 μ は各々流体の速度、圧力、粘性係数である。球から充分離れた点での \mathbf{U} は一様流 $\mathbf{U} \cdot \hat{e}_x$ になる。また DB は下流側の球に作用する流体力であるが、球自体は点と考える。（その球によって流れは影響されない）。

(注：(2-a)式で右辺を考えないと、この式は Stokes の運動方程式である)。上式の解法を示されていないが、Stokes の方程式の解法を応用した結果だけを示すと、

$$D_A = 6 \cdot t \cdot \mu \cdot a \cdot U_0 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{a^3}{d^3} - \frac{a}{d} \right) D_B \quad (2-c)$$

もし、 $a = b$ なら、

$$D_A = D_B = \frac{6 \pi \mu a U_0}{1 + \frac{3}{2} (a/d)} \quad (2-d)$$

云うまでもなく、(2-d)の分子は Stokes による一箇の球の場合の解である。さて、プラントル・チーチェンスによると2球が流れ方向に一致して並ぶときは(例えば図2-1)その中心間隔の4乗に逆比例して流体力が作用するとのべている。たゞこの理由は明確にされていない。球形以外の物体、例えば、円柱の相互干渉についても多くの論文が発表されており、1例として、永井らの行なった実験的研究や D.K.Laird らが行なった研究など興味ある問題であると思う。いずれも wake の影響に実験内容の重点があるように考える。2球の干渉の問題は potential 理論により考察する事も出来る。この様な手法の基本的な取扱いは、H. Lamb や M. Thomson の著書にも示されてある。彼らの理論は球の中の逆点に doublet を仮定して解く、いわゆる鏡像の方法によるものであるが、この方法は解が複雑になるので結果的には、近似的にしか解いていないのである。著者の論文は、彼らの手法に類似しているのであるが、たゞ彼らの近似的な解法では説明出来ない部分(例えば第3章、第4章)も出て来る。従って、この点について、特に新しく potential 理論を示し、さらに H.Lamb や M.Thomson らの著書に示されている potential 理論との相違を明確にした。

第2章 波の進行方向の干渉(X干渉)

第1節 速度ポテンシャル

物体が空気中を運動する場合と、水中で運動する場合は非常に相違がある。前者に比較して後者が大きく影響されるものとしては、自由表面の影響(例えば、鏡像の効果や造波現象)および仮想質量の効果である。本論文でとくに問題になるのは仮想質量の効果である。

また、複数の物体が水中にある場合は、お互の配置によっては速度ポテンシャルは非常に影響を受ける。さらに問題になるのは、実在の流れは粘性流であるが、本論文では、これをポテンシャル流として扱うことである。しかし報告によると、粘性を考えた場合と考えない場合の仮想質量の効果はほとんどかわらないとされている。⁴⁵⁾

第2篇においては、2球による干渉の問題を考察するのであるが、この問題を解く場合に2つの考え方がある。その一つは鏡像の方法を用いるものであり、他は直接境界条件を満足するように Laplace の方程式(1-10)を解くことである。故に第1節では、この2通りの方法につき簡単に記述しておく。

2.1.1) 鏡像の方法

H.Lamb や M.Thomson の著書に示されているものを簡単に説明しておく。

A : doublet

図2-4でaを流出点、bを流入点とし、かつその強さをmとする。

Sが充分小さいとP点の速度ポテンシャルは(2.1)式になる。

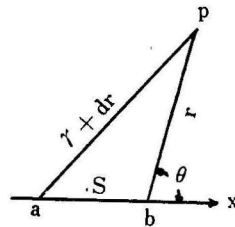


Fig. 2-4 : Schematic diagram of doublet.

$$\left. \begin{aligned} \phi &= m \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma + d\gamma} = mS \frac{\cos \theta}{\gamma(\gamma + S \cos \theta)} \right) \div \frac{\mu \cos \theta}{\gamma^2} \\ \mu &= mS \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(2.1) 式は (2.2) 式でも示せる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\mu}{\gamma^2} \cdot \frac{x}{\gamma} = \frac{\mu \cos \theta}{\gamma^2} \\ \phi &= -\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\gamma} \right) = -\frac{\mu}{\gamma} (1 - \cos^2 \theta) = -\frac{\mu}{\gamma} \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(2.2) 式に一樣な流れ ($\phi' = u \gamma \cos \theta$) を重ね合せると

$$\phi = u \gamma \cos \theta + \frac{\mu \cos \theta}{\gamma^2} \quad (2.3)$$

故に $\gamma = a$ のとき, その面上で速度の法線方向の成分を 0 とすると

$$u_r \Big|_{\gamma=a} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=a} = \left(u - \frac{2\mu}{\gamma^3} \right) \Big|_{\gamma=a} \cos \theta = 0 \quad (2.4)$$

従って

$$\mu = \frac{1}{2} u a^3 \quad (2.5)$$

(2.5) 式を (2.2) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} u a^3 \cdot \frac{\cos \theta}{\gamma^2} \\ \psi &= -\frac{U}{2} \cdot \frac{a^3}{\gamma} \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

球のまわりの流れは (2.6) 式により

$$\frac{\sin^2 \theta}{\gamma} = \text{constなる曲線になる。}$$

B : 2 箇の Doublet-Source

図 2-5 に示すように中心線上を運動している 2 箇の球を考える。2 球による速度ポテンシャル ϕ を (2.7) 式とする。

$$\phi = U \phi_A + V \phi_B \quad (2.7)$$

境界条件は (2.8) 式になる。

$$\left. \begin{aligned} \text{A球上で, } \frac{\partial \phi_A}{\partial \gamma_A} \Big|_{\gamma_A=a} &= \cos \theta_A, \quad \frac{\partial \phi_B}{\partial \gamma_A} \Big|_{\gamma_A=a} = 0 \\ \text{B球上で, } \frac{\partial \phi_B}{\partial \gamma_B} \Big|_{\gamma_B=b} &= -\cos \theta_B, \quad \frac{\partial \phi_A}{\partial \gamma_B} \Big|_{\gamma_B=b} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

図 2-5 で A_1, A_2 は各々 A 点, A_1 点の逆点 (inverse point) である。このように 2 箇の球の問題を考える場合は, 逆点と同じ強さの doublet を考えたとよい。これが鏡像の方法であり, 例えば図 2-5 で A, B, A_1, A_2 , 点などにおける doublet などの任意の体系は, この球面に対し鏡像になっているから, この球面を横切つて流れはない。幾何学的には逆点は (2.9) 式の関係で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &= \frac{b^2}{\gamma} \\ \gamma' &= \overline{B \cdot A_1}, \quad \gamma = \overline{A B}, \quad b \text{ は球 B の半径} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

さて, B 球を考えないと, u を単位で考えた場合 (2.2) 式により

$$\psi = -\frac{\mu}{\gamma} \sin^2 \theta_A \quad (2.10)$$

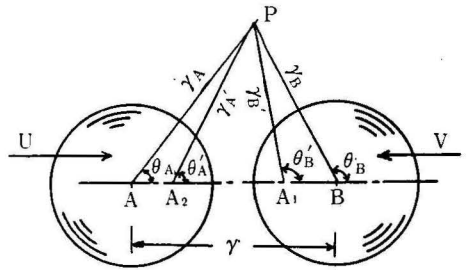


Fig. 2-5 : two solid spheres moving in the line of centres.

もしB球があれば、B球の中にA点の逆点A1を考えるとよいので、Butlerの定理により

$$\Psi_1 = \Psi + \frac{\mu \cdot (\gamma' \sin \theta'_B)^2}{b \cdot \gamma \cdot \gamma'_B} \quad (2.11)$$

(2.11) 式に (2.9) 式を代入すると

$$\Psi_1 = \Psi + \left(\frac{b}{\gamma}\right)^3 \cdot \mu \cdot \frac{\sin^2 \theta'_B}{\gamma'_B} \quad (2.12)$$

結局、B球がある場合はA1点に $\left(\frac{b}{\gamma}\right)^3 \cdot \mu$ の doublet を考えたことになる。

C：速度ポテンシャル

上述の考察によりA球がB球（静止）に向って単位で速度で運動する場合の速度ポテンシャルは次のようになる。（図2-5参照）

B球がない場合

(2.6) 式により

$$\phi'_A = \mu \frac{\cos \theta_A}{\gamma_A^2}, \quad \mu = \frac{a^3}{2} \times (\text{単位で速度}) \quad (2.13)$$

B球がある場合、

A点の逆点A1の強さは(2.12)式より $\mu' = -\frac{b^3}{\gamma^3} \mu$,

従って

$$\phi''_A = \mu' \frac{\cos \theta'_B}{\gamma'^2_B} = \left(\frac{b}{\gamma}\right)^3 \cdot \mu \cdot \frac{\cos \theta'_B}{\gamma'^2_B} \quad (2.14)$$

更にA1点にdoublet (μ') を考えた場合の逆点A2の強さは同様に考えて

$$\mu'' = -\frac{a^3}{(\gamma - A1B)^3} \mu' = -\frac{a^3}{\left(\gamma - \frac{b^2}{\gamma}\right)^3} \cdot \left(\frac{b}{\gamma}\right)^3 \cdot \mu \text{ であるから}$$

$$\phi'''_A = \mu'' \frac{\cos \theta'_A}{\gamma'^2_A} = -\frac{a^3}{\left(\gamma - \frac{b^2}{\gamma}\right)^3} \cdot \left(\frac{b}{\gamma}\right)^3 \cdot \mu \cdot \frac{\cos \theta'_A}{\gamma'^2_A} \quad (2.15)$$

以下同様にして無限の inverse point を考慮して精度を高める事が出来る。今までの近似で考えると速度ポテンシャル ϕ は (2.7) 式により

$$\phi = U\phi_A + V_B\phi_B = U\left(\phi'_A + \phi''_A + \phi'''_A\right) + V\phi_B \quad (2.16)$$

(2.16) 式の ϕ_B についても同様に考えることが出来る。

2.1.2 直接法（近似解）

直接法という表現は正式でない。直接境界条件を満足するように Laplace の式を解くことで、本文に用いた仮の表現である。(2.16) 式の ϕ'_A , ϕ''_A , ϕ'''_A (ϕ_B についても同様) については図2.5からもわかるように γ_A , γ'_B , θ'_A , θ'_B など与えないと求められない。これは非常に複雑であるので、M.Thomson 直接法によって近似解を求めているのである。これを簡単に説明する。図2-5で、

$$\gamma_A^2 = \gamma^2 + \gamma_B^2 - 2\gamma \cdot \gamma_B \cdot \cos(\pi - \theta_B)$$

$$\frac{\cos \theta_A}{\gamma_A^2} = \frac{\gamma_A \cos \theta_A}{\gamma_A^3} = \frac{\gamma - \gamma_B \cos(\pi - \theta_B)}{\left\{ \gamma^2 + \gamma_B^2 - 2\gamma \cdot \gamma_B \cos \theta_B \right\}^{3/2}} \div \frac{1}{\gamma^2} \left(1 + \frac{2\gamma_B}{\gamma} \cos(\pi - \theta_B) \right)$$

(2.17)

(2.17) 式を用いると (2.13) 式は

$$\phi'_A = \frac{\mu}{\gamma^2} \left\{ 1 + \frac{2\gamma_B}{\gamma} \cos(\pi - \theta_B) \right\} \quad (2.18)$$

故に境界条件 (2.8) 式を満足するためには

$$\frac{\partial \phi'_A}{\partial \gamma_B} = \frac{2\mu}{\gamma^3} \cos(\pi - \theta_B) \text{ であるから}$$

$$\phi''_A = \frac{\mu b^3}{\gamma^3} \cdot \frac{\cos(\pi - \theta_B)}{\gamma_B} \text{ を (2.18) 式に附加するとよい。}$$

以上のようにして得られた結果を (2.16) 式に代入すると ϕ'' までの近似では (2.19) 式になる。

$$\begin{aligned} \phi = U\phi_A + V\phi_B = U \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 \cos \theta_A}{\gamma_A^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b^3}{\gamma^3} \cdot \frac{\cos(\pi - \theta_B)}{\gamma_B^2} \right\} \\ + V \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{b^3 \cos(\pi - \theta_B)}{\gamma_B^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b^3}{\gamma^3} \cdot \frac{\cos \theta_A}{\gamma_A^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

第2節 運動エネルギー

運動エネルギーをEとすると (2.19) 式より

$$\begin{aligned} E = -\frac{1}{2} \rho \int_{S_A} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_A} dS_A - \frac{1}{2} \rho \int_{S_B} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_B} dS_B \\ = \frac{1}{2} m_A U^2 + \frac{1}{2} m_B V^2 + \frac{2\rho\pi a^3 b^3}{\gamma^3} U \cdot V \end{aligned} \quad (2.20)$$

上式で m_A, m_B は各々A球, B球の仮想質量であり, γ は2球間の間隔である。また S_A, S_B は各々A球, B球の表面積を示す。故に球自身が運動するときのエネルギーも含めて全体のエネルギーを改めてEとすると, (注: (2.20) 式は球が運動することによる流体の運動エネルギーである。)

$$E = \frac{1}{2} (M_A + m_A) U^2 + \frac{1}{2} (M_B + m_B) V^2 + \frac{2\rho\pi a^3 b^3}{\gamma^3} U \cdot V \quad (2.21)$$

第3節 振動方程式

(2.21) 式の γ は, 図2-6により,

$$\gamma = \gamma_0 + x_B - x_A \quad (2.22)$$

ただし, x_A, x_B は球A, Bの静止の位置からの x 軸方向の変位である。つぎに (1.12) 式の U, F, P_k は (2.23) 式で与えられる。ただし suffix A, B は各々A球, B球に対応する。

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} C_A \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} C_B \dot{x}_B^2 \\ U &= \frac{1}{2} k_A x_A^2 + \frac{1}{2} k_B x_B^2 \\ P_K &= P_A(t) \pm \epsilon'' (\dot{x}_A - u_A)^2 \\ &\quad + P_B(t) \pm \epsilon'' (\dot{x}_B - u_B)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

(2.23) 式の ϵ'' は比例定数, u_A, u_B は波の水粒子の水平速度成分である。

また \dot{x}_A, \dot{x}_B は各々 x_A, x_B の時間についての

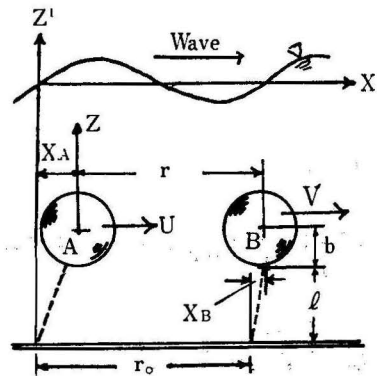


Fig. 2-6 : Schematic diagram of two spheres in row.

1回微分を示す。

(2.21) 式と (2.23) 式を (1.12) 式に代入すると (2.24), (2.25) 式が得られる。ただし (2.21) 式の u, v は各々 $\dot{x}_A, -\dot{x}_B$ におきかえた。

$$\ddot{x}_A - \frac{K_A \ddot{x}_B}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^3} - \frac{3 K_A \dot{x}_A \dot{x}_B}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^4} + 2 q_A \dot{x}_A + \omega_A^2 x_A = \frac{P_A}{M_A + m_A} \pm \varepsilon'_A \cdot C_D (\dot{x}_A - u_A)^2 \quad (2.24)$$

$$\ddot{x}_B - \frac{K_B \ddot{x}_A}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^3} + \frac{3 K_B \dot{x}_A \dot{x}_B}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^4} + 2 q_B \dot{x}_B + \omega_B^2 x_B = \frac{P_B}{M_B + m_A} \pm \varepsilon'_B C_D (\dot{x}_B - u_B)^2 \quad (2.25)$$

ただし

$$\varepsilon'_A = \frac{\rho \cdot a^2 \pi}{2 (M_A + m_A)}, \quad \varepsilon'_B = \frac{\rho \cdot b^2 \pi}{(M_B + m_B)}, \quad \omega_A^2 = \frac{k_A}{M_A + m_A},$$

$$\omega_B^2 = \frac{k_B}{M_B + m_B}, \quad K_A = \frac{2 \rho \pi a^3 b^3}{m_A + M_A}, \quad K_B = \frac{2 \rho \pi a^3 b^3}{m_B + M_B}$$

第4節 振動方程式の解

2.4.1) PA, PBについて

PAは近似的には (1.33) 式で与えられる。ただし図2-6により (1.33) 式の $\frac{d}{2}$ と a に書きかえ、かつ (1.33) 式を変形すると (2.26) 式になる。

$$P_A = -\frac{4}{3} \pi^2 a^3 \frac{\rho g H}{L} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + a)}{\cosh \frac{2\pi}{L} h} \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (2.26)$$

PBについては波の速度ポテンシャルは

$$\Phi = -\frac{H g}{4\pi} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (h + Z)}{\cosh \frac{2\pi}{L} h} \cos \left\{ \frac{2\pi}{L} (x + \gamma_0) - \frac{2\pi}{T} t \right\} \quad (2.27)$$

波動については γ_0 は (2.28) 式で示せる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= L (n + n') \\ n &= 0, 1, 2, \dots \\ 0 &< n' < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

故に (1.33) 式を導いたのと同様に考えて、

$$P_B = -\int_{SB} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} d S_B = -\frac{4}{3} \pi^2 b^3 \frac{\rho g H}{L} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + b)}{\cosh \frac{2\pi}{L} h} \cdot \cos \left(2\pi n' - \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (2.29)$$

2.4.2) 振動方程式

以上の (2.26), (2.29) 式を (2.24), (2.25) 式に代入すると (2.30), (2.31) 式になる。

$$\ddot{x}_A + 2 q_A \dot{x}_A - \frac{K_A \ddot{x}_B}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^3} + \omega_A^2 x_A = \left| P_A \right| \cos \frac{2\pi}{T} t + \varepsilon'_A \left\{ \frac{12 a b^3}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^4} \dot{x}_A \dot{x}_B \pm C_D (\dot{x}_A - u_A)^2 \right\} \quad (2.30)$$

$$\ddot{x}_B + 2 q_B \dot{x}_B - \frac{K_B \ddot{x}_A}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^3} + \omega_B^2 x_B$$

$$= |P_B| \cos \left(2\pi n' - \frac{2\pi}{T} t \right) - \varepsilon'_B \left\{ \frac{12b a^3}{(\gamma_0 + x_B - x_A)^4} \dot{x}_A \dot{x}_B \pm CD (\dot{x}_B - u_B)^2 \right\} \quad (2.31)$$

たゞし

$$\left. \begin{aligned} |P_A| &= -\frac{4}{3} \frac{\rho \pi^2 a^3}{MA + mA} \frac{Hg}{L} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (l+a)}{\cosh \frac{2\pi}{L} h} \\ |P_B| &= -\frac{4}{3} \frac{\rho \pi^2 b^3}{MB + mB} \frac{Hg}{L} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (l+b)}{\cosh \frac{2\pi}{L} h} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

2.4.3) 振動方程式の解

著者らは、先に摂動法による解を求めたが、結果的には同じでも、数学上の取扱いに不十分な点（つまり、摂動解の小さなパラメータが次元を有していた）があるので、本文ではこれらの点も考慮した。また、2球間の距離の4乗に逆比例する項は無視する。このような近似においては（2.30）、（2.31）式は（2.33）式に変形される。たゞし、VA、VBは各々（1.22）、（2.27）式から計算される。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A + 2q_A \dot{x}_A - \frac{K_A \ddot{x}_B}{\gamma_0^3} + \omega_A^2 x_A &= |P_A| \cdot \left[\cos \frac{2\pi}{T} t \pm \varepsilon_A \left\{ \frac{\dot{x}_A}{F_A} + \sin \frac{2\pi}{T} t \right\}^2 \right] \\ \ddot{x}_B + 2q_B \dot{x}_B - \frac{K_B \ddot{x}_A}{\gamma_0^3} + \omega_B^2 x_B &= |P_B| \cdot \left[\cos(2\pi n' - \frac{2\pi}{T} t) \pm \varepsilon_B \left\{ \frac{\dot{x}_B}{F_B} - \sin(\frac{2\pi}{L} \gamma_0 - \frac{2\pi}{T} t) \right\}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

なお±の符号は{ }²の{ }の中の値が正の時負、負の時正である。

たゞし

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{\varepsilon_A'}{|P_A|} CD \cdot FA^2 = \frac{3CDH}{16 \cdot a} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (l+a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \\ \varepsilon_B &= \frac{3CDH}{16b} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (l+b)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h}, \quad FA = \frac{H\pi}{T} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (l+a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \\ FB &= \frac{H\pi}{T} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (l+b)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

εA、εBについては、第1篇（3.5.6）項に述べたことから判断して、小さい値とする。なお厳密にはCDもお互の球について異なると思うがこれも無視する。（2.33）式の解として（2.35）式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x_{A,0} + \varepsilon_A^1 x_{A,1} + \varepsilon_A^2 x_{A,2} + \dots \\ x_B &= x_{B,0} + \varepsilon_B^1 x_{B,1} + \varepsilon_B^2 x_{B,2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

（2.35）式を（2.33）式に代入すると次式が得られる。

εA = εB = 0 の場合

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{A,0} + 2q_A \dot{x}_{A,0} + \omega_A^2 x_{A,0} - \frac{K_A}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{B,0} &= |P_A| \cos \frac{2\pi}{T} t \\ \ddot{x}_{B,0} + 2q_B \dot{x}_{B,0} + \omega_B^2 x_{B,0} - \frac{K_B}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{A,0} &= |P_B| \cos(2\pi n' - \frac{2\pi}{T} t) \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

$\epsilon_A = \epsilon_A^1, \epsilon_B = \epsilon_B^1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{A,1} + 2q_A \dot{x}_{A,1} + \omega_A^2 x_{A,1} - \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} \frac{K_A}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{B,1} &= \pm |P_A| \left\{ \frac{\dot{x}_{A,0}}{F_A} + \sin \frac{2\pi}{T} t \right\}^2 \\ \ddot{x}_{B,1} + 2q_B \dot{x}_{B,1} + \omega_B^2 x_{B,1} - \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \frac{K_B}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{A,1} &= \pm |P_B| \left\{ \frac{\dot{x}_{B,0}}{F_B} - \sin \left(\frac{2\pi}{L} \gamma_0 - \frac{2\pi}{T} t \right) \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

a : $\epsilon = 0$ の場合の解

解を (2.38) 式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x_{A,0} &= a_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + a_2 \cos \frac{2\pi}{T} t \\ x_{B,0} &= b_1 \sin \frac{2\pi}{T} t + b_2 \cos \frac{2\pi}{T} t \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

(2.38) 式を (2.36) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} x_{A,0} &= \frac{\Delta a.1}{\Delta} \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{\Delta a.2}{\Delta} \cos \frac{2\pi}{T} t = X_A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \beta_A \right) \\ x_{B,0} &= \frac{\Delta b.1}{\Delta} \sin \frac{2\pi}{T} t + \frac{\Delta b.2}{\Delta} \cos \frac{2\pi}{T} t = X_B \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \beta_B \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta_A &= \frac{\Delta a.2}{\Delta a.1} \\ \tan \beta_B &= \frac{\Delta b.2}{\Delta b.1} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} X_A &= \frac{\sqrt{\Delta_{a.1}^2 + \Delta_{a.2}^2}}{\sqrt{\Delta^2}} \\ X_B &= \frac{\sqrt{\Delta_{b.1}^2 + \Delta_{b.2}^2}}{\sqrt{\Delta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

上式の Δ の値は次式で示される。ただし $\omega = \frac{2\pi}{T}$ である。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \omega_A^2 - \omega^2, \alpha_2 = -2q_A \omega, \alpha_3 = \frac{K_A}{\gamma_0^3} \omega^2, \alpha_4 = |P_A| \\ \alpha'_1 &= \omega_B^2 - \omega^2, \alpha'_2 = -2q_B \omega, \alpha'_3 = \frac{K_B}{\gamma_0^3} \omega^2, \alpha'_4 = |P_B| \sin 2\pi n' \\ \alpha'_5 &= |P_B| \cos 2\pi n' \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ 0 & \alpha'_3 & -\alpha'_2 & \alpha'_1 \end{vmatrix}, \Delta a.1 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha'_4 & 0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \alpha'_5 & \alpha'_3 & -\alpha'_2 & \alpha'_1 \end{vmatrix}, \Delta a.2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_4 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha'_3 & \alpha'_4 & \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ 0 & \alpha'_5 & -\alpha'_2 & \alpha'_1 \end{vmatrix} \\ \Delta b.1 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_4 & \alpha'_2 \\ 0 & \alpha'_3 & \alpha'_5 & \alpha'_1 \end{vmatrix}, \Delta b.2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \alpha_4 \\ \alpha'_3 & 0 & \alpha'_1 & \alpha'_4 \\ 0 & \alpha'_3 & -\alpha'_2 & \alpha'_5 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

(2.42), (2.43) 式を用いて, (2.41) 式を無次元の型に書きかえると,

$$\bar{X}_A = \frac{X_A}{\frac{H}{3} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h}}$$

$$\frac{2 \left(\frac{\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_B^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_B^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3 \cos 2\pi n' + \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^4 \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^6 \right]^{1/2}}{\left[\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_B} \right) - \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.44)$$

$$\bar{X}_B = \frac{X_B}{\frac{H}{3} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + b)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h}}$$

$$\frac{2 \left(\frac{\rho \pi b^3}{m_B'} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^2 \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^3 \cos 2\pi n' + \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^4 \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^6 \right]^{1/2}}{\left[\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_B^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) - \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.45)$$

および

$$\tan \beta_A = \frac{\left(\frac{m_B'}{m_A'} \right) \left(\frac{a}{b} \right)^3 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_B^2} \right) - \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \cdot \cos 2\pi n'}{\left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \cdot \sin 2\pi n'}$$

$$\tan \beta_B = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) \cos 2\pi n' - \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) \sin 2\pi n'} \quad (2.46)$$

次に共振曲線は (2.32), (2.38), (2.43), (2.44) 式により (2.47), (2.48) 式の様に得られる。

$$\frac{X_A}{X_{SA}}$$

$$\frac{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2 \omega_A^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right) \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2 \omega_A^2} \right) \left(\frac{\xi^6}{\zeta^2 R} \right) \cos 2\pi n' + \left(\frac{\xi^6}{\zeta^2 R} \right)^2 \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^6 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^4 \right]^{1/2}}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2 \omega} \right) - \left\{ \left(\frac{a}{\gamma_0} \right)^6 \left(\frac{2\rho \pi a^3}{m_A'} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_A} \right)^4 \left(\frac{\xi^6}{\zeta^2 R} \right) \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.47)$$

$$\frac{X_B}{X_{SB}}$$

$$\frac{\left[\left(1 - \frac{\zeta^2 \omega^2}{\omega_B^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right) \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^2 \left(1 - \frac{\zeta^2 \omega^2}{\omega_B^2} \right) \left(\frac{\zeta^2 R}{\xi^6} \right) \cos 2\pi n' + \left(\frac{\zeta^2 R}{\xi^6} \right)^2 \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^6 \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^4 \right]^{1/2}}{\left[\left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_B^2} \right) \left(1 - \frac{\zeta^2 \omega^2}{\omega_B^2} \right) - \left\{ \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^6 \left(\frac{2\rho \pi b^3}{m_B'} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_B} \right)^4 \left(\frac{\zeta^2 R}{\xi^6} \right) \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.48)$$

上式で XSA, XSB, ζ , ξ , Rなどは (2.49) 式で与えられる。

$m_A' = m_A + M_A$, $m_B' = M_B + m_B$, (2.32) 式により

$$X_{SA} = \frac{|P_A|}{k_A} \times m_A'$$

同様に $X_{SB} = \frac{|P_B|}{k_B} \times m_B'$

$$\zeta = \frac{\omega_B}{\omega_A} \text{ (固有振動数比)}, \quad \xi = \frac{b}{a} \text{ (球径比)}, \quad R = \frac{m_B'}{m_A'} \text{ (質量比)}$$

(2.94)

b : $\epsilon = \epsilon'$ の場合の解

(2.37) 式に (2.39) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{A,1} + 2q \dot{x}_{A,1} + \omega_A^2 x_{A,1} - \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} \cdot \frac{K_A}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{B,1} &= \pm |P_A| \left\{ \frac{X_A \cdot \omega}{F_A} \cos(\omega t + \beta_A) + \sin \omega t \right\}^2 \\ \ddot{x}_{B,1} + 2q_B \dot{x}_{B,1} + \omega_B^2 x_{B,1} - \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \cdot \frac{K_B}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{A,1} &= \pm |P_B| \left\{ \frac{X_B \cdot \omega}{F_B} \cos(\omega t + \beta_B) - \sin\left(\frac{2\pi}{L} \gamma_0 - \omega t\right) \right\}^2 \end{aligned} \tag{2.50}$$

(2.50) 式は極めて複雑な式であり、内容的には第 1 篇の X 振動と同様である。本文では 2 球の間隔が波長に比較して充分小さく、かつ振子のばねは相当に固い場合について考える。そこで (2.46) 式より $\beta = \frac{\pi}{2}$ とし、かつ X_A, X_B も充分小さいとすれば (2.50) 式は (2.51) 式に書きかえられる。

$$\begin{aligned} x_{A,1} + 2q_A \dot{x}_{A,1} + \omega_A^2 x_{A,1} - \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} \cdot \frac{K_A}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{B,1} &= \pm |P_A| \left\{ 1 - \frac{X_A}{F_A} \omega \right\}^2 \sin^2 \omega t \\ \ddot{x}_{B,1} + 2q_B \dot{x}_{B,1} + \omega_B^2 x_{B,1} - \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \cdot \frac{K_B}{\gamma_0^3} \ddot{x}_{A,1} &= \pm |P_B| \left\{ 1 - \frac{X_B}{F_B} \omega \right\}^2 \sin^2 \omega t \end{aligned} \tag{2.51}$$

(2.51) の右辺の \pm は () 内の値で決まることになるが、振子のばねが充分固く、しかも波長も振子の振巾に比較して充分大きいとすると、 \pm の条件は (1.50) 式と同じになる。故に (2.51) 式の解は Cramér の公式により次のようになる。

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{\sqrt{\Delta_{a,1}^2 + \Delta_{a,2}^2}}{\sqrt{\Delta^2}} \cdot \sin(\omega t + \gamma_A) + \dots \\ x_B &= \frac{\sqrt{\Delta_{b,1}^2 + \Delta_{b,2}^2}}{\sqrt{\Delta^2}} \cdot \sin(\omega t + \gamma_B) + \dots \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \beta_3 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \Delta_{a,1} &= \begin{vmatrix} A & -\alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ B & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} & \Delta_{a,2} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & A & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \beta_3 & B & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \Delta_{d,1} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & A & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ \beta_3 & 0 & B & -\beta_2 \\ 0 & \beta_3 & 0 & \beta_1 \end{vmatrix} & \Delta_{b,2} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & A \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & \beta_1 & B \\ 0 & \beta_3 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.53}$$

たゞし

$$\alpha_1 = \omega_A^2 - \omega^2, \quad \beta_1 = \omega_B^2 - \omega^2,$$

$$\alpha_2 = 2q_A\omega, \quad \beta_2 = 2q_B\omega,$$

$$\alpha_3 = \frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_A} \cdot \frac{K_A}{\gamma_0^3} \omega^2, \quad \beta_3 = \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} \cdot \frac{K_B}{\gamma_0^3} \omega^2 \quad (2.54)$$

$$A = -\frac{8}{3\pi} |P_A| \cdot \left\{ 1 - \frac{X_A}{F_A} \cdot \omega \right\}^2$$

$$B = -\frac{8}{3\pi} |P_B| \cdot \left\{ 1 - \frac{X_B}{F_B} \cdot \omega \right\}^2$$

第3章 波の進行に直角水平方向の干渉 (1) (Y干渉)

第1節 序 説

図2-2に示すように2箇の球の中心を結ぶ線が波の進行方向に対し、直角方向にした場合に波によって球がY振動する場合の干渉の問題を検討する。

図2-7で斜線の部分は2γが小さくなる程流速は早くなり、従ってA, B球には矢記し向きの流体力が作用するというプラントル・チーチェンスの説は既述した通りである。しかし、その流体力を定量的に示した論文は著者の調べた範囲では見当らなかった。このため著者は Lamb や M. Thomson が与えたポランシャルの近似式 (2.65) によって計算してみた。その結果γ方向の流体力は零になる事がわかった。

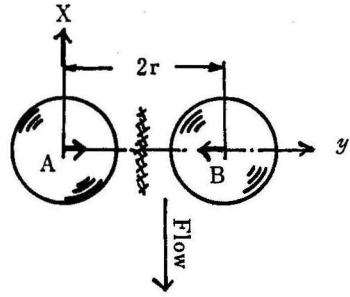


Fig. 2-7 : Schematic diagram of neighboring spheres.

この理由は、図2-5でA球による速度ポテンシャルに対し、B球上で境界条件を満足させるとき、近似的に $\gamma_A = \gamma$ と仮定した事による。この事の物理的意味は、2球の中心間隔に比較して、お互の球径が充分小さいとした事にある。この様な仮定によると、γ方向の流体力がなぜ零になるのかについては、第4節にその理由を充分説明した。第3章では、以上の様な問題を解決するため、とくに新しい速度ポテンシャルの式を提示したものである。

第2節 速度ポテンシャル

図2-7でA, B球は静止して、これに波を与える場合のγ方向の流体力を問題にする場合は、図2-8で静水中をA, B球が同一の速度でx方向に運動する場合を考えると良い。A, B球による速度ポテンシャルφを(2.55)式とする。

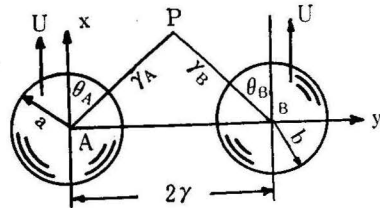


Fig. 2-8 : Schematic diagram.

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi' + \phi'' + \phi''' + \dots \\ \phi' &= \phi'_A + \phi'_B \\ \phi'' &= \phi''_A + \phi''_B \end{aligned} \right\} (2.55)$$

ただしφ', φ''などはφの1次, 2次の近似値である。また suffix A・B は各々A球, B球に対応する。境界条件は(2.56)式になる。

$$\left. \begin{aligned} \text{A球上で } \frac{\partial \phi_A}{\partial \gamma_A} \Big|_{\gamma_A=a} &= U \cos \theta_A, \quad \frac{\partial \phi_B}{\partial \gamma_A} \Big|_{\gamma_A=a} = 0 \\ \text{B球上で } \frac{\partial \phi_B}{\partial \gamma_B} \Big|_{\gamma_B=b} &= U \cos \theta_B, \quad \frac{\partial \phi_A}{\partial \gamma_B} \Big|_{\gamma_B=b} = 0 \end{aligned} \right\} (2.56)$$

図2-9は図2-8を3次元的に示したものであるが、図によると、 $\gamma_A, \gamma_B, \gamma, \theta_A, \theta_B, \varphi_B$ などの間には (2.57) 式が成立する。

ただし、図でP'はP点をZ-y平面に投影したときのZ-y面との交点を示す。

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_A \sin \theta_A)^2 &= (\gamma_B \sin \theta_B)^2 \\ + (2\gamma)^2 - 4\gamma\gamma_B \sin \theta_B \sin \varphi_B \\ \gamma_A \cos \theta_A &= \gamma_B \cos \theta_B \end{aligned} \right\} (2.57)$$

(2.57) 式は (2.58) 式になる。

$$\gamma_A^2 = \gamma_B^2 + 4\gamma^2 - 4\gamma\gamma_B \sin \theta_B \sin \varphi_B \quad (2.58)$$

(2.58) 式によって次式が得られる。

$$\frac{\cos \theta_A}{\gamma_A^2} = \frac{\gamma_B \cos \theta_B}{\{\gamma_B^2 + 4\gamma^2\}^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{6 \cdot \gamma \cdot \gamma_B \sin \theta_B \sin \varphi_B}{\gamma_B^2 + 4\gamma^2} \right\} + (\text{微小項})$$

同様にして

$$\frac{\cos \theta_B}{\gamma_B^2} = \frac{\gamma_A \cos \theta_A}{\{\gamma_A^2 + 4\gamma^2\}^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{6 \cdot \gamma \cdot \gamma_A \sin \theta_A \sin \varphi_A}{\gamma_A^2 + 4\gamma^2} \right\} + (\text{微小項})$$

(2.59)

従って (2.59) 式の関係を用いて境界条件 (2.56) 式を満足するようにラプラスの式 (1.10) を解けばよいのであるが、この事は第2章第1節でのべたので、こゝでは結論だけを示す。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{U a^3}{2 \gamma_A^2} \cos \theta_A - \frac{U a^3 b^3}{4 (b^2 + 4 \gamma^2)^{3/2}} \frac{\cos \theta_B}{\gamma_B^2} \left[1 - \frac{3 (b^2 - 4 \gamma b \sin \theta_B \sin \varphi_B)}{b^2 + 4 \gamma^2} \right. \\ & \left. - \frac{30 \cdot \gamma \cdot b^3}{(b^2 + 4 \gamma^2)^2} \sin \theta_B \sin \varphi_B \right] - \frac{U b^3}{2 \gamma_B^2} \cos \theta_B - \frac{U a^3 b^3}{4 (a^2 + 4 \gamma^2)^{3/2}} \frac{\cos \theta_A}{\gamma_A^2} \left[1 - \right. \\ & \left. \frac{3 (a^2 - 4 \gamma a \sin \theta_A \sin \varphi_A)}{a^2 + 4 \gamma^2} - \frac{30 \cdot \gamma \cdot a^3}{(a^2 + 4 \gamma^2)^2} \sin \theta_A \cdot \sin \varphi_A \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

(2.60) 式は (2.55) 式の ϕ'' の近似まで計算したものである。

第3節 球に作用する流体力

3.3.1 流れの中におかれた流体力

球に作用する流体力は (1.7) 式により、

$$P = \rho \left[F(t) - \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (2.61)$$

(2.61) 式の $F(t)$ は積分定数であり、 P は閉曲面上の単位面積に作用する圧力である。 P の x, y, z 方向の成分を P_x, P_y, P_z とするとA球については (2.62) 式になる。(図2-9参照)

$$\left. \begin{aligned} P_x = & - \int_0^{\theta-\pi} \int_0^{\varphi-2\pi} (p)_{r_A=a} a^2 \cdot \cos \theta_A \cdot \sin \theta_A \cdot d\theta_A \cdot d\varphi_A \\ P_y = & - \iint (p)_{r_A=a} a^2 \cdot \sin^2 \theta_A \cdot \sin \varphi_A \cdot d\theta_A \cdot d\varphi_A \\ P_z = & - \iint (p)_{r_A=a} a^2 \cdot \sin^2 \theta_A \cdot \cos \varphi_A \cdot d\theta_A \cdot d\varphi_A \end{aligned} \right\} (2.62)$$

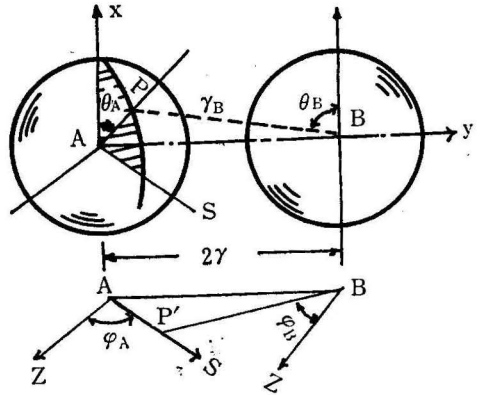


Fig. 2-9 : Schematic diagram.

さて、A球に作用する流体力を直角座標を用いて計算するわけであるが、図2-9によりもし球が振動していれば、 $\gamma_A, \gamma_B, \theta_A, \theta_B, \varphi_A, \varphi_B$ の間には(2.63)式の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_A &= \{ (x-x_0)^2 + (y-y_{0A})^2 + (Z-Z_0)^2 \}^{1/2} \\ \gamma_B &= \{ (x-x_0)^2 + (y-2\gamma-y_{0B})^2 + (Z-Z_0)^2 \}^{1/2} \\ \text{および} \\ x-x_0 &= \gamma_A \cos \theta_A = \gamma_B \cos \theta_B \\ y-y_{0A} &= \gamma_A \sin \theta_A \cdot \sin \varphi_A \\ Z-Z_0 &= \gamma_A \sin \theta_A \cdot \cos \varphi_A = \gamma_B \sin \theta_B \cdot \cos \varphi_B \\ y-y_{0B} &= 2\gamma - \gamma_B \sin \theta_B \sin \varphi_B \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

(2.63)式で x_0, Z_0, y_{0A}, y_{0B} は球が運動しているときの静止位置からの球の中心までの x, y, Z 軸上の距離を示す。

本文では2球が静止している場合を考えるので、 x_0, Z_0, y_{0A}, y_{0B} などは無視して流体力を計算する。(このことは球が運動していてもその振巾が区間距離に対し充分小さいとした場合を考えてもよい)。(2.53), (2.63)式を用いて(2.60), (2.61)式よりPを計算し、その結果を(2.62)式に代入するとA球に対する流体力として(2.64)式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 U \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{b^3}{(a^2+4\gamma^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{a^2 b^3}{(a^2+4\gamma^2)^{3/2}} + \dots \right\} \\ P_y &= \frac{54}{35} \frac{\rho \pi \gamma a^3 \cdot b^3}{(a^2+4\gamma^2)^{3/2}} \cdot U^2 \left\{ 1 - \frac{5}{2} \frac{a^2}{(a^2+4\gamma^2)} + \frac{b^3}{2(a^2+4\gamma^2)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{11}{4} \frac{a^2 b^3}{(a^2+4\gamma^2)^{3/2}} + \frac{15}{4} \frac{a^4 b^3}{(a^2+4\gamma^2)^{3/2}} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

(2.60)式に対し、Lamb や M.Thomson の著書に書かれてあるポテンシャルは第2章第1節に記述したと同様の計算により(2.65)式になる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{U}{2} a^3 \left\{ \frac{1}{\gamma_A^2} + \frac{b^3 \gamma_A}{2 (2\gamma)^6} + \frac{a^3 b^3}{4 \gamma_A^2 (2\gamma)^6} \right\} \cos \theta_A \\ &\quad - \frac{U}{2} b^3 \left\{ \frac{1}{\gamma_B^2} + \frac{a^3 \gamma_B}{2 (2\gamma)^6} + \frac{a^3 b^3}{4 \gamma_B^2 (2\gamma)^6} \right\} \cos \theta_B \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

(2.65)式を用い、上記同様にして球に作用する流体力を計算すると、(2.66)式になる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 \dot{U} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{\gamma} \right)^3 + \frac{3}{256} \left(\frac{a \cdot b}{\gamma^2} \right)^3 + \dots \right\} \\ P_y &= 0 \\ P_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

結局 Lamb などに書かれてあるポテンシャルの近似式では y 方向に流体力は作用しないことになる。
注：速度ポテンシャルの近似式で、第2章第1節に述べた(2.19)式と(2.65)式は異なることを注意すべきである。前者は2球が同一直線上を運動する場合であるが、後者は2球が平行に運動する場合である。

3.3.2) 波動の中におかれた流体力

(2.64)式の P_y は2球がUの速度で平行に運動する場合、または2球が静止してこれに速度Uの流れがある場合の球に作用する y 方向の流体力である。波動の場合は波の速度ポテンシャル(1.22)式により

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (h+Z)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{L} x - \omega t \right) \quad (2.67)$$

(2.67) 式の u の値は近似的には (2.64) 式の U に相当する。今 P_y だけについて論ずる場合は球が U の速度で x 方向に運動するかわりに、球は x 方向に静止して、これに $-U$ の流れがあると考えてもよい。従って、このようにすると (2.64) 式の U は次式になる。ただし球径は波長に比較して充分小さいとした。

$$U^2 = (-u)^2 = \frac{H^2 \omega^2}{4} \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (h+Z)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right\}^2 \sin^2 \omega t \quad (2.68)$$

(2.64) 式の P_y に関する右辺第 2 項以下を無視して、これに (2.68) 式を代入すると、

$$P_y \doteq \frac{2}{5} \frac{\rho \pi H^2 \omega^2 a^3 b^3 r}{(a^2 + 4\gamma^2)^{5/2}} \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell+a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right\}^2 \sin^2 \omega t \quad (2.69)$$

(2.69) 式を無次元の形に書き直すと $|P_y| = 2P_0$ とおいて

$$\bar{P}_0 = \frac{P_0}{\frac{4}{5} \rho \pi^3 \left(\frac{Hb}{T}\right)^2 \cdot \frac{b}{a}} = \frac{\left(\frac{a}{\gamma}\right)^4 \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell+a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right\}^2}{\left\{ 4 + \left(\frac{a}{\gamma}\right)^2 \right\}^{5/2}} \quad (2.70)$$

また

$$\bar{\bar{P}}_0 = \frac{P_0 \left\{ 4 + \left(\frac{a}{\gamma}\right)^2 \right\}^{5/2}}{\frac{4}{5} \cdot \rho \cdot \pi^3 \left(\frac{Hb}{T}\right)^2 \cdot \frac{b a^3}{\gamma^4}} = \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell+a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right\}^2 \quad (2.71)$$

ただし

$$P_0 \doteq \frac{1}{5} \frac{\rho \pi H^2 \omega^2 a^3 b^3 \gamma}{(a^2 + 4\gamma^2)^{5/2}} \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell+a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right\}^2 \text{ であり、かつ}$$

P_y の振巾を示す。

第 4 節 振動方程式とその解

3.4.1) 運動エネルギー

球 A, B が各々 U_A, U_B の速度で向い合って運動する場合の流体の運動エネルギーと球自身の運動エネルギーの和は第 2 章第 2 節に述べた (2.21) 式で与えられる。ただし第 3 章では中心間隔を 2γ とする。

$$E = \frac{1}{2} (M_A + m_A) U_A^2 + \frac{1}{2} (M_B + m_B) U_B^2 + \frac{2\rho\pi a^3 d^3}{8\gamma^3} U_A \cdot U_B \quad (2.21)$$

3.4.2) 振動方程式

図 2-10 により、

$$2\gamma = 2\gamma_0 - y_A - y_B \quad (2.72)$$

dissipation function (F) とポテンシャルエネルギー (U) は (2.73) 式である。

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} C_A \dot{y}_A^2 + \frac{1}{2} C_B \dot{y}_B^2 \\ U &= \frac{1}{2} k_A y_A^2 + \frac{1}{2} k_B y_B^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

(2.73) 式で \dot{y}_A, \dot{y}_B は各々 A, B 球の振動速度である。以上の式, (2.21), (2.72), (2.73) を (1.12) 式に代入すると次式が得られる。ただし、

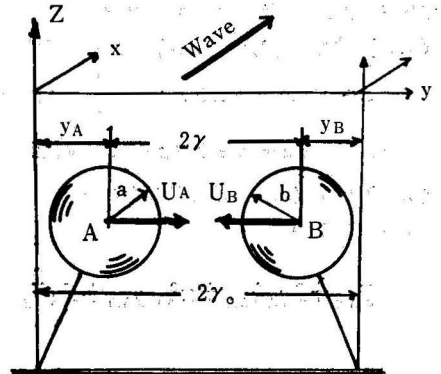


Fig. 2-10: Schematic diagram of Y vibration.

(2.21) 式の U_A, U_B は各々 \dot{x}_A, \dot{x}_B におきかえた。

$$\left. \begin{aligned} (M_A + m_A) \ddot{y}_A + \frac{2\rho\pi a^3 b^3}{8\gamma^3} \ddot{y}_B - \frac{6\rho\pi a^3 b^3 \dot{y}_A \dot{y}_B}{16\gamma^4} + K_A y_A + C_A \dot{y}_A &= P y_A \\ (M_B + m_B) \ddot{y}_B + \frac{2\rho\pi a^3 b^3}{8\gamma^3} \ddot{y}_A - \frac{6\rho\pi a^3 b^3 \dot{y}_A \dot{y}_B}{16\gamma^4} + K_B y_B + C_B \dot{y}_B &= P y_B \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

(2.74) 式でかりに、

$$M_A = M_B = M, \quad m_A = m_B = m, \quad \dot{y}_A = \dot{y}_B = \dot{y}, \quad \ddot{y}_A = \ddot{y}_B = \ddot{y}, \\ k_A = k_B = k, \quad C_A = C_B = C, \quad b = a \text{ とおくと (2.75) 式になる。}$$

$$\left\{ M + m + \frac{3m a^3}{8\gamma^3} \right\} \ddot{y} + C \dot{y} + k y - \frac{9m a^3}{16\gamma^4} \dot{y}^2 = P y \quad (2.75)$$

(2.75) 式は 1 箇の振子が壁にむかって振動する場合の方程式である。ただし γ は振動中の球の中心と壁との距離を示す。

3.4.3) 振動方程式の解(1)

(2.74) 式で左辺第 3 項は省略する。(この項は他の項に比較して充分小さいということが理由であるが、解が難かしくなると云うことにもよる)。

第 2 項の分母は (2.33) 式と同様次のように展開される。

$$\frac{1}{8\gamma^3} = \frac{1}{(2r_0 - y_A - y_B)^3} = \frac{1}{8r_0^3} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{y_A + y_B}{2r_0} \right) + 6 \left(\frac{y_A + y_B}{2r_0} \right)^2 + \dots \right\} \quad (2.76)$$

(2.76) 式で右辺第 3 項以下は充分小さい値であるので本文では第 2 項までの近似で考えることにする。

(2.76) 式を (2.74) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_A + 2q_A \dot{y}_A + \omega_A^2 y_A + K_A \ddot{y}_B + \frac{\epsilon_A}{b} (y_A + y_B) \dot{y}_B &= P y_A / (M_A + m_A) \\ \ddot{y}_B + 2q_B \dot{y}_B + \omega_B^2 y_B + K_B \ddot{y}_A + \frac{\epsilon_B}{b} (y_A + y_B) \dot{y}_A &= P y_B / (M_B + m_B) \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

ただし

$$2q = \frac{C}{M+m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{M+m}, \quad K = \frac{2\rho\pi a^3 b^3}{8\gamma^3(M+m)}, \quad \epsilon = \frac{6\rho\pi a^3 b^4}{16\gamma^4(M+m)}$$

である。なお suffix A, B は各々 A 球, B 球に対応する

(2.77) 式の解として (2.78) 式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} y_A &= y_{A.0} + \epsilon_A y_{A.1} + \epsilon_A^2 y_{A.2} + \dots \\ y_B &= y_{B.0} + \epsilon_B y_{B.1} + \epsilon_B^2 y_{B.2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

(2.78) 式を (2.77) 式に代入すると

$\epsilon = \epsilon_0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{A.0} + 2q_A \dot{y}_{A.0} + \omega_{0A}^2 y_{A.0} + K_A \ddot{y}_{B.0} &= P y_A / (M_A + m_A) \\ \ddot{y}_{B.0} + 2q_B \dot{y}_{B.0} + \omega_{0B}^2 y_{B.0} + K_B \ddot{y}_{A.0} &= P y_B / (M_B + m_B) \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

$\epsilon = \epsilon_1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_{A,1} + 2q_A \dot{y}_{A,1} + \omega_{0,A}^2 y_{A,1} + K_A \epsilon_B / \epsilon_A \ddot{y}_{B,1} + \frac{\ddot{y}_{B,0}}{b} (y_{A,0} + y_{B,0}) &= 0 \\ \ddot{y}_{B,1} + 2q_B \dot{y}_{B,1} + \omega_{0,B}^2 y_{B,1} + K_B \frac{\epsilon_A}{\epsilon_B} \ddot{y}_{A,1} + \frac{\ddot{y}_{A,0}}{b} (y_{A,0} + y_{B,0}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

(2.79) 式の解として (2.81) 式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} y_A &= a_0 + a_1 \sin 2\omega t + a_2 \cos 2\omega t \\ y_B &= b_0 + b_1 \sin 2\omega t + b_2 \cos 2\omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

なお, (2.79) 式の右辺の Py の値は (2.69) 式で与えられる。本文では, $Py_A = Py_B$ と仮定する。

ただし, (2.69) 式で Py は 2 球間の間隔 ($2r$) の函数になっている。このことは, 解析を極めて苦難にする。従って本文では $r = r_0$ (図 2-10 参照) とする。結局 (2.79) 式の左辺では r を変数として取扱ったが, 右辺では r を定数で扱ったことになり, いささか矛盾はするのである。

$a : \epsilon = \epsilon^\circ$ の解

(2.81) 式を (2.79) 式に代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{|Py|}{2(M_A + m_A)\omega_{0,A}^2}, & b_0 &= \frac{|Py|}{2(M_B + m_B)\omega_{0,B}^2} \\ |Py| &= \frac{2}{5} \frac{\rho \pi H^2 \omega^2 a^3 b^3 \gamma}{(a^2 + 4r^2)^{5/2}} \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(\ell + a)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2 \\ a_1 &= \frac{\Delta a.1}{\Delta}, & a_2 &= \frac{\Delta a.2}{\Delta}, & b_1 &= \frac{\Delta b.1}{\Delta}, & b_2 &= \frac{\Delta b.2}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & -\beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} & \Delta a.1 &= \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \\ -\alpha_A & \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ -\alpha_B & -\beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ & \Delta a.2 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_A & 0 & -\alpha_3 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & -\alpha_B & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ \Delta b.1 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_A & -\alpha_3 \\ -\beta_3 & 0 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & -\beta_3 & -\alpha_B & \beta_1 \end{vmatrix} & \Delta b.2 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_A \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_3 & \beta_2 & -\alpha_B \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

(2.83) 式の各係数を (2.84) 式に示す。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \omega_{0,A}^2 - 4\omega^2, & \alpha_2 &= 4q_A\omega, & \alpha_3 &= 4K_A\omega^2, & \alpha_A &= \frac{|Py|}{2(M_A + m_A)} \\ \beta_1 &= \omega_{0,B}^2 - 4\omega^2, & \beta_2 &= 4q_B\omega, & \beta_3 &= 4K_B\omega^2, & \alpha_B &= \frac{||Py||}{2(M_B + m_B)} \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

さて, (2.83) 式は複雑な式であるので, 本文では減衰項 (α_2, β_2) を無視して考えると, 0 次近似解は次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} y_{A,0} &= a_0 + Y_{0,A} \cos(2\omega t - \delta_{0,A}) \\ y_{B,0} &= b_0 + Y_{0,B} \cos(2\omega t - \delta_{0,B}) \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{0,A} &= \frac{\alpha_A \beta_1 + \alpha_3 \alpha_B}{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_3 \beta_3} \\ Y_{0,B} &= \frac{\alpha_B \alpha_1 + \beta_3 \alpha_A}{\alpha_1 \beta_1 - \alpha_3 \beta_3} \\ \tan \delta_{0,A} &= 0, \quad \tan \delta_{0,B} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

とくに簡単な場合として、 $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_A = \alpha_B$ の場合 (A, B 球が全く同一のもの) を考えると、(2.85) 式は (2.87) 式になる。

$$y = \frac{|Py|}{2(M+m)\omega^2} + \frac{|Py|}{2(M+m)\sqrt{[\omega^2 - 4\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\}\omega^2]^2}} \cos 2\omega t \quad (2.87)$$

ただし a は球の半径、 $|Py|$ は (2.82) 式で与えられる。

b : $\epsilon = \epsilon^1$ の解

この場合も 0 次近似解と同様にして得られるが、本文では省略する。

3.4.4) 振動方程式の解 (2)

前項に示したように A 球, B 球が波動の中で Y 振動する場合の解は得られた。しかしながら非常に複雑な解であるので、本文ではなるべく簡単な場合を考えてみる。

図 2-11 に示すように A 球, B 球が全く同一の振子の場合である。(この場合の減衰項を無視した解は (2.87) 式で与えられるが、ここでは減衰項を考慮してみる。図 2-11 の (a) で A 球 B 球が全く等しいものであれば、2 球の運動を考えるかわりに、図 2-11 の (b) に示すように、1 箇の球が境界壁に垂直に運動する場合を考えるとよい。この場合は、(2.82), (2.83) 式から得られるが、ここでは直接 (2.75) 式の解を求めてみる。(2.79), (2.80) 式により、 $\epsilon = \epsilon^0$ の場合

$$(1+K) \ddot{y} + 2q \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{Py}{M+m}$$

$\epsilon = \epsilon^1$ の場合

$$(1+K) \ddot{y}_1 + 2q \dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = -2\ddot{y}_0 \cdot \frac{y_0}{b}$$

(2.88)

(2.88) 式に類似の解はこれまでも記述したので、その結果だけを示す。

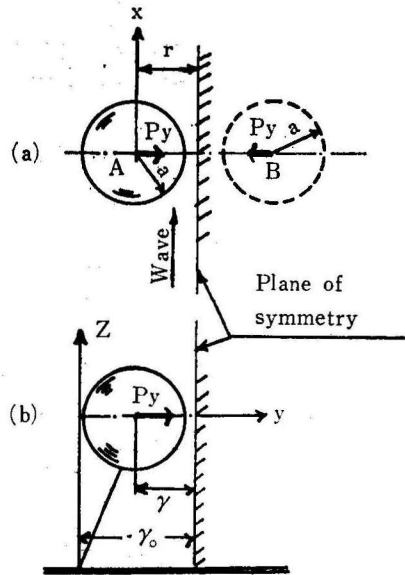


Fig. 2-11: Sphere moving at right angle to a rigid plane boundary.

$$y_0 = \frac{|Py|}{2(M+m)\omega_0^2} \left[1 - \frac{\sin(2\omega t - \delta)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{\gamma_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left(\frac{4q\omega}{\omega_0^2}\right)^2}} \right] \quad (2.89)$$

$$\tan \delta = \frac{\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{\gamma_0}\right)^3\right\} - 1}{4q\omega / \omega_0^2}$$

減衰項は充分小さいとして、 $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$y = \frac{|Py|}{2(M+m)\omega_0^2} \left[1 \pm \frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{\gamma_0}\right)^3\right\}\right]^2}} \right] \quad (2.90)$$

(2.90) 式をグラフに示すと、図 2-12 のようになり平均的な振巾を \bar{y} とすると、 \bar{y} は (2.91) 式で与えられる。

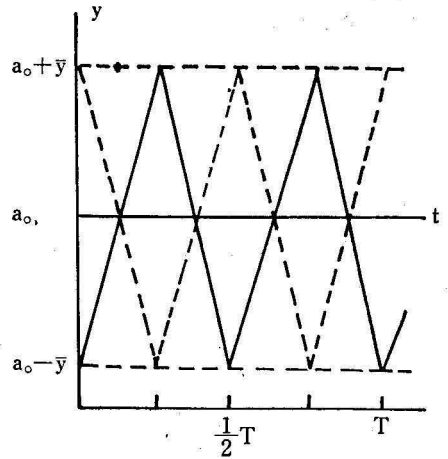


Fig. 2-12: The deflections in Y direction Computed from eq (2.90)

$$\bar{y} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{|Py|}{2(M+m)\omega_0^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{\gamma_0}\right)^3\right\}\right]^2}} \quad (2.91)$$

図 2-12 で実線は (2.90) 式の右辺第 2 項が正のときであり、点線は負のときを示す。(2.91) 式に (2.69) 式を代入して多少変形すると、(2.92) 式が得られる。

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}}{\frac{3}{320} \left(\frac{H^2}{\gamma_0}\right) \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h} \right\}^2}$$

$$= \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{\gamma_0}\right)^3 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{\left\{1 + \frac{a^2}{4\gamma_0^2}\right\}^{-5/2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{\gamma_0}\right)^3\right\}\right]^2}} \quad (2.92)$$

第4章 波の進行方向に直角水平方向の干渉 (2)

第1節 序 説

図2-3に示すように2箇の球の中心を結ぶ線が波の進行に対し直角方向にした場合で、しかも2箇の振子が波の進行方向に同様の振動をする場合に中心間隔がお互の球の振動に及ぼす影響について考察した。この場合の速度ポテンシャルはLambやM.Thomsonの近似計算によれば(2.65)式で与えられるが、著者によれば(2.60)式で与えられる。

A, B球が異なる場合は実験も極めて苦難になるので、本文ではA, B球が同じ場合を考え図2-11に示したようにA, B球の間隔の垂直に2等分する平面を固定壁と仮定して、この固定壁の近傍(造波水路壁の近傍)に1箇の倒立振子をおいて実験を行なった。

次にこのような水中の振動では振動方程式をたてる場合に、流体抵抗をどのように取扱うかが問題になってくる。例えばA, B. Basset (1888)の云うように球の運動の速度が大きいと球のまわりに発生する熱の作用で運動状態が異なるので球の速度は小さいとして、速度の自乗に比例する抵抗は考えないで方程式を取扱うものもある。しかしNewton (1642~1727)の云うように慣性力を考える場合は自乗の項を考える必要がある。

たゞ、これらの項がどの程度影響を有するかが問題である。著者によると(P148の結論)、これらの項はそれほど大きく影響しないことを示した。従って本文でも省略する。たゞし ξ_0 の値が充分大きい場合は、やはり省略出来ないのは云うまでもない。

第2節 球に作用する流体力

4.2.1) 流れの中におかれた流体力

球に作用する流体力は(2.66), または(2.64)式で与えられる。

Lambなどの近似値

$$P_1 = -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 \dot{U} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{\gamma} \right)^3 + \dots \right\} \quad (2.66)$$

著者の解

$$P_1 = -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 \dot{U} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{b^3}{(a^2 + 4\gamma^2)^{3/2}} \dots \right\} \quad (2.64)$$

たゞし、 2γ は2球の中心間隔である。

上式は球が、 x 方向に運動する場合の球に作用する流体抵抗に相当する。従って一般に定義される1箇の球の仮想質量($2/3 \cdot \rho \cdot \pi \cdot a^3$)が、2球を接近させると、約 $\frac{3}{16} \left(\frac{b}{\gamma} \right)^3$ または $\frac{3}{2} \frac{b^3}{(a^2 + 4\gamma^2)^{3/2}}$ 倍だけ増加することになる。

4.2.2) 球に作用する波動による外力

球と流体との相対速度の自乗に比例する流体力の項を無視すると、球に作用する外力は(1.33)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= P_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ P_0 &= \frac{1}{3} \rho \pi^3 d^3 \frac{H}{T^2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+Z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

第3節 振動方程式とその解

4.3.1) 振動方程式

振動の基本式は次のようになる。ただし抵抗の非線形の項は無視する。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_x = P_1 + P_2 \tag{2.93}$$

(2.93) 式に (2.66) 又は (2-64) 式と (1.28) 式を代入すると、A球については、

$$\left[M+m \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{\gamma} \right)^3 \right\} \right] \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \tag{2.94}$$

又は

$$\left[M+m \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{b^3}{(a^2 + 4\gamma^2)^{3/2}} \right\} \right] \ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \tag{2.95}$$

(2.94) 式で \ddot{x} は、(2.66) 式又は(2.64) 式の \dot{U} を \ddot{x} におきかえたものである。ただし上式の M, m, C, k, x などはA球に対するものであるから、もしB球を考える場合は上式の a を b に入れかえ、かつ $M, m, C, k,$ などはB球に対するものを考えることになる。上式で球が γ 方向にも運動するならば、図2-11で $\gamma = \gamma_0 - \gamma$ であるが、本文では γ 方向の振動は考えないので $\gamma = \gamma_0$ である。

4.3.2) 振動方程式の解

(2.94), (2.95) 式の解の結果だけを示す。

$$x = X \sin (\omega t + \beta)$$

$$\bar{X} = \frac{X/H}{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+Z) / \sinh \frac{2\pi}{L}h} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cdot \frac{m}{M+m}}{\sqrt{\left[1 - F \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{\omega C}{\omega_0^2 (M+m)} \right]^2}} \tag{2.96}$$

$$\tan \beta = \frac{1 - F \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{C \cdot \omega / \omega_0^2 (M+m)} \tag{2.97}$$

ただし、 F の値はA球については、

Lambなどによると、

$$F = 1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{b}{\gamma_0} \right)^3$$

著者の式では

$$F = 1 + \frac{3}{2} \frac{m}{(M+m)} \frac{b^3}{(a^2 + 4\gamma_0^2)^{3/2}} \tag{2.98}$$

もし、B球を考えるとときは上式の a, b を入れかえるとよい。

なお、(2.96) 式で X は球の振巾、 H は波高、 \bar{X} は X を無次元で表示したものである。

第4節 共振曲線と位相曲線

4.4.1) 共振曲線

(1.33) 式と (2.96) 式により次のようになる。

$$\frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - F \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{\omega \cdot C}{\omega_0^2 (M+m)} \right]^2}} \tag{2.99}$$

ただし

$$X_{st} = \frac{P_0}{K} \text{である。}$$

4.4.2) 位相曲線

(2.97) 式より

$$\beta = \tan^{-1} \left\{ \frac{1 - F \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{2 \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \right\} \quad (2.100)$$

ただし

$$\zeta = \frac{C}{C_c} \text{減衰係数比である。}$$

$$C_c = 2 \omega_0 (M + m)。$$

第5章 実験装置と実験方法

第1節 実験装置

実験装置は第1篇の場合(141)と全く同様である。たゞX干渉の場合とY干渉の1部において、2箇の球を同時に振動させ振動を測定した。

第2節 測定方法

測定方法も第1篇の場合(P141)と全く同様であるが、X干渉の場合の波高計は上流側の球の位置に1箇設置した。このような干渉の問題では、球の変位が大なる時は興味があり、また必要な課題でもあると考えるが、変位が大きい場合は計測も相当に難かしくなる。(このような場合の実験も実際に行なったのであるが、振動も極めて複雑になるし、かつ Calibration が難かしい)本実験は主に固いばねについて行なった。

第3節 実験内容

X干渉について、表2-1-1、表2-1-2、Y干渉(I)について表2-2-1、表2-2-2、Y干渉(II)について表2-3に各々板ばねや、波の諸元を示した。

さらに、固有振動数がとくに小さい場合についての実験内容を表2-4に示した。

表2-1-1 実験の諸元（X干渉）

No	γ_0	a. b	$\frac{a}{\gamma_0} \cdot \frac{b}{\gamma_0}$	m_A, m_B	MA, MB	m'_A, m'_B	ω_A	ω_B	$2\rho\pi a^3$	$2\rho\pi b^3$	h	see fig 2.6	摘要
	(cm)	(cm)		(g)	(g)	(g)	(rad/sec)	(rad/sec)	m'_A	m'_B	(cm)	(cm)	
12	16.5	1.88	0.113	2.47	13.8	16.27	34.2	38.6		2.55	40	7.5	中空
13	"	"	"	24.4	13.8	38.2	20.2	22.4		1.08	40	7.5	水入れ
14	11.5	"	0.188	24.4	13.8	38.2	20.2	22.4		1.08	40	7.5	水入れ
15	"	"	"	2.47	13.8	16.27	34.2	38.6		2.55	40	7.5	中空
16	8.7	"	0.216	2.47	13.8	16.27	34.2	38.6		2.55	40	7.5	中空
17	"	"	"	24.4	13.8	38.2	20.2	22.4		1.08	40	7.5	水入れ
18	5	"	0.375	2.47	13.8	16.27	34.2	38.6		2.55	40	7.5	中空
19	"	"	"	24.4	13.8	38.2	20.2	22.4		1.08	40	7.5	水入れ
20	4.1	"	0.456	2.47	13.8	16.27	34.2	38.6		2.55	40	7.5	中空
21	"	"	"	24.4	13.8	38.2	20.2	22.4		1.08	40	7.5	水入れ

ただし ω_A, ω_B は $\gamma_0 \rightarrow \infty$ の場合A球又はB球の固有振動数である。なおA球, B球は各々上流側と下流側の振子を示す。またNo は実験番号を示す。 $m'_A = MA + mA$ $m'_B = MB + mB$

表2-1-2 実験の諸元（X干渉：No18の波形）

No	T	H	L	$\frac{\omega}{\omega_A}$	$\frac{\omega}{\omega_B}$	外力 (dyn)		変位 (mm)		γ_0 (cm)	図
	sec	cm	cm			PA	PB	XA	XB		
18	0.7	7.3	76	0.233	0.25	($\times 980$) 1.18	($\times 980$) 1.22	0.6	0.55	5	図2-13
	1.15	6.6	182	0.142	0.152	2.3	2.8	1.1	1.2	5	図2-14
	1.5	2.6	261	0.109	0.116	1.1	1.1	0.5	0.45	5	

注：表2-1-1, 表2-1-2は図2-6の模型に対する実験内容である。

表2-2-1 実験の諸元（Y干渉）

No.	振子									波				水深	γ_0 (cm)
	球径 d (cm)	球の 質量 M (g)	仮想 質量 m (g)	板ばね の長さ (cm)	板ばね の巾 (cm)	板ばね の厚さ (mm)	板ばね の定 (dyn/cm)	固有振動 数 ω_0 (rad/S)	減衰係数	周 期 T (sec)	波 高 H (cm)	波 長 L (cm)	h (cm)		
22	5.4	17	41	7.5	0.95	0.4	4.74×10^4	29	2.5	0.8 ~1.32	3.8 ~7	97 ~222	40	4	
23	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0.66 ~1.42	3.2 ~7	63 ~243	"	6.5	
24	3.75	2.47	13.8	10	1	0.4	1.26×10^3	13.7	27	0.65 ~1.9	2.2 ~11	66 ~348	40	3	
25	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0.67 ~2.4	1.8 ~10.5	70 ~330	"	7	
26	5.4	17	41	7.5	1	0.4	2.47×10^4	21.4	23.7	0.65 ~2.5	2.5 ~11.7	66 ~473	40	3	
27	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0.66 ~2.5	2.5 ~11.2	63 ~473	"	4.3	
28	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0.66 ~2.2	3.6 ~11.7	63 ~411	"	12	

表 2-2-2 実験の諸元 (Y干渉：波形)

No.	270 (cm)	a, b (cm)		m_A', m_B' (g)	ω_A (rad/S)	ω_B (rad/S)	h (cm)	I (cm)	T (sec)	L (cm)	H (cm)	$\frac{\omega}{\omega_A}$	$\frac{\omega}{\omega_B}$	変位 (mm)		外 t (dyn)		図	摘要		
		Y _A	Y _B											P _A	P _B						
29	4.1	1.88	1.88	33.2	20.2	22.4	40	7.5	0.9	122	9.8	0.347	0.313	0.1	0.03	(×930)	0.115	0.1		水入れ	
30	5	1.88	1.88	38.2	19.8	22.2	40	7.5	0.92	126	10.6	0.345	0.31	—	—	(×930)	—	—		水入れ	
31	8.7	1.88	1.88	33.2	20.2	22.4	40	7.5	0.93	130	11.6	0.334	0.30	0.1	0.078	0.185	0.15			水入れ	
32	11.5	1.88	1.88	38.2	19.8	23.7	40	7.5	0.9	122	7.3	0.353	0.296	—	—	(×930)	—	—			水入れ
33	4.1	1.88	1.88	16.27	36.0	38.5	40	7.5	0.65	66	6.2	0.268	0.25	0.12	0.13	0.26	0.25			中空	
34	4.1	1.88	1.88	16.27	36.0	38.5	40	7.5	0.85	110	8.9	0.205	0.192	0.13	0.1	0.3	0.21			中空	
35	4.1	1.88	1.88	16.27	36.0	38.5	40	7.5	1.15	160	9.8	0.152	0.142	0.035	0.09	0.18	0.16			中空	
36	4.1	1.88	1.88	16.27	36.0	38.5	40	7.5	1.44	250	3.6	0.122	0.113	0.06	0.065	0.127	0.128			中空	

(注) : 1) 表 2-2-1 は図 2-11 に示めすように A, B 球が全く等しいものとして鏡像の原理により 1 箇の球を境界壁に垂直方向に振動させた場合である。表で 70 は静止球の中心との境界壁との間隔を示す。
 2) 表 2-2-1 は図 2-10 に示すように 2 箇の球を用いた Y 干渉の実験内容である。270 は 2 球の静止したときの中心間隔である。

表2-3 実験の諸元（Y干渉）

No.	振子の種類									波の時性		
	球径	球質	の仮	想板	ばね	固有振動	減衰係数	ばね定数	水路壁との距	周期	波高	波長
	α (cm)	M (g)	m (g)	l (cm)	ω_0 rad/S	C (g/S)	k (dyn/S)	h (cm)	γ_0 (cm)	T (sec)	H (cm)	L (cm)
37	3.75	2.47	13.8	7.5	34.8	9.5	5.53×10^4	40	2.30	0.66 ~2.3	1.1~7.3	68.2 ~432
38	3.75	2.47	13.8	7.5	34.8	9.5	5.63×10^4	40	5.50	0.67 ~2.3	1.2~9.5	70.2 ~432
39	3.75	47.47	13.8	7.5	16.2	47.3	12.5×10^4	40	2.00	0.66 ~2.4	1.3~9.6	67 ~453
40	3.75	47.47	13.8	7.5	16.2	47.3	12.5×10^4	40	15.00	0.67 ~2.54	1.7~9.6	69 ~473
41	5.4	16.8	41	8	21.7	25	1.8×10^4	40	2.85	0.65 ~2.5	1 ~ 8	66 ~453
42	5.4	16.8	41	8	21.7	25	1.8×10^4	40	8.00	0.65 ~2.4	1.2~7.9	66 ~473
43	3.75	2.47	13.8	8	14	29.8	0.14×10^4	40	2.50	0.65 ~2.4	1.2~7.8	66 ~453
44	3.75	2.47	13.8	8	14	29.8	0.14×10^4	40	7.00	0.65 ~2.4	2.9~8.1	66 ~453

(注) 表2-3は図2-3に示すように、A・B球が全く等しいものとして、鏡像の原理により、1箇の球を垂直な境界壁に平行に振動させた場合の実験内容を示す。表で γ_0 は静止している球と境界壁との間隔を示す。

表2-4. 図2-a, 図2-b (P187) に対する実験条件

記号	γ_0 (cm)	a, b (cm)	$\frac{a}{\gamma_0}, \frac{b}{\gamma_0}$	m_A, m_B (g)	M_A, M_B (g)	ω_A, ω_B (rad/S)	$\frac{2\rho\pi a^3}{m_A'}, \frac{2\rho\pi b^3}{m_B'}$	ばね長 (cm)	減衰係数 (g/S)	水深 h (cm)	図
●	5.8	2.5	0.43	36.4	171 144	8.06	0.472	0.544	5.5	40	A球 178
○	3.0	2.5	0.083								B球 172
×	5.7	2.5	0.438	36.4	119 93.5	12.3	0.63	0.735	5.5	40	A球 149
●	6.4	2.5	0.391								B球 165
○	30	2.5	0.083								

第6章 理論と実験結果の比較

第1節 X干渉について

図2-1に示すように波の進行方向に2箇の球を接近させておいた場合の干渉について述べる。

6.1.1) 波形と変位の関係

波形と変位の関係を図2-13, 図2-14, に示した。図に対する実験内容は表2-1-2に示してある。図は2球の間隔を5cmにたもち波の周期を変化させた場合の振動の1例である。

波高計はA球（上流側）の位置に設置してある。図によると波の周期を変えた場合のA, B球の振動の関係は一様である。このことは実験に使用したばねが十分に固かったことにもよるので、この問題は後で理論的に考察する。

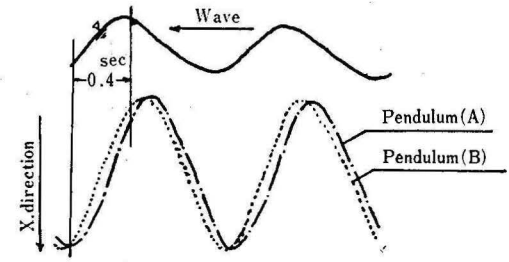
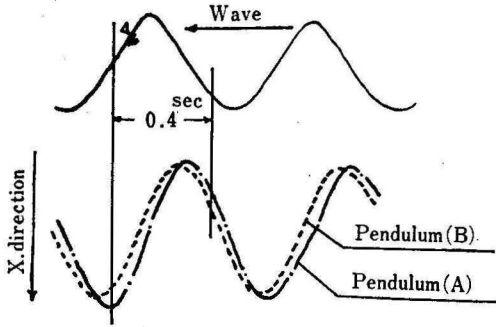


Fig. 2-13 :

Fig. 2-14 : Wave-profiles and deflections in X direction.

6.1.2) 球に作用する外力

球に作用する外力は (2.32) 式により, (2-101) 式の無次元の型で表わせる。

$$\bar{P}_A = \frac{|P_A|}{\frac{1}{8} \cdot \rho \cdot \pi^3 \cdot (2a)^3 \cdot \frac{H}{T^2}} = \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + a)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h}$$

$$\bar{P}_B = \frac{|P_B|}{\frac{1}{8} \cdot \rho \cdot \pi^3 \cdot (2b)^3 \cdot \frac{H}{T^2}} = \frac{\cosh \frac{2\pi}{L} (\ell + b)}{\sinh \frac{2\pi}{L} h}$$

(2-101)

(2-101) 式により実験値を表 2-1-1 で整理したものが, 図 2-15 および 図 2-16 である。図によ

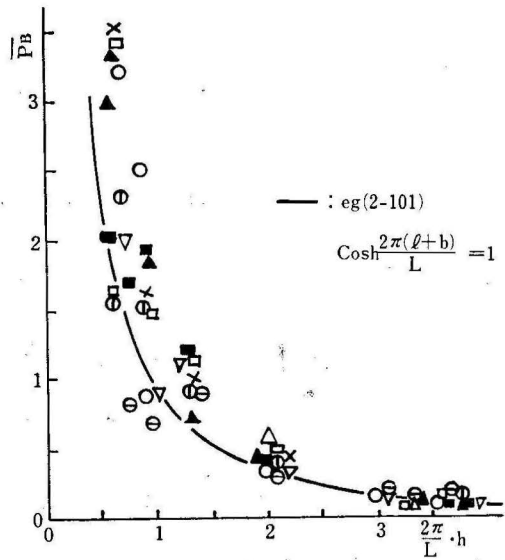
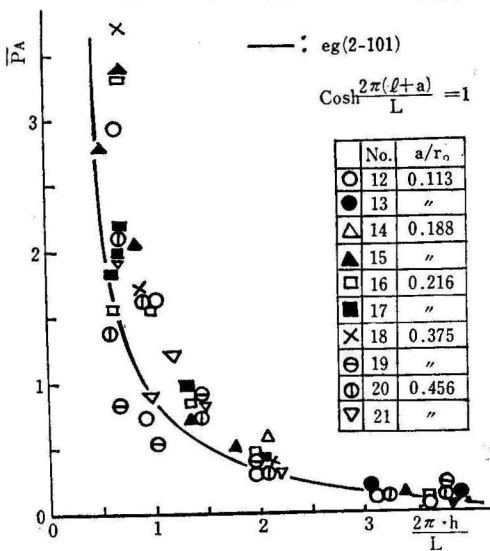


Fig. 2-15 : Computed curves and experimental results.

Fig. 2-16 : Computed curves and experimental results.

ると、理論と実験値は一致する傾向にある。

なお、図2—16に用いた符号は、図2—15の場合と同一である。ただし、 $a = b$ の場合である。

6.1.3) 球の変位

(2—44), (2—45)式と実験値(表2—1—1で球の中に水を入れた場合)の比較を図2—17, 図2—19に示した。また、表2—1—1で球を中空にした場合の比較を図2—18, 図2—20に示した。

図によると理論と実験値は比較的一致している。上流側の球の振巾(XA)と下流側の球の振巾(XB)とでは、理論的には下流側の球の振巾は小さく、従って干渉の効果が現われる。このような問題について、定常流中での円柱の相互干渉に関する実験結果を示した永井らの論文⁴⁰⁾によると、下流側の円柱に作用する力が小さくなっている理由として、円柱間の流体が

静止状態に近づくこと、および下流側円柱の背後では、逆流が生ずるため逆流による負の力が作用することをあげている。本論文の場合も、同様な事が上述の干渉の効果の理由の一つとして考えられる。以上は、2箇の球の質量が同一の場合であったが、つぎに球径は同一であるが、上流側の球に水を入れ、下流側の球を中空にした場合にはどのようなになるかを理論的に調べたものが、図2—21, 2—22である。図によると、中空の球の方が、球に水を入れた場合のA球より振巾は大きくなっている。最後に固有振動数がとくに小さい場合について理論と実験値の比較を図2—a, および図2—bに示した。これらの図によると干渉の効果がよく表われている。

なお図2—aおよび図2—bの実験条件を表2—4に示してある。また、表2—4の記号の説明は表2—1と同じである。

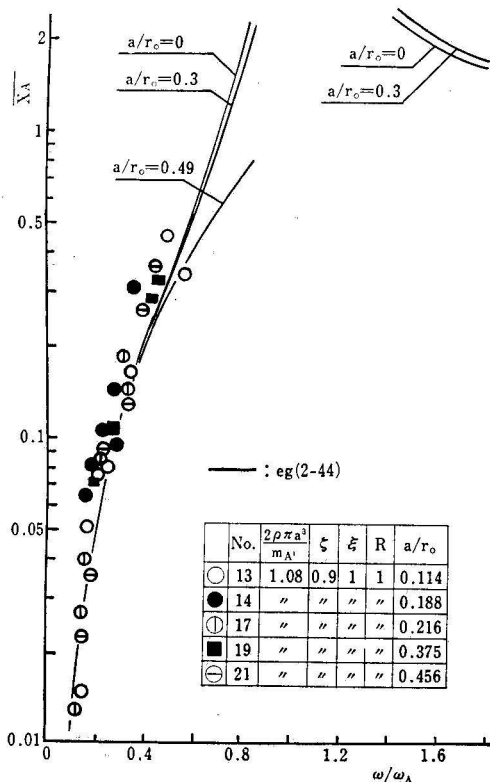


Fig. 2—17: Theoretical curves and experimental data.

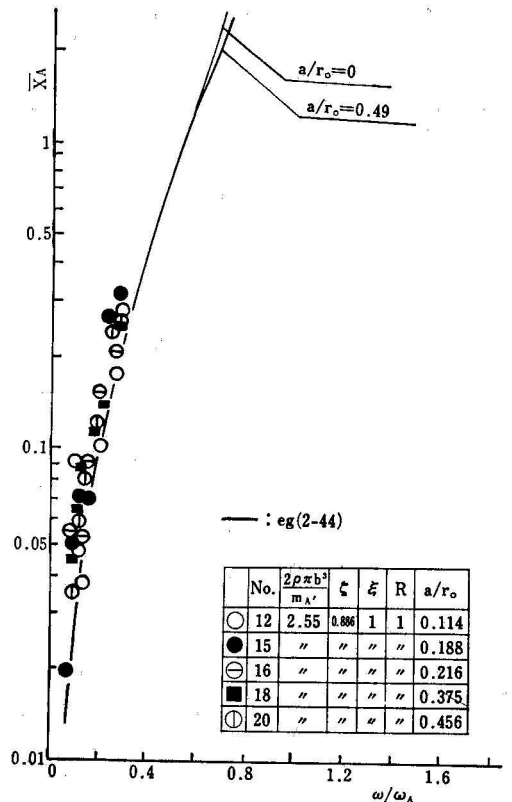


Fig. 2—18: Theoretical curves and experimental data.

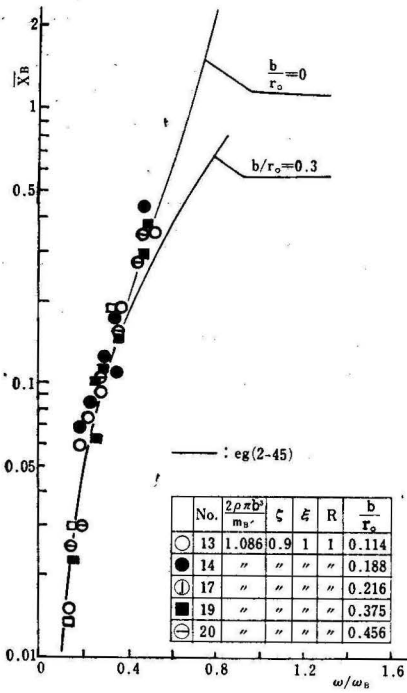


Fig. 2-19: Theoretical curves and experimental data.

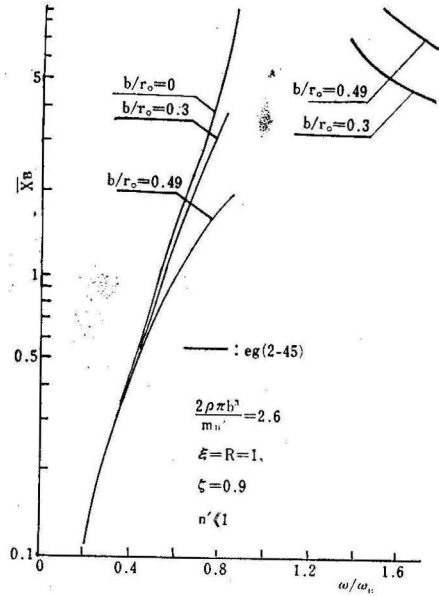


Fig. 2-20: Theoretical curves.

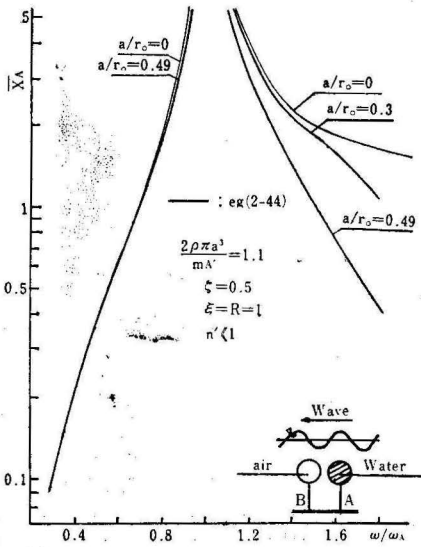


Fig. 2-21: Theoretical curves.

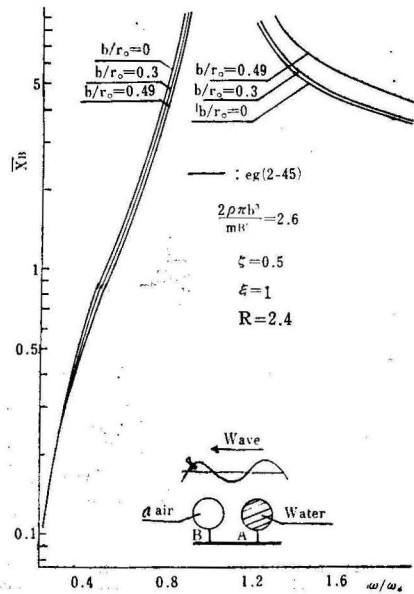


Fig. 2-22: Theoretical curves.