琉球大学学術リポジトリ

コンクリートの引張破壊挙動に関する解析的研究

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 富山潤 公開日: 2021-12-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 富山, 潤, Tomiyama, Jun メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/25354

コンクリートの引張破壊挙動に関する解析的研究

富山　潤

コンクリートの引張破壊挙動に関する解析的研究

Analytical Study on Tension Fracture Behavior of Concrete

琉球大学大学院
理工学研究科
生産エネルギー工学専攻

富山 潤

平成12年2月

目 次

第 1 章 序論 [1]

1．1 研究の背景および目的 …… 2

1．2 既往の研究 …… 3

1．2．1 計算機を用いた数値シミュレーション手法 …… 3

1．2．2 コンクリートの破壊力学 …… 5

1．3 本論文の構成 …… 6

第 2 章 運動方程式を用いたコンクリートの破壊解析法の定式化 [7]

2．1 はじめに …… 8

2．2 非線形系の求解法（数値積分法） …… 8

2．3 コンクリートの引張軟化特性を考慮したひび割れモデル …… 11

2．3．1 仮想ひび割れモデル(Fictitious Crack Model) …… 12

2．3．2 ひび割れ帯モデル(Crack Band Model) …… 12

2．4 ニューマークβ法を用いた増分解析法 …… 14

2．5 トラス要素による数値解析法の検証 …… 15

（両側切欠きを有するコンクリート棒の直接引張試験）

2．6 まとめ …… 18

第 3 章 フリーメッシュ法によるコンクリートの引張破壊挙動の解析法 [19]

3．1 はじめに …… 20

3．2 要素の生成および構築 …… 23

3．2．1 衛星節点選択手法 …… 23

3．2．2 複雑境界の内外判定 …… 32

3．2．3 高速化・効率化手法 …… 34

3．3 定ひずみ三角形要素の支配方程式 …… 38

3．3．1 剛性マトリックスの定式化 …… 38

3．3．2 節点応力の評価法 …… 45

3．3．3 引張軟化特性のモデル化（ひび割れ帯モデル） …… 50

3．3．4 等価長の評価法 …… 53

3．4 増分解析アルゴリズム …… 54

3．5 まとめ …… 57

第4章　フリーメッシュ法によるコンクリートの引張破壊の数値解析例　[58]
4．1　はじめに　……　59
4．2　両側中央切欠きを有するコンクリート棒の直接引張試験　……　59
4．3　中央切欠きを有する無筋コンクリートはりの曲げ試験　……　65
4．4　無筋コンクリートはりの曲げ破壊の解析　……　68
4．5　まとめ　……　76

第5章　デジタル画像を用いたフリーメッシュ法の平面応力解析および並列処理　[77]
5．1　はじめに　……　78
5．2　デジタル画像を用いたフリーメッシュ法用解析データ作成方法　……　78
5．3　数値解析例　……　80
5．3．1　実形状に基づく応力集中問題の解析　……　80
5．3．2　コンクリート円柱供試体の割裂試験の応力解析　……　83
5．4　フリーメッシュ法の並列化　……　90
5．5　まとめ　……　97

第6章　結論　[99]

謝辞　[102]

参考文献　[103]

付録　[107]

第1章　序論

第1章 序論

1．1 研究の背景および目的

近年，計算機性能の飛躍的な進歩に伴い，各種の数値解析手法が，構造解析，熱伝導問題，流体問題などのようなさまざまな工学分野の諸問題の解析に用いられるようになった[1]。

数値解析手法のコンクリート破壊解析への適用は，1967 年に California 大学の Ngo と Scordelis ら[2]による有限要素法を用いた鉄筋コンクリートはりのひび割れ解析が初めてである。現在では，コンクリート構造物の破壊挙動に関する力学的な解を得るのに，計算機を利用した数値解析手法や計算力学的手法が適用されるようになってきている[3]。

有限要素法などの数値解析法によりコンクリート構造物のひび割れ挙動を解析する場合，巨視的に開口しているひび割れ先端の微細ひび割れが蓄積した領域，つまり，破壊進行領域（Fracture Process Zone）での挙動をいかにモデル化するかが重要となる。この領域では，応力が引張強度に達した後で，ひび割れ幅の増加に伴い応力の減少が起こっている。いわゆる，引張軟化現象である。引張軟化特性を考慮に入れた解析（コンクリートの破壊力学）では，軟化挙動を完全に再現できる構成則は，ごく限られた条件下を除き，未だ存在しないのが現状である。現在，通則的な構成則として，ひび割れ面の垂直応力とひび割れ幅の関係で表現した引張軟化曲線（Tension Softening Diagram）が用いられている[4][5]。

コンクリートの引張軟化に関する数値解析は，非線形挙動を考慮する必要があるために，増分法で行われる。しかし，いったん軟化が生じると，みかけの剛性が負となるために，スナップバック（Snap-Back）のような不安定現象が生じる。現在，コンクリートの破壊解析に用いられている大半の静的釣合式を基礎とした増分法では，こうした軟化以降挙動の解析が困難となる。スナップバック現象を解析出来る増分法として，弧長増分法[6]や Rmin 法を応用した増分法[7]などがあるが，前者は解析アルゴリズムが複雑で，後者は引張軟化の進行や除荷が生じた場合，安定した解が得られないことがある。

本論文では，以上の背景を考慮に入れ，スナップバックが生じても安定して増分解析が出来る動的釣合式，いわゆる運動方程式を採用した[8][9]。本手法では，みかけの剛性が速度項・加速度項の影響を受け正となり，不安定現象であるスナップバック領

域を避けて解析可能となる。

本論文では，運動方程式の求解法として，要素生成の労力を解消でき，さらに，並列計算に優れているフリーメッシュ法(Free Mesh Method:FMM)[10]を，初めてコンクリートの破壊解析に適用した。

さらに，本論文では，フリーメッシュ法が節点情報のみを解析データとしていること，およびデジタル画像がピクセルの集合であることとの相関性を利用して，デジタル画像からフリーメッシュ用解析データを作成する手法を開発した[11]。応用例として，実形状に基づく応力集中およびコンクリート円柱供試体の割裂試験時の応力解析を試みた。応力分布をより高精度で求めるためには，デジタル画像の解像度を高くすればよいが，フリーメッシュ法用の入力データ量が大規模なものとなることから，計算時間の問題が生じてくる。そこで，計算速度の高速化を計る方策として，並列計算手法を検討し，それを弾性応力問題とコンクリートの破壊の問題に適用して計算速度の高速化を論じた。

以上のように本論文は，コンクリートの引張軟化特性，フリーメッシュ法，運動方程式を基礎とした増分解析法，デジタル画像，並列計算などをキーワードに，簡単で実用的なコンクリートの破壊シミュレーション法の確立を目的としたものである。

1．2 既往の研究

1．2．1 計算機を用いた数値シミュレーション手法

計算機性能の飛躍的な進歩に伴って，有限要素法(Finite Element Method:FEM)，境界要素法(Boundary Element Method:BEM)，有限差分法(Finite Difference Method:FDM)等の数値シミュレーション手法が工学のさまざまな分野の解析に用いられてきている。しかし，近年，解析対象は大型化，複雑形状化する傾向にあり，上記の数値解析法では，要素データ，差分格子データなどの入力データ作成に多大な労力と時間が必要となる。この問題に対処する方法として，自動要素分割手法の研究が盛んに行われている。しかし，これらの手法では，要素を生成する際に多くの制約があったり，技術者の経験的ノウハウが必要となる。また，最近では「要素を必要としない」あるいは「解析の過程で要素を意識させない」メッシュレス法の研究も盛んに行われている。それらの手法には，粒子法(Particle Methods)を基礎とするPIC (Particle in Cell), RKPM (Reproducing Kernel Particle Method), SPH (Smooth Particle Hydrodynamics)や，最小自乗近似法を基礎とするDEM (Diffuse Element Method), EFGM (Element

Free Galerkin Method), Gridless 法，およびその他のグループからなる FMM (Free Mesh Method), PUM (Partition of Unity Method)がある[12]。最近では，非常に小さな六面体(Voxel)を一つの要素として解析形状を表現するボクセル法（Voxel Method）があり，コンクリートの圧縮破壊の解析にも適用されている[13]。メッシュレス法では入力データとして要素・格子データは必要なく，節点情報のみで連立方程式の構成から求解までのシームレスな（継ぎ目のない）解析が可能である。

大型解析解の高精度化を図るには，大規模解析が必要となり，その結果として計算時間の問題が生じる。近年の計算機は高速化しているが，その処理速度は半導体技術やメモリのアクセス速度の問題から，限界に近づいてきている。近年，この問題の対策として並列分散処理技術の研究が盛んに行われている[14]。

現在の並列計算機には，SIMD(Single Instruction stream Multiple Data stream)方式とMIMD(Multiple Instruction stream Multiple Data stream)方式がある。SIMD 方式は，すべてのプロセッサで一連のデータに対して同じ命令を実行する方式で，比較的容易に並列化することが出来るが，柔軟性に乏しい。MIMD 方式は，各プロセッサが独立に命令を実行するため，柔軟性に富み，汎用性が高い。しかし，プログラミングは複雑となる。

有限要素法超並列計算に関する研究分野では，解析領域を複数の部分領域に分けて有限要素法によって解析を行う領域分割法[15]や，離散化された方程式の構成部と連立一次方程式を解く部分を並列にする手法[16]などが主に研究されている。

上記に示した手法は，解析データ（要素）生成の労力の削減や計算時間の短縮といった問題を個別に解決する上で有力な手法ではあるが，ほとんどの手法が必ずしも両問題を同時に解決出来るものではない。一方，矢川らによって提案されたフリーメッシュ法(Free Mesh Method:FMM)[10]は，各プロセスを節点ベースで行うことが出来る有限要素法であり，入力データは節点情報のみで良く，その後の連立方程式の構成から求解までをシームレスに行うことが出来きる。従って，解析データ作成が容易で，その上，データ参照の局所性が存在し，各節点に関する処理を独立に行うことが出来るので，並列分散処理に適している。また，有限要素法と同じ連立方程式を構成するので，有限要素法と同程度の精度が得られ，有限要素法に関する過去の成果をそのまま用いることが可能である。

1. 2. 2 コンクリートの破壊力学

コンクリート材料の破壊モードを大別すると，モードⅠの引張破壊，曲げ破壊，モードⅡのせん断破壊および圧縮破壊に分けることが出来る。コンクリートの破壊挙動の特徴的なところは，破壊がある有限な領域に局所的に集中するということである。この破壊領域では，応力が引張強度に達した後で，ひび割れ幅の増加に伴い応力の減少が起こっている。いわゆる，引張軟化現象である。いったん軟化が生じると，みかけの剛性が負となるために，スナップバック(Snap-Back)のような不安定現象が生じる場合がある。

三橋らは，コンクリート構造物に特有な不安定挙動を図 1-1 に明示し，コンクリート構造物の非線形求解法として，修正 Newton-Raphson 法と各制御法(荷重法，変位法，弧長法)を組み合わせたときのコンクリート破壊の不安定挙動に対する制御法の適用性を，表 1-1 のようにまとめた[17]。

表 1-1 に示すように，弧長法以外の制御法では，軟化現象でさえ安定した解析が出来ない。

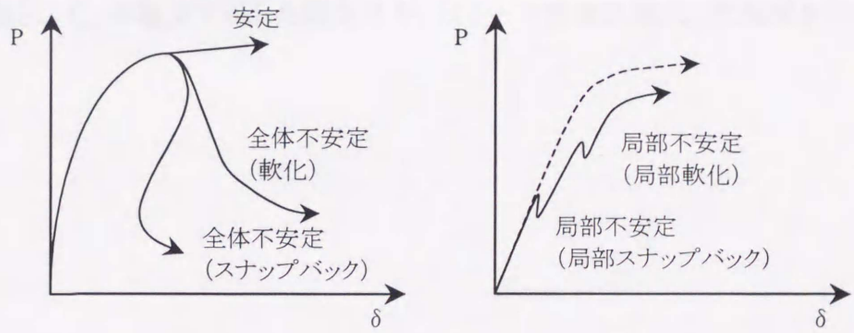


図 1-1 コンクリート構造物に特有な不安定挙動

表 1-1 不安定挙動に対する制御法の適用性

制御法	全体不安定		局部不安定	
	軟化	スナップバック	軟化	スナップバック
荷重法	×	×	×	×
変位法	△	×	△	×
弧長法	○	○	○	○

○:有効，△:適用可能な場合もある，×:不適用

1．3 本論の構成

本論文は，本章・序論以降，以下のような構成で展開されている。

第2章では，動的釣合式である運動方程式を用いた破壊挙動の定式化と，コンクリートの引張軟化を考慮した数値積分法による解析アルゴリズムについて説明する。

第3章では，はじめにフリーメッシュ法の特徴等を述べ，次いでフリーメッシュ法をコンクリートの引張破壊に適用する上での問題点および改良点を述べる。さらに，第2章で述べた運動方程式を用いた解析方法をフリーメッシュ法へ組み込み，その解析アルゴリズムの展開を述べる。

第4章では，第3章で述べた解析方法の応用例として，無筋コンクリート棒の直接引張試験，無筋コンクリートはりの曲げ破壊の局所化問題などの解析を行い，実験値および他の解析値との比較結果を示し，本解析方法の妥当性を確認する。

第5章では，デジタル画像からフリーメッシュ用解析データを作成する手法を述べる。応用例として，実形状に基づく応力集中およびコンクリート円柱供試体の割裂試験時の応力分布が容易に解析出来ることを示す。また，フリーメッシュ法の並列化の検討とその並列計算手法をコンクリートの破壊解析へ応用することを試みる。

第6章では，本論文の結論を述べる。

付録として，本論文で示した増分法を，はり－柱要素に導入した結果を示す。

第2章　運動方程式を用いたコンクリートの破壊解析法の定式化

第2章　運動方程式を用いたコンクリートの破壊解析法の定式化

2．1　はじめに

近年，コンクリートの脆性的な引張破壊現象を解析的および実験的に評価するための研究が多く行われている[4]。コンクリートの引張破壊を解析するためには，コンクリートの引張軟化特性を把握することが重要である。つまり，コンクリートのひび割れ先端での挙動，いわゆる破壊進行領域を考慮したコンクリートの破壊力学を解析に組み込む必要がある。

1．2．2節で述べたように，静的釣合式を用いた増分法では，軟化現象でさえ安定して解析出来ない。ここでは，コンクリートの破壊力学を考慮した増分法として動的釣合式である増分形運動方程式を用いた増分解析法の定式化を行い，解析法の検証として，コンクリート棒の直接引張試験の解析を簡単なトラス要素を用いて行った。

2．2　非線形系の求解法（数値積分法）

ここでは，任意の非線形系を解析するにあたって，最も有力な解析方法である逐次積分法（数値積分法）[18]で一般的に用いられる線形加速度法と，それを一般的にしたニューマークβ法について述べる。

これらの方法は，運動方程式をある微小な時間間隔ごとに数値的に積分する方法で，時間を時間間隔（増分）Δtで分割したときのステップ i の加速度，速度，変位を用いてΔt時間後のステップ(i+1)での加速度，速度，変位を近似的に計算し，次にステップ(i+1)での応答を既知量としてステップ(i+2)での応答を求めるものである。この操作を目的の時間まで逐次的に行う[19]。

(1) 線形加速度法

一般に加速度は不規則に変化するが，計算の便宜上，加速度が短い時間間隔で直線的に変化し，系の特性はその間隔中では一定のままであると仮定したのが線形加速度法である。

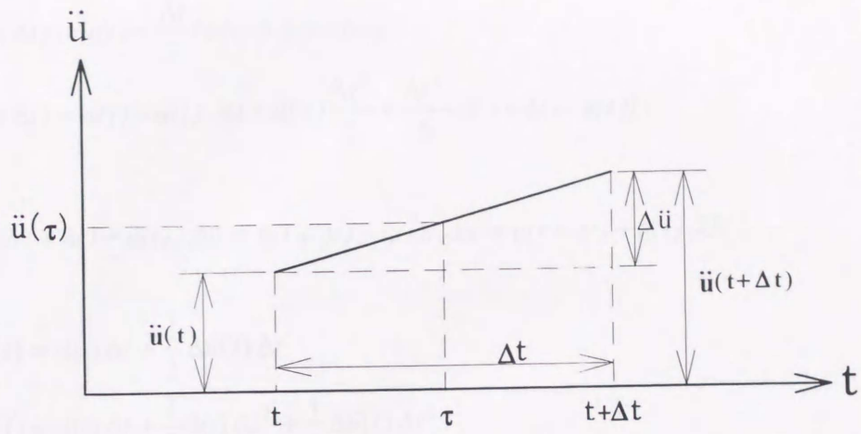


図2-1　時間Δtの間の加速度の線形表示

図2-1より，Δt 時間内の任意の時刻における加速度 $\ddot{u}(\tau)$ は次式で求められる。

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}(t) + \frac{\ddot{u}(t+\Delta t) - \ddot{u}(t)}{\Delta t} \cdot \tau \tag{2.1}$$

次に，任意の時刻における速度 $\dot{u}(\tau)$ は

$$\begin{aligned} \dot{u}(\tau) &= \dot{u}(t) + \int_t^{\tau} \ddot{u}(\tau)dt \\ &= \dot{u}(t) + \ddot{u}(t) \cdot (\tau - t) + \frac{\ddot{u}(t+\Delta t) - \ddot{u}(t)}{\Delta t} \cdot \frac{(\tau - t)^2}{2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる。更に，任意の時刻における変位 $u(\tau)$ は，式(2.2)を τ で1回積分することにより求められる。

$$\begin{aligned} u(\tau) &= u(t) + \int_t^{\tau} \dot{u}(\tau)dt \\ &= u(t) + \dot{u}(t) \cdot (\tau - t) + \ddot{u}(t) \cdot \frac{(\tau - t)^2}{2} + \frac{\ddot{u}(t+\Delta t) - \ddot{u}(t)}{\Delta t} \cdot \frac{(\tau - t)^3}{6} \end{aligned} \tag{2.3}$$

時刻 $t + \Delta t$ における速度および変位は，式(2.2)，(2.3)の $\tau - t$ を Δt とすると $\dot{u}(\tau), u(\tau) \rightarrow \dot{u}(t+\Delta t), u(t+\Delta t)$ となり，次式で表される。

$$\dot{u}(t+\Delta t)=\dot{u}(t)+\frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}(t)+\ddot{u}(t+\Delta t))$$
$$u(t+\Delta t)=u(t)+\dot{u}(t)\cdot\Delta t+\ddot{u}(t)\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{\Delta t^2}{6}(\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)) \tag{2.4}$$

$\Delta\ddot{u}=\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)$, $\Delta\dot{u}=\dot{u}(t+\Delta t)-\dot{u}(t)$, $\Delta u=u(t+\Delta t)-u(t)$ より

$$\Delta\dot{u}(t)=\ddot{u}(t)\,\Delta t+\frac{1}{2}\Delta\ddot{u}(t)\,\Delta t \tag{2.5}$$
$$\Delta u(t)=\dot{u}(t)\,\Delta t+\frac{1}{2}\ddot{u}(t)\,\Delta t^2+\frac{1}{6}\Delta\ddot{u}(t)\,\Delta t^2 \tag{2.6}$$

式(2.5), (2.6)より

$$\Delta\ddot{u}(t)=\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u(t)-\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(t)-3\ddot{u}(t) \tag{2.7}$$
$$\Delta\dot{u}(t)=\frac{3}{\Delta t}\Delta u(t)-3\dot{u}(t)-\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(t) \tag{2.8}$$

以上により，時間Δt内における変位，速度および加速度の増分 Δu ，$\Delta\dot{u}$ および $\Delta\ddot{u}$ が求められ，これらの式によって動的な応答解析が容易に出来る。

(2)ニューマークβ法

線形加速度法を一般化した公式の一つに，ニューマークβ法がある。これは，式(2.4)の右辺第4項の係数1/6をパラメータβに置き換えたものであり，式(2.9)のように表される。

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\dot{u}(t)\cdot\Delta t+\ddot{u}(t)\cdot\frac{\Delta t^2}{2}+\beta\cdot\Delta t^2(\ddot{u}(t+\Delta t)-\ddot{u}(t)) \tag{2.9}$$

これにより，速度増分 $\dot{u}(t)$ ，加速度増分 $\ddot{u}(t)$ が次式で得られる。

$$\Delta\dot{u}(t) = \frac{1}{2\beta\Delta t}\Delta u(t) - \frac{1}{2\beta}\dot{u}(t) + \Delta t \cdot (1 - \frac{1}{4\beta})\ddot{u}(t) \tag{2.10}$$

$$\Delta\ddot{u}(t) = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta u(t) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}(t) - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}(t) \tag{2.11}$$

この方法は，Δt時間内の加速度の時間変化に応じて，図2-2に示すようにβの値を変えるもので，計算の進め方は線形加速度法と同一である。

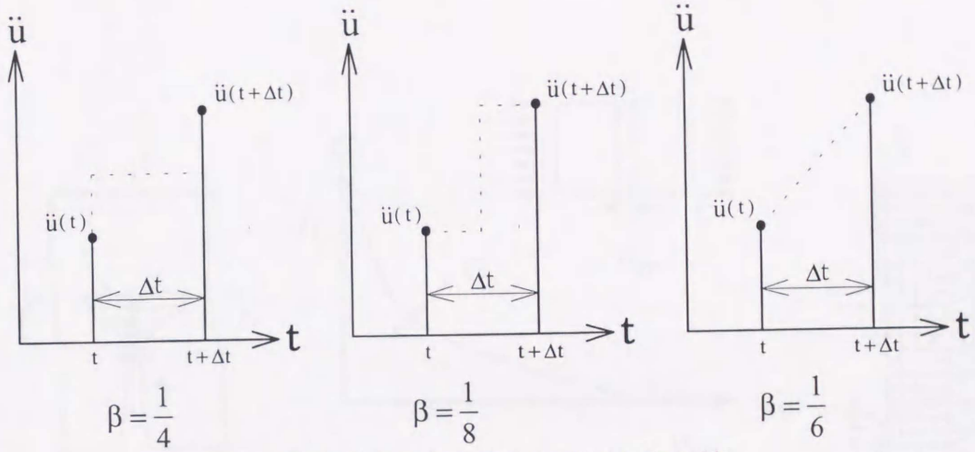


図2-2 加速度の時間変化に応じたβの値

$\beta = 1/6$とおけば線形加速度法の式と同一の式となる。このβは加速度係数と呼ばれ，時間刻み，系の性質，所要精度などに応じて，その値が選ばれる。Δtの間で加速度が変化しないとすれば1/4，中央でステップ状に変化するとすれば1/8となる。

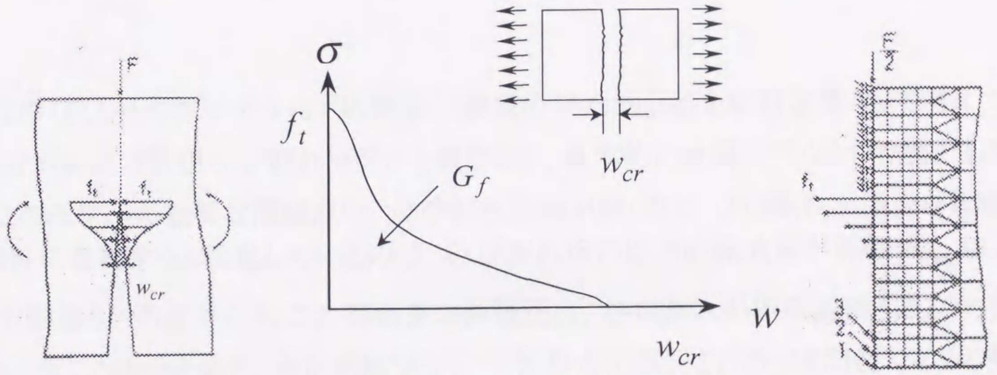
本解析では，加速度係数βを用いることにより，解析条件に柔軟に対応できるニューマークβ法を採用した。

2. 3 コンクリートの引張軟化特性を考慮したひび割れモデル

引張軟化を考慮したコンクリート構造物の有限要素解析で一般的に用いるひび割れモデルとして，離散ひび割れに対して「仮想ひび割れモデル（Fictitious crack model）」，分布ひび割れに対して「ひび割れ帯モデル（Crack band model）」が良く知られている[4]。以下にこの二つのひび割れモデルについて概述する。

2. 3. 1 仮想ひび割れモデル(Fictitious Crack Model)

Hillerborg ら[20]によって提案された仮想ひび割れモデルは，クラック先端に微細ひび割れ生成による破壊進行領域(Fracture process zone)を，図 2-3(a)のような単一のひび割れ面としてモデル化し，ひび割れ開口幅(変位)と単一ひび割れ面に作用する応力(結合力)との関係を，引張軟化構成関係(図 2-3(b)参照)として表現したものである。長所としては，ひび割れ幅の大きさが評価出来る。短所としては，あらかじめひび割れ進展方向を決めなければならないことなどがあげられる。



(b) 引張応力—ひび割れ幅関係

(a) 結合力分布

(c) 有限要素モデルと等価節点力

図 2-3 仮想ひび割れモデル

2. 3. 2 ひび割れ帯モデル(Crack Band Model)

Bazant ら[21]によって提案されたひび割れ帯モデルは，ひび割れ後も連続体と仮定し，有限幅のひび割れ先端(Blunt crack tip)を持つ分布ひび割れの帯に対して破壊力学概念を適用し，図 2-4 に示すように，ひび割れひずみとその分布ひび割れ帯に生じる伝達応力の関係を引張軟化構成関係(図 2-4(b)参照)として，表現したものである。長所としては，あらかじめひび割れ方向を決めなくてもよい。短所としては，ひび割れ幅が評価出来ないなどがあげられる。

このモデルは，ひび割れひずみと伝達応力で軟化特性を表現するため，ひび割れ幅をひび割れひずみに変換する必要がある。変換は，図 2-4 の Crack band でひび割

れ幅 w_{cr} を除すことにより行うことができ，次式のようになる（図 2-4(c)参照）。ここで，Crack band を等価長 l_{eq} と定義する。

$$\varepsilon_{cr} = \frac{w_{cr}}{l_{eq}} \tag{2.12}$$

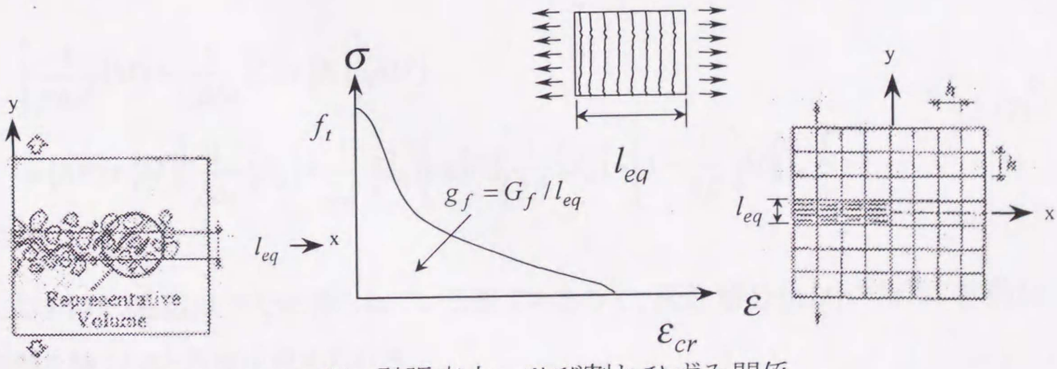
また，引張軟化曲線下の面積で表される破壊エネルギー G_f も次のように変換される（図 2-4(b)参照）。

$$g_f = \frac{G_f}{l_{eq}} \tag{2.13}$$

このひび割れ帯モデルは，破壊進行領域の平均的な幅を材料定数として考えている点が前述の仮想ひび割れモデルと異なるが，基本的には両モデルとも等価である。

このモデルの重要な問題点は，ひび割れ先端が鋭くなく，ひび割れが微少な体積要素毎に進展すると仮定しているので，ひび割れ後の応力の開放率が等価長 l_{eq} に，かなり影響される点である。この等価長の評価法は，ひび割れが矩形要素と直交する方向に生じる場合を除き，未だ明確でなく，今後早急に解決されるべき問題であると考えられる。

また，このモデルには，ひび割れ後，主応力方向が変化しない固定ひび割れモデルと，主応力方向が主ひずみ方向と一致するように変化する回転ひび割れモデルおよび前述の両モデルの特性を併せ持つ不連続回転ひび割れモデルがある[22]。



(b) 引張応力—ひび割れひずみ関係

(a) 実際のクラック進展

(c) Crack Band モデル

図 2-4 ひび割れ帯モデル

2. 4 ニューマークβ法を用いた増分解析法

ここでは，線形加速度法を一般化したニューマークβ法を用いた増分法を示す[23][24]。ニューマークβ法より，ステップ n 後の Δt 間の速度増分 $\Delta\dot{U}$ および加速度増分 $\Delta\ddot{U}$ は次のようになる。

$$\{\Delta\dot{U}\}=\frac{1}{2\beta\Delta t}\{\Delta U\}-\frac{1}{2\beta}\{\dot{U}_n\}+\Delta t\cdot(1-\frac{1}{4\beta})\{\ddot{U}_n\} \tag{2.14}$$

$$\{\Delta\ddot{U}\}=\frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta U\}-\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{U}_n\}-\frac{1}{2\beta}\{\ddot{U}_n\} \tag{2.15}$$

ここで，U は変位，$\dot{U}_n$，$\ddot{U}_n$ はそれぞれステップ n 時の速度，加速度である。

また，増分に関する運動方程式は，次式で表せる。

$$[M]\{\Delta\ddot{U}\}+[C_n]\{\Delta\dot{U}\}+[K_n]\{\Delta U\}=\{\Delta P\} \tag{2.16}$$

ここで，$\{\Delta P\}$は荷重増分，$[K]$は引張軟化特性を考慮した剛性マトリックス，$[M]$および$[C]$は，それぞれ，質量マトリックスおよび減衰マトリックスである。

本論文で用いた質量マトリクスは，節点の支配面積が等しくなるように求めた集中質量マトリックスを用いた。また，減衰マトリックスは，動的解析で良く用いられる比例減衰の内，構造物自体の内部摩擦による構造減衰（$[C]=\alpha[K]$）を用いた。本論文ではαを減衰影響係数と呼び[9]，解析パラメータの一つとなる。

式(2.14)，式(2.15)を式 (2.16)に代入すると式 (2.17)を得ることが出来る。

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}[M]+\frac{1}{2\beta\Delta t}[C]+[K]\right]\{\Delta U\}\\&=\{\Delta P\}+[M]\left\{\frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{U}_n\}+\frac{1}{2\beta}\{\ddot{U}_n\}\right\}+[C]\left\{\frac{1}{2\beta}\{\dot{U}_n\}-\left(1-\frac{1}{4\beta}\right)\Delta t\{\ddot{U}_n\}\right\}\end{aligned} \tag{2.17}$$

式(2.17)の右辺はすでに得られている値であるので，変位増分$\{\Delta U\}$の解は，静的な問題を解くときと同様に求められる。

変位増分 ΔU を求めることで，速度増分 $\Delta\dot{U}$，加速度増分 $\Delta\ddot{U}$ が式(2.14)，(2.15)で求まる。これより，ステップ n+1 の変位 U_{n+1}，速度 $\dot{U}_{n+1}$，加速度 $\ddot{U}_{n+1}$ もそれぞれ式(2.18)より求めることが出来る。

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= U_n + \Delta U \\
\dot{U}_{n+1} &= \dot{U}_n + \Delta \dot{U} \\
\ddot{U}_{n+1} &= \ddot{U}_n + \Delta \ddot{U}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

各増分毎に軟化および除荷の判定を行い，それぞれの応力状態に応じた（弾性または引張軟化）剛性マトリックスを用いることで，引張軟化特性を考慮した解析を行うことが出来る。

なお，式(2.17)では，時間増分Δt，変位制御で計算するのに強制変位増分Δu，減衰影響係数αが必要である。Δt，Δu，αの値は，無筋コンクリートはりや鉄筋コンクリートはりのはり-柱要素を用いた破壊解析の結果より，Δtの値として解析対象物の一次固有周期の 1～1/10 倍，Δuの値として 1×10^{-3}～$1\times10^{-4}mm$ 程度，αの値として 1×10^{-3}～1×10^{-7} 程度が適当であることがわかった[25]。

2.5　トラス要素による数値解析法の検証（両側中央切欠きを有するコンクリート棒の直接引張試験）

ここでは，スナップバックが生じる問題について，本解析法（運動方程式を用いた増分解析法）と静的釣合式を用いた増分法[7]（R_{min}法を改良した増分法）を比較するために，*Rots*ら[6]が行った両側中央切欠きを有する長方形断面コンクリート棒の引張力による破壊解析を，トラス要素を用いて行う[8]。

はじめに，トラス要素の剛性マトリックスは，弾性状態で図2-6の節点1,2の軸方向節点変位をu_1, u_2とすると，式(2.19)のように表される。また，図2-5の引張軟化曲線を仮定したとき，引張軟化が生じたトラス要素は図2-7のようにモデル化出来る。このとき，軟化を考慮に入れた剛性マトリックスは，式(2.20)のように表すことが出来る[26]。

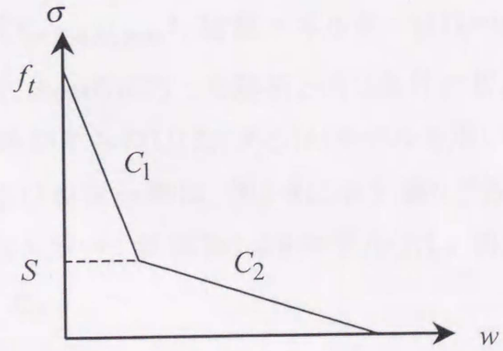


図2-5　引張軟化曲線（二直線モデル）

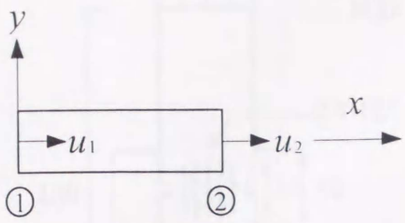


図 2-6 トラス要素

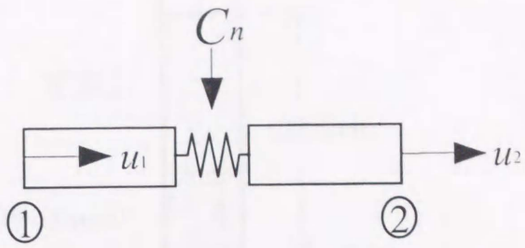


図 2-7 引張破壊したトラス要素

$$[K_e]=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$[K_{ep}]=\frac{C_n EA}{E+C_n L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{2.20}$$

ここで，C_nは引張軟化曲線の第n勾配，Eはヤング係数，Aは要素の断面積，Lは要素の長さである。

今回の解析では，減衰マトリックスを無視し，質量マトリックスとして要素質量密度をそれぞれの各節点に等分した次式で示す集中質量マトリックスを用いた。

$$[M]=\frac{\gamma AL}{g}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{2.21}$$

ここで，gは重力加速度，γはコンクリートの単位体積重量である

次に解析条件としては，コンクリートのヤング係数はE=18000N/mm^2，ポアソン比はν=0.2，引張強度f_t=3.4N/mm^2，破壊エネルギーはG_f=0.0593N/mmである。引張軟化曲線としては，*Rots*らが行った解析と同じ条件の折れ曲がりが引張強度の1/3，ひずみが最終ひずみの1/12にある1/3モデルを用いた。

直接引張試験体および要素分割は，図2-8に示す通りである。

解析モデルは，対称性を用いて供試体1/4をモデル化し，切欠き部とそれ以外の部分の2要素に分割した。