

琉球大学学術リポジトリ

線形・集中常数系の数値解法(1)

メタデータ	言語: ja 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2012-07-13 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 東盛, 良夫, Higashimori, Yoshio メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/24955

線形・集中常数系の数値解法 (I)

東 盛 良 夫*

Evaluation of Linear Lumped Constant
Network

Yoshio Higashimori

Abstract

As analysis and evaluation of linear lumped constant network is found by state valuable. I offer solution of some examples by Complex Fourier Transform is effective method on analyzing network, and it is good method on free select of time step and a little accumulation of error rather than the other.

まえがき

システムとは「要素の集合体で計画に従ってある一つの目的を達成するように設計されたもの」、または「互いに独立な分離できる要素の集合体」とであると定義される。

ここでは、その状態 (state) が時間とともに時々刻々変化してゆくダイナミカルシステム (dynamical system) について考える。ダイナミカルシステムとは簡単に云えば、入力・内部状態・出力という三つの変数で記述され、内部状態は外界からの入力によってある特定の法則に従った影響を受けて動作し、そして出力として内部状態のある量を外界に反映させるような系である。システムの状態は、入力がない場合でも、システムに内蔵されたメカニズム (mechanism) に従って時々刻々変化してゆく。また入力が同じでも内部状態が違えば、違った応答を示すことになり、この様な系の記述に必要な最小限の変数として状態変数が用いられる。状態変数とは、その現在の値がわかれば、それと将来の入力とから系の将来の振舞に関する全ての情報が得られる様な必要最小限の変数の組と定義される。

今状態変数を成分とするベクトルを、 \mathbf{X} 、入力を成分とするベクトルを \mathbf{U} 、出力を成分とするベクトルを \mathbf{Y} とすると、線形集中定数の系の場合、次のようなベ

クトル・マトリックス方程式が成り立ち、これを状態方程式と称する。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (0-1)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U} \quad (0-2)$$

ここに \mathbf{X} 、 \mathbf{U} 、 \mathbf{Y} をそれぞれ n 、 m 、 l 次のベクトルとすると、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} はそれぞれ (n, n) 、 (n, m) 、 (l, n) 、 (l, m) の行列である。時間不変系の場合、それらの各要素は定数となり、 \mathbf{A} はこの要素がトランジション・マトリックス (transition matrix) の性質を決定するという点において、系にとって最も重要なマトリックスである。 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{D} はともに結合マトリックスであり、それぞれ入力と状態変数、状態変数と出力、入力と出力とを結びつけている。

実際のシステムを解析する場合には、その数学的モデルを作るとともに数値解を求めることが重要である。特に上述の系では、トランジション・マトリックスが求めれば、後は行列の計算に帰着される。トランジション・マトリックスを求める方法としては、級数展開による方法及び複素フーリエ変換による方法等がある。前者の方法による場合には、級数の収束性はマトリックス \mathbf{A} の固有値に大きに影響を受ける。従って時間巾の選択は固有値に依存し、特にこれが大巾に異なる場合の取扱いが問題となる。更に入力を有する系に対しては、前述の方法でトランジション・マトリックスを求めた後、積分を数値的に行なう必要がある。一方後者の方法によれば、系の変数に対するラ

受付：1971年9月30日

* 琉球大学理工学部電気工学科

プラス変換形がわかれば数値的にその時間領域における解を求めることができる。従ってこの場合には、系の特性方程式が正規形のベクトル・マトリックス方程式でない場合、更に入力を有する場合も全く同様に取扱うことができる。その時間中も固有値と無関係に選ぶ。

以下本報告においては、線形集中定数系の状態変数による解析方法、及びその数値計算法についての基本的な取扱い方法、及びその適用上の問題点について述べるとともに複素フーリエ変換法による若干の具体例をあげ、これがシステム解析上有力な手段であることを示している。

1 級数展開による数値解法

状態方程式に帰着された集中定数系の場合、トランジション・マトリックス法により数値解を求めることができる。トランジション・マトリックスが求まれば後は行列の計算に帰着される。

1.1 線形・時間不変系の解法 (I)

定数係数の同次線形微分方程式で表わされる系即ち入力を有しない線形・時間不変系は次のようなベクトルマトリックス方程式で表わされる。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \tag{1.1-1}$$

(ただしAの各要素は定数)

この数値解法として、M. L. Liou によって次の方法が提唱されている。

$$\text{解は } \mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) \tag{1.1-2}$$

(ただし $e^{\mathbf{A}t}$ はトランジション・マトリックス)

であるから、適当なステップサイズTをとると

$$\mathbf{X}[(n+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}(nT) \tag{1.1-3}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

が得られる。故に初期値 $\mathbf{X}(0)$ が与えられた場合、式 (1.1-3) によって次々に $\mathbf{X}(nT)$ を計算していくと、 $\mathbf{X}(t)$ の数値解が求まることになる。トランジション・マトリックス $e^{\mathbf{A}T}$ の値としては、 $e^{\mathbf{A}T}$ を無限級数展開した際の適当な有限個の項をとって近似する。つまり

$$e^{\mathbf{A}T} \approx \sum_{k=0}^K \frac{\mathbf{A}^k T^k}{k!} \tag{1.1-4}$$

(\mathbf{A}^0 は単位行列)

近似の精度を決める K の値は次のようにして決める。まず $e^{\mathbf{A}T}$ を近似行列 \mathbf{M} と剰余行列 \mathbf{R} に分離す

る。

$$e^{\mathbf{A}T} = \sum_{k=0}^K \frac{\mathbf{A}^k T^k}{k!} + \sum_{k=k+1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k T^k}{k!} = \mathbf{M} + \mathbf{R} \tag{1.1-5}$$

m_{ij} , r_{ij} をそれぞれ \mathbf{M} , \mathbf{R} の要素とする。有効数字の桁の精度が必要であれば

$$|r_{ij}| \leq 10^{-d} |m_{ij}| \tag{1.1-6}$$

が成り立てばよい。行列Aのノルム (norm) を

$$\|\mathbf{A}\| = \sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| \tag{1.1-7}$$

(ただし a_{ij} はA要素, m はAの次数) とする。

$$\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.1-8}$$

であるから

$$|r_{ij}| \leq \sum_{k=k+1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^k T^k}{k!} \tag{1.1-9}$$

ここで

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{A}\| T}{k+2} \quad (\epsilon < 1) \tag{1.1-10}$$

とすると

$$\begin{aligned} |r_{ij}| &\leq \frac{\|\mathbf{A}\|^{K+1} T^{K+1}}{(K+1)!} (1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots) \\ &\approx \frac{(\mathbf{A}T)^{K+1}}{(K+1)!} \cdot \frac{1}{1-\epsilon} \end{aligned} \tag{1.1-11}$$

故に

$$\frac{(\|\mathbf{A}\|T)^{K+1}}{(K+1)!} \cdot \frac{1}{1-\epsilon} \leq 10^{-d} |m_{ij}| \tag{1.1-12}$$

なる関係が得られる。Kの値を適当に決めて1つずつ増してはMの計算をして、この式 (1.1-12) の関係を満足したところでMの計算を打ち切れればよい。しかし、この方法では $e^{\mathbf{A}T}$ が0要素を持つ場合Kの値が無限大となり不適当である。

1.2 線形・時間不変系の解法 (II)

Liouによる解法以外にも次のような方法がある。

$$\begin{aligned} x^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \dots + a_1x(t) + a_0x(t) = 0 \end{aligned} \tag{1.2-1}$$

式 (1.2-1) のような定数係数の同次線形微分方程式で表わされる入力を有しない線形・時間不変系は次のようなベクトルマトリックス方程式で表わされる。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \tag{1.2-2}$$

解は

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) \tag{1.2-3}$$

となり、トランジション・マトリックスを

$$e^{At} = \phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \dots & \phi_{1m}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \dots & \phi_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{m1}(t) & \phi_{m2}(t) & \dots & \phi_{mm}(t) \end{pmatrix} \quad (1.2-4)$$

とおく、式 (1.2-3) より

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^m \phi_{ij}(t) x_j(0) \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1.2-5)$$

となる。ここで $x_j(0) = 1$ で他はすべて 0 とすると

$$x_i(t) = \phi_{ij}(t) \quad (1.2-6)$$

となる。

$x_i(t)$ は Taylor 級数に展開すると

$$x_i(T) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T^r x_i^{(r)}(0)}{r!} \quad (1.2-7)$$

となる。 $\phi(t)$ の第 1 列ベクトルを求めるためには

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, x_2(0) = x_3(0) = \dots \\ x_m(0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2-8)$$

とする。

$$\begin{cases} \phi_{11}(T) = x_1(T) \\ \phi_{21}(T) = x_2(T) \\ \dots \\ \phi_{m1}(T) = x_m(T) \end{cases} \quad (1.2-9)$$

また、 $r \geq m$ に対して

$$x_i^{(r)} = -a_{m-1} x_i^{(r-1)} - a_{m-2} x_i^{(r-2)} - \dots - a_0 x_i^{(r-m)} \quad (1.2-10)$$

が成り立つので、Taylor 級数展開における高位の導関数を求めるのに、式 (1.2-9) を使う。以上、式 (1.2-7), (1.2-8), (1.2-9), (1.2-10) によって 1 列ベクトルが求められる。

以下同様にして $\phi(t)$ の各列ベクトルが求められる。Taylor 級数展開に必要な項数 r は要求される精度に応じて決定できるのであるが、これについては省略する。Liou の方法より一般に精度が良くなることが知られている。

1.3 e^{AT} の収束性の検討

簡単のために、**A** の固有方程式は重根を持たないと仮定する。**X** を Modal matrix (固有ベクトルを列ベクトルとするマトリックス) とすると

$$\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}_D \quad (1.3-1)$$

と変換できる。**A_D** は **A** の固有値 ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$) を対角要素とする対角行列である。そして

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_D^k &= (\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X}) (\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X}) \dots (\mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{X} \end{aligned} \quad (1.3-2)$$

であるから

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^K \frac{(\mathbf{A}_D T)^k}{k!} \quad (1.3-3)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{X}^{-1} \left(\sum_{k=0}^K \frac{(\mathbf{A} T)^k}{k!} \right) \mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (1.3-4)$$

となる。故に

$$\mathbf{M} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix} \mathbf{X}^{-1} \quad (1.3-5)$$

ただし

$$m_i = \sum_{k=0}^K \frac{(\lambda_i T)^k}{k!}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.3-6)$$

従って、**M** から e^{AT} への収束性は m_i から e ^{$\lambda_i T$} への収束性によって決定されることがわかる。

ここで Maclaurin の公式を e^x に適用した時の誤差を RK とおくと

$$\begin{aligned} RK &= \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{K+1}}{(K+1)!} \\ &= \left(1 + \frac{x}{K+2} + \frac{x^2}{(K+3)(K+2)} + \dots \right) \\ &= \frac{x^{K+1}}{(K+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned} \quad (1.3-7)$$

λ_i は一般に複素数であるから、e ^{$\lambda_i T$} を m_i で近似した場合の誤差 R_i を評価するために次のように変形する。

$$|R_i| = \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{(\lambda_i T)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{|\lambda_i T|^k}{k!} \quad (1.3-8)$$

式 (1.3-7) において $x = |\lambda_i T|$ とおいた式 (1.3-8) に代入すると

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq \frac{|\lambda_i T|^{K+1}}{(k+1)!} e^{\theta |\lambda_i T|} \\ &\leq \frac{|\lambda_i T|^{K+1}}{(k+1)!} e^{|\lambda_i T|} \end{aligned} \quad (1.3-9)$$

が得られる。

以上のことより $|\lambda_i T|$ が大きい程、 m_i から e ^{$\lambda_i T$} の収束が遅くなることがわかる。また e^{AT} の収束性によって決定されることを合わせて考えると、e^{AT} の収束性は $|\lambda_{\max} T|$ によって決定されることが結論される。

2 複素フーリエ変換による数値解法

2.1 複素フーリエ変換

時間不変系においては、集中定数、分布常数の場合とに演算子法が適用できるが、微分方程式などによって特性を与えられない限り時間関数が常に得られるとは限らない。そこで複素フーリエ変換法に基づいて演算子形から直接時間領域における数値解を求める方法について以下述べる。

時間関数 $u(t)$ 及びそのラプラス変換 $U(s)$ との間には

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt \tag{2.1-1}$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{st} U(s) ds \tag{2.1-2}$$

なる関係がある。ここで

$$s = a + j\omega \tag{2.1-3}$$

とおけば、式 (2.1-2) は

$$u(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(a+j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{2.1-4}$$

となる。ここで周期 $2T$ の関数列を導入する。

$$\begin{aligned} f_n(t) &= h(t + 2nT) \\ f_n(t) &= f_n(t + 2T) \end{aligned} \tag{2.1-5}$$

$$n = 0, 1, \dots$$

$$0 \leq t < 2T$$

$$h(t) = u(t) e^{-at} \tag{2.1-6}$$

さらに次の級数を導入する。

$$u_p(t) = e^{at} \sum_n f_n(t) \tag{2.1-7}$$

ここで、この複素フーリエ級数を求める。

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n,k} e^{jk\frac{\pi}{T}t} \tag{2.1-8}$$

$$C_{n,k} = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} f_n(t) e^{-jk\frac{\pi}{T}t} dt \tag{2.1-9}$$

故に

$$\begin{aligned} u_p(t) &= e^{at} \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2T} f_n(t) e^{-jk\frac{\pi}{T}t} dt e^{jk\frac{\pi}{T}t} \\ &= \frac{e^{at}}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} h(t) e^{-jk\frac{\pi}{T}t} dt e^{jk\frac{\pi}{T}t} \\ &= \frac{e^{at}}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(a + jk\frac{\pi}{T}) e^{jk\frac{\pi}{T}t} \end{aligned} \tag{2.1-10}$$

式 (2.1-4) において、積分を級数で近似し

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{T} \tag{2.1-11}$$

とおくと

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{e^{at}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(a + jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \\ &= \frac{e^{at}}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(a + jk\frac{\pi}{T}) e^{jk\frac{\pi}{T}t} \end{aligned} \tag{2.1-12}$$

よって (2.1-10), (2.1-12) により

$$u(t) \approx u_p(t) \tag{2.1-13}$$

となる従って

$$\begin{aligned} u(t) e^{-at} &= u_p(t) e^{-at} \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k=-N}^N U(a + jk\frac{\pi}{T}) e^{jk\frac{\pi}{T}t} \end{aligned} \tag{2.1-14}$$

この級数展開を $t = T$ において、上限を N でおさえると

$$u(t) = -\frac{e^{aT}}{2T} \sum_{k=-N}^N U(a + jk\frac{\pi}{T}) e^{jk\pi} \tag{2.1-15}$$

$$= -\frac{e^{aT}}{T} \left[\frac{1}{2} U(a) + \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} U(a + jk\frac{\pi}{T}) (-1)^k \right] \tag{2.1-16}$$

となり、時間領域における数値解 $u(t)$ が求められることになる。この方法は系の固有値と無関係に時間中を選ぶことができ、また誤差の著積がないという利点を持っている。

$t = T$ における級数展開において、上限を N でおさえることによって生ずる誤差が所要の精度を満たすように a の選定を行なう必要がある。

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} f_n(t) \quad 0 \leq t < 2T \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} h(t + 2nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} e^{-a(t+2nt)} \\ &\quad u(t + 2nT) \\ &= u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2ant} \\ &\quad u(t + 2nT) \end{aligned} \tag{2.1-17}$$

故に

$$u_p(T) = u(T) + (3T) e^{-2aT} + u(5T) e^{-4aT} + \dots \tag{2.1-18}$$

上式より $u(3T) e^{-2at}$ を誤差の主たるものと考えることができる。式 (2.1-16) よりわかるように誤差は e^{aT} により拡大されるので a を必要以上に大きく選ぶことはできず、一般には $aT = 4$ あるいは 5 がよく使われている。

2.2 複素フーリエ変換による具体的計算例

入力を有しない線形・時間不変系の状態方程式 (2.1-1) のように表わされることは以前に示したが、ここでは実際にマトリックス A を数値で与えて状態方程式の時間領域における数値解を求めるを試みる。この際2.1で説明した複素フーリエ変換が非常に有効であることが実証される。この計算例ではトランジション・マトリックスの性質に直接影響を与えるマトリックス A を種々変化させて両者の関係について考察する。以下の様な手順に従って実際に計算機を使

って計算を行なった。

まず、ある特定の固有値を有するマトリックス P と変換マトリックス Q によってマトリックス A を与える。次に複素フーリエ変換法に基づく時間領域における数値解を求める方法において、 $U(s)$ ($(S+A)^{-1}$ として、 $u(T)$ を計算する。この場合にはトランジション・マトリックス e^{-AT} の各要素の数値解を $t = T$ (0.1secから0.1secごとに2.9secまで) において求めたことになる。

〔表-1〕

	P	固有値	T	K	計算時間(秒)
1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1, 1, 1	$T=0.1$ $T=2.9$	88 109	53.9
1')	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1, 1, 1	以下同じ	表88 109	54.9
2)	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1, 1, 1		89 124	60.1
3)	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1, 1, 1		88 119	60.2
4)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	1, 1, 2		89 136	65.7
4')	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	1, 1, 2		90 141	66.1
5)	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	1, 1, 2		89 132	64.2
6)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	1, 2, 3		90 155	70.8
6')	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	1, 2, 3		91 168	76.1
7)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$	$1, \pm 4i$		91 178	78.3
7')	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$	$1, \pm 4i$		93 230	97.9
8)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$	$1, 1 \pm 4i$		92 184	83.6
8')	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$	$1, 1 \pm 4i$		92 230	97.2
9)	$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	4, 5, 6		93 193	87.0
10)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$	$1, \pm 6i$		93 217	94.1
11)	$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	7, 8, 9		95 224	101.7
12)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$	$1, \pm 9i$		96 265	116.3
13)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$	$1, 1 \pm 9i$		97 263	115.7

マトリックスPを〔表-1〕の様に1) から13) ま
で13通りとり、また変換マトリックスQを変えて
1'), 4'), 6'), 7'), 8') の5通り計算を行なっ
た。

$$\mathbf{X} + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (2.2-1)$$

解は

$$\mathbf{X} = (\mathbf{S} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0) \quad (2.2-2)$$

またマトリックスAは

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A} \quad (2.2-3)$$

として与える。ただし

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2.2-4)$$

の2通りの場合について計算を行なう。

18通りの場合について〔表-1〕に示すように収束に
要する項数Kと計算に要する時間の比較を行なった。

1) まず1.3で行ったトランジション・マトリックス
の収束性の検討における結論が実証されている。
即ちAの固有値のうち最大のものを λ_{\max} とすると
 $|\lambda_{\max} T|$ の大なるもの程 e^{-AT} の収束が遅く
なり、従って計算時間が多くかかっている。また計算
時間は $T=2.9$ における項数Kの大きさによって
ほぼ決定されている。1) と1') においてAの各要素
は全く同一であるのに計算時間が異なっている。
これは計算プログラムにおいて、QPの積の計算、
 \mathbf{Q}^{-1} の計算、 $\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}$ の計算をも含めていることによ
るものである。

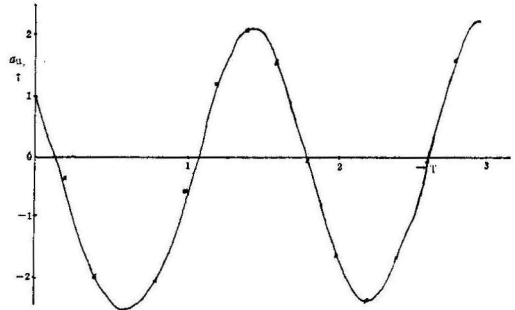
2) 7), 8), 10), 12), 13) は固有値に複素数をも
含む振動系の場合である。例えば7) の場合には、
解は e^{-t} , $e^{\pm 4jt}$ ($= \cos 4t \pm j \sin 4t$) で構成
されるわけで、〔図-1〕のグラフ (e^{-AT}

$$7) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{固有値 } 1, \pm 4j$$

$$e^{-t}, e^{\pm 4jt} (= \cos 4t \pm j \sin 4t)$$

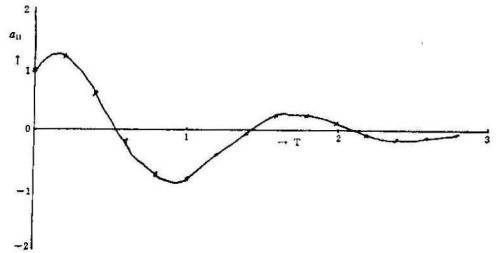
$a = {}_{11} e^{-AT}$ の第1行第1列目の要素

$$7') \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

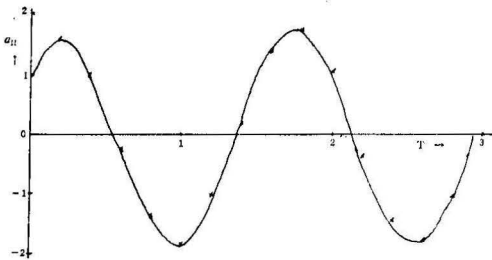


〔図-2〕

$$8) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

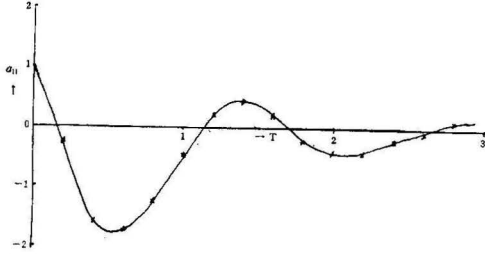


〔図-3〕



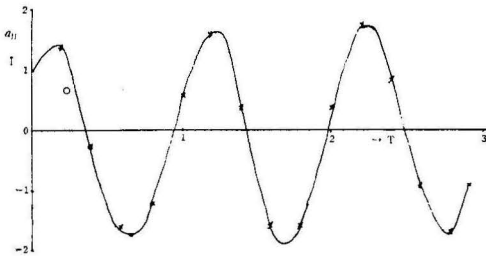
〔図-1〕

$$8') \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



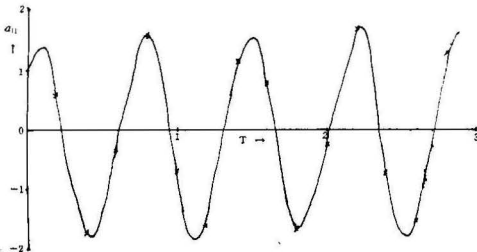
【図-4】

$$10) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{固有値 } 1, \pm 6j \quad e^{-t}, e^{\pm jt}$$



【図-5】

$$12) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{固有値 } 1, \pm 9j \quad e^{-t}, e^{\pm 9jt}$$



【図-6】

の第1行第1列目の要素について)を見てもそのことがわかる。振動の周期は $2\pi/\omega$ であることも確認される。

3 変換マトリックスが \mathbf{Q}, \mathbf{Q}' の場合の比較は、1), 4), 6), 7), 8) の5通りについて行なっている。変換マトリックスが異なっても \mathbf{A} の固有値は変わらない。それぞれの場合を比較してみて計算時間にそう大差がないとも言えるのだが、固有値が大なる程、両者の差は大きくなっている。 $e^{-\mathbf{A}t}$ の第1行第1列目の要素について7), 7'), 8), 8') の場合を比較してみると、 \mathbf{Q}' の場合の方がともに振動の振巾が大きくなっており(図を参照)従って計算時間は多くかかる。 \mathbf{Q} より \mathbf{Q}' の各要素の方が大きいわけであるが、交換された \mathbf{A} の各要素については \mathbf{Q}' の場合の方が大きいとは必ずしも云えない。

あとがき

級数展開による数値解法からは、 $|\lambda_i t|$ が大きい程、 m_i から $e^{\lambda_i t}$ の収束が遅くなるのがわかる。また $e^{\mathbf{A}t}$ の収束性は $e^{\lambda_i t}$ の収束性によって決定されることを合わせて考えると、 $e^{\mathbf{A}t}$ の収束性は $|\lambda_{\max} t|$ によって決定されることがわかる。

複素フーリエ変換による数値解法では入力に有しない線型・時間不変系の状態方程式を例にとり、複素フーリエ変換法を用いて時間領域における数値解を得た。同時に \mathbf{A} の固有値の種類、大きさ及び変換マトリックスとトランジション・マトリックスの性質との関連について検討した。固有値との関連についてはほぼ確実な見通しを実証されたが、変換マトリックスとの関連については確実な結論を見出すことは出来なかった。

数値解法として級数展開による方法とフーリエ変換を利用した解法を述べたが、固有値と無関係に時間巾を選択できるという点、誤差の蓄積がないという点等においてフーリエ交換を利用した解法の方が非常に有効であることがわかった。

最後に、常に御指導、研究上の細かい御配慮までして頂いた京都大学木嶋昭教授および同研究室の皆様方に深く謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 林重憲：演算子法と過渡現象 国民科学社
1968
- (2) 末崎輝雄，天野弘：改訂電気回路理論 コロナ社 1970
- (3) 一松信：数値計算 至文堂 1970
- (4) 東盛良夫 時間不変系に関する状態方程式の数値解法について 技術第5号 琉球技術協会
1970年12月
- (5) 尾崎弘，黒田一之：回路網理論 共立出版
1959
- (6) ミクシンスキー：演算子法（上巻）（下巻）
裳華房 1969
- (7) M.L.Lion Proc IEEE, 54 (1966)