琉球大学学術リポジトリ

コンクリートの引張破壊挙動に関する解析的研究

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 富山潤 公開日: 2021-12-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 富山, 潤, Tomiyama, Jun メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/25354

図5-19を見ると，弾性解析のような直線的なスピードアップは見られないが，5プロセッサは1プロセッサに比較して4倍程度のスピードアップが得られた。また，図 5-20 の並列効率は2プロセッサで 100%出ているが，プロセッサ数が増えるに従って並列効率は低下している。これは，今回の解析規模が比較的小さいため（1701 節点），各プロセッサ内で行われる並列処理に比べ，プロセッサ間の通信や同期を取る部分の影響がプロセッサ数が増えるに従い顕著に現れたものと考えられる。しかし，このように並列処理を行うことで，今まで1プロセッサでは，長時間要していた大規模解析の計算時間も，プロセッサ数を増やすことでかなり改善されることが示された。

5. 5 まとめ

本章では，デジタル画像からフリーメッシュ法用解析データを作成する手法により，実構造物の解析が簡単に行えることを示した。しかし，デジタル画像から直接解析形状を読み込み，そのピクセル情報を入力データとすると，デジタル画像の解像度が高くなるに従い解析の規模も大きくなる。そこで，解析法として，フリーメッシュ法の並列計算を試み，基礎的検討を行った。さらに，応用問題として，無筋コンクリートはりの曲げ破壊の解析を並列計算で行った。

得られた結果をまとめると，次のようになる。

(1) デジタル画像から入力データを作成して行った複雑形状孔を有する実構造材の応力集中およびコンクリート円柱供試体の割裂試験時の応力解析結果から，従来の有限要素法では，要素生成の制約から非常に困難である実形状に基づく応力集中やコンクリート円柱供試体の割裂試験時の応力解析を簡単に行えることを示した。今回は弾性解析のみであるが，実構造材を入力データとしているので，今後，種々の応用分野における解析への有力な手法になり得ると考えられる。

(2) デジタル画像より得られた入力データは，解析規模が大きくなりやすく計算時間に問題が生じるので，解決策としてのフリーメッシュ法を用いた並列計算の検討を行った。結果は，2～5プロセッサでの解析結果ではあるが，90%以上の並列効率を得た。

(3) (2)の応用問題として，**4．4節**で行った無筋コンクリートはり#1 の曲げ破壊試験の解析を，節点数を固定し(1701 節点)，繰り返し数 150 回までの計算時間で行った結果，プロセッサ数が増えるに従って，並列効率は低下した。これは，今回の解析規模が比較的小さい(1701 節点)ために，各プロセッサ内で行われる計算処理に比べ，プロセッサー間の通信や同期を取る部分の影響がプロセッサ数が増えるに従い顕著に現れたものと考えられる。しかし，このような並列処理を行うことで，1プロセッサでは，長時間の計算が予想される比較的大規模な増分解析法を用いたコンクリートのひび割れ解析の計算時間も，プロセッサ数を増やすことでかなり改善されると考えられる。

第6章　結論

第6章　結論

コンクリート構造物の破壊を解析するには，破壊エネルギー，いわゆる引張軟化特性を考慮する必要があるが，いったん軟化が生じると，見かけの剛性が負になる。このためにスナップバックのような不安定現象が生じると，従来，コンクリートの破壊解析に用いられてきた静的釣合式を基礎とした増分法では，安定した解を得ることは難しい。このために本論文では，動的釣合式である運動方程式を基礎とした増分法を採用した。

近年の計算機性能の飛躍的な進歩は，有限要素法や有限差分法などの数値シミュレーション技術の発達の基礎となっている。しかし，解析対象の大型化，複雑形状化するなかで，これらの数値シミュレーション手法の入力データである要素生成などに要する多大な労力や，計算時間といった問題が生じる。この二つの問題を同時に解決可能な手法として，矢川らが提案した節点ベース有限要素法であるフリーメッシュ法がある。本論文では，フリーメッシュ法をコンクリートの破壊に適用する方法を提案した。

本論文は，第2章から第4章までは運動方程式を基礎とした増分法とフリーメッシュ法をコンクリートの破壊の解析に初めて適用することを試みた結果を示した。第5章では，フリーメッシュ法の入力データである節点情報とデジタル画像のピクセル情報の相関性を利用したデジタル画像からフリーメッシュ法用入力データの作成方法を示し，実構造材の弾性応力解析を行った。また，デジタル画像からフリーメッシュ法の入力データを作成すると，解析規模が大きくなりやすいことから，弾性応力解析で並列計算の検討を行った。その応用として，第2章から第4章で示した方法の並列化の検討も行った。

以上より得られた結論をまとめると，以下の通りとなる。

(1) 本解析法は，運動方程式を基礎とした増分法をコンクリートの引張軟化解析に採用しているので，スナップバックのような不安定現象が生じても，その領域を避けて解析可能である。

(2) フリーメッシュ法は，入力データとして解析領域内の適当に分布した節点情報を与えるだけで，ローカル要素の生成から全体剛性マトリックスの作成および計算までをシームレスに行うことが出来る。この手法をコンクリートの破壊解析に適用することで，今まで多大な労力と時間を費やしてきた要素生成の必要がなくなり，比較的柔軟な解析モデルの作成が可能となった。

(3) フリーメッシュ法を用いた解析をコンクリートの軟化やひび割れの進展及びひび割れの局所化問題へ適用した。その結果，他の実験値や解析値と比較しても良好な解を得ることが出来た。

(4) デジタル画像から入力データを作成することで，従来の有限要素法では要素生成の制約から非常に困難であると思われる実形状に基づく応力集中や，コンクリート円柱供試体の割裂試験時の応力解析を簡単に行えることを示した。今後，種々の応用分野における解析への有力な手法になり得ると考えられる。

(5) デジタル画像より得られた入力データは，解析規模が大きくなりやすく，計算時間に問題が出てくる。そこで，解決策として，フリーメッシュ法を用いた並列計算の検討を，複雑形状孔を有する実構造材に対して，節点数を固定(6469 節点)して行った。結果は，2～5プロセッサでの解析結果ではあるが，90%以上の並列効率を得た。

(6) 並列計算の応用として，無筋コンクリートはりの曲げ破壊の解析を，節点数を固定し(1701 節点)，繰り返し数 150 回までの計算時間で行った結果，プロセッサ数が増えるに従って，並列効率は低下している。これは，今回の解析規模が 1701 節点と比較的小さいために，各プロセッサ内で行われる計算処理に比べ，プロセッサー間の通信や同期を取る部分の影響がプロセッサ数が増えるに従い顕著に現れたものと考えられる。しかし，このような並列処理を行うことで，1プロセッサでは，長時間の計算が予想される比較的大規模解析な増分法を用いたコンクリートのひび割れ解析の計算時間も，プロセッサ数を増やすことでかなり改善されると考えられる。

以上の結果より，動的釣合式である運動方程式を基礎とした増分法と，その求解法としてフリーメッシュ法を併用した本解析手法は，コンクリートの引張破壊に有効な解析手法であることが示された。

謝 辞

本論文は，琉球大学工学部環境建設工学科　矢吹哲哉教授，伊良波繁雄助教授，東京大学大学院工学系研究科　矢川元基教授のご指導のもとで行った研究内容をまとめたものである。

本研究の遂行にあたり，終始懇切丁寧なご指導，ご教示を賜りました矢吹哲哉教授，伊良波繁雄助教授に深く感謝いたします。

伊良波繁雄助教授には，研究指導のみならず公私にわたり大変お世話になりましたことを，ここに深く感謝の意を表します。

本論文の審査を行い，更に懇切丁寧な御指導，御教授を頂いた大城武教授，山川哲雄教授に深く感謝の意を表します。

フリーメッシュ法を勉強する機会を与えて頂いた矢川元基教授に深く感謝の意を表します。さらに矢川元基教授をはじめとする矢川研のみなさまには，研究以外にもお世話になりましたことを深く感謝いたします。

本論文の執筆にあたって貴重なご助言を頂いた，和仁屋晴讙助教授，山田義智助手，玉那覇宣雄技官，宇座俊介技官に深く感謝いたします。

研究以外にもいろいろお世話になったコンクリート構造工学研究室のみなさんにも感謝いたします。

参考文献

[1]鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦:有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, 1981

[2]Ngo.D, Scordelis.A.C, Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal, pp.152-163, March, 1967

[3]長谷川俊昭, 数値解析手法の現状と課題, コンクリート工学, Vol.37, No9, pp34-45,1999.9

[4]日本コンクリート工学委員会, コンクリートの破壊力学研究委員会コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, 1990.3

[5]六郷恵哲, 白井伸明, 内田裕市, コンクリートの破壊の数値解析の現状と課題, コンクリート工学, Vol.32,No12,pp5-14,1994.12

[6]Rots.J.G, Computational Modeling of Concrete Fracture, Dissertation, Delft Univ of Techn,1988

[7]コンクリートの破壊力学研究委員会, コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, 日本コンクリート工学協会, II 19-26, 1990

[8]伊良波繁雄, 富山潤, 波平伸, 和仁屋晴讙, コンクリートはりのための引張破壊のための一増分法, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.18, No.2, pp.437-442, 1996

[9]富山潤, 伊良波繁雄, 和仁屋晴讙, 新しい増分解析法によるコンクリートの曲げ破壊挙動の解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.19, No.2, pp.63-68, 1997

[10]G.Yagawa and T,Yamada, Free mesh method: A new meshless method, Computational Mechanics, **18** , pp.383-386, 1996

[11]松本洋, 伊良波繁雄, 富山潤, 矢川元基, 簡単な画像処理を用いたフリーメッシュ法の二次元問題への適用, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.21, No.3, pp.31-36, 1999

[12]矢川元基, 酒井譲, メッシュレス計算法, 機械の研究, 第49巻第1号, pp.103-110, 1997

[13]永井学志, 山田貴博, 和田章, コンクリート材料の圧縮破壊のイメージベース有限要素解析, コンクリート工学年次論文報告集, No.21, Vol.3, pp157-162, 1999

[14]湯淺太一, 安村通晃, 中田登志之, はじめての並列プログラミング, bit別冊, 1998

[15]G.Yagawa and R.Shioya, Parallel finite elements on a massively parallel computer

with domain decomposition, Computing Systems in Engineering, **4**-4-6, pp. 495-503, 1993

[16]Y.Nakabayashi, H.Okuda and G.Yagawa, Parallel finite element fluid analysis on an element-by-element basis, Computational Mechanics, **18**, pp.377-382, 1996

[17]六郷恵哲, 白井伸明, 内田裕市 :コンクリートの破壊の数値解析の現状と課題, コンクリート工学, Vol.32,No12,pp5-14,1994.12

[18]Ray W.Clough/Joseph Penzien著 大崎順彦, 渡部丹, 片山恒雄 訳 :構造物の動的解析, 構造工学シリーズ⑦, 科学技術出版社, 1978

[19]平井一男, 水田洋司, 耐震工学入門, 森北出版株式会社

[20]Hillergorg.A, The Theoretical Basis of a Method to Determine the Fracture Enerty Gf of Concrete, Materials and Structures, Vol.18, No.106, pp.25-30,RLEM 1985,7-8

[21]Bazant, Z.P. and Oh, B.H.,Crack Band Theory for Fracture of Concrete, Materials and Structers, Vol.16, No.93, pp.155-177,1983

[22]飯塚敬一, 中村光, 足立正信, 檜貝勇, 不連続回転ひび割れモデルによるRCはりの有限要素解析、コンクリート工学年次論文報告集、Vol.19, No.2, pp.459-464, 1997

[23]富山潤, 伊良波繁雄, 矢川元基, 矢吹哲哉, フリーメッシュ法によるコンクリートの引張軟化解析に関する研究, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.21, No.3, pp.121-126, 1999

[24]富山潤, 伊良波繁雄, 矢川元基, 矢吹哲哉, フリーメッシュ法によるコンクリートの引張破壊挙動の解析, コンクリート工学論文集, Vol.11, No.1, pp.29-38, 2000

[25]富山潤, 新しい増分解析によるコンクリートの引張破壊挙動の解析, 琉球大学修士論文, 1997

[26]伊良波繁雄 , ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.12, No.2, pp.753-758,1990

[27]白崎実, 矢川元基, フリーメッシュ法(一種のメッシュレス法)の流体解析への適用(第2報 大規模並列解析), 日本機械学会論文集(B偏), 64巻, 624号, pp.2403-2408, 1998

[28]渡部修, 瀬川冬樹, フリーメッシュ法の弾塑性大変形問題への適用, 機械学会論文集, 1998

[29]矢川元基, 細川孝之, フリーメッシュ法(一種のメッシュレス法)の3次元問題への適用, 日本機械学会論文集(A編), 63巻, 614号, pp.2251-2256, 1997

[30]G.Yagawa, S.Yoshimura, N.Soneda and N.Nakao, Auotmatic two-and three-

dimensional mesh generation based on fuzzy knowledge processing, Computational Mechanics, **9**, pp.333-346, 1992

[31]白崎実, 節点ベース有限要素法による非圧縮性流体解析, 東京大学大学院, 東京大学博士論文, 1998, 12

[32]戸川隼人, マトリックスの数値計算, オーム社, 1971

[33]鷲津久一郎, エネルギー原理入門 有限要素法の基礎と応用シリーズ3, 1980

[34]川井忠彦, 川島矩郎, 中沢優, 藤谷義信, ギャラガー有限要素解析の基礎, 丸善株式会社, 1976.1

[35]富山潤, 伊良波繁雄, 矢川元基, 山田知典, フリーメッシュ法を用いたコンクリートの引張破壊解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.20, No.3, pp.151-156, 1998

[36]J.Tomiyama, S.Iraha, G.Yagawa, T.Yamada, T.Yabuki, Fracture Analysis of Concrete Using Free Mesh Mehotd, Infrastructure Regeneration and Rehabilitation Improving the Quality of Life Through Better Construction, Proceedings of International Conference, pp.1157-1168,1999

[37]矢川元基, 西岡俊久, 安藤良夫, 重ね合わせ法を用いた弾塑性問題の有限要素解析, 日本機械学会論文集(第1部), Vol.42, No.358, pp.1644-1665, 1976.6

[38]Hordijk, D.A. and Reinhardt, H.W., A Constitutive Model for Crack Cyclic Behaviour of Plain Concrete, Fracture Behaviour and Design of Materials and Structures, ECF8, ed. Firro, Emas, Vol.2, pp.579-584, 1990

[39]Cornelissen.H.A.W,Hordijk.D.A,Reinhardt.H.W, Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete,editedby F.H.Wittmann,Elsevier,pp.55-575,1986

[40]Rokugo, K., Iwasa, M., Suzuki,T. and Koyanagi, W., Testing Methods to Determine Tensile Strain Softening Curve and Fracture Energy of Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy, ed. H. Mihashi et al., Balkema, pp.153-163, 1989

[41]八木伸行ら, C言語で学ぶ実線画像処理, オーム社, 1996

[42]町田篤彦, コンクリートの圧裂試験に関する基礎研究, 土木学会論文報告集, 第297号, pp.99-112, 1978

[43]上田稔, 長谷部宣男, 佐藤正俊, 奥田宏明, コンクリートの割裂試験における破壊メカニズムの破壊力学的研究, 土木学会論文集, No.478, V-21, pp.61-70, 1993.11

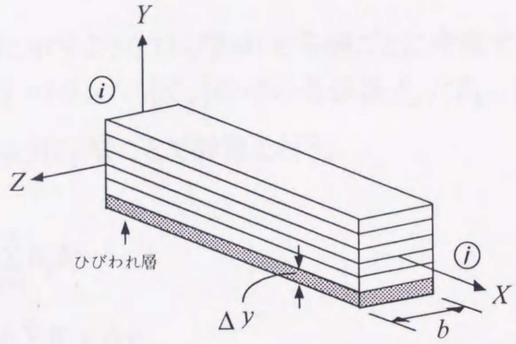
[44]彦坂熙，劉玉撃，松下博通，モルタル強度をパラメータとするコンクリートの準微視的破壊過程の解析，セメント・コンクリート論文集，No51，pp.852-857，1997
[45]橘高義則，中村茂春，高強度コンクリートの破壊パラメータに及ぼす粗骨材の影響，日本建築学会構造系論文集，No.480，7-16,1996.12
[46]梶川康男，橘吉宏，吉田博，骨材—モルタル平面モデルを用いたコンクリートの変形挙動，土木学会論文集，第356号，Ⅰ-3，pp.369-377，1985.4
[47]土木材料実験教育研究会，新示方書による土木材料実験法，pp.129，1993
[48]戸川隼人，共役勾配法　シリーズ新しい応用の数学17，教育出版，1993
[49]矢川元基，曽根田直樹，パラレルコンピューティング，培風館，1991
[50]富山潤，伊良波繁雄，和仁屋晴讙，はり要素を用いたひずみ軟化解析法に関する研究，セメント・コンクリート論文集，No.51，pp.846-851，1997
[51]川井忠彦，三本木茂夫，薄板構造解析，培風館，pp48，1973
[52]河合忠彦，藤谷義信，振動および応答解析入門，有限要素法の基礎と応用シリーズ⑤，倍風館，1991
[53]岡村甫，コンクリート構造の限界状態設計法[第2編]，共立出版株式会社，1984
[54]島弘，二羽淳一郎，岡村甫，曲げを受ける低鉄筋比はりにおける脆性破壊の防止に関する検討，土木学会論文集，第378号，V-6，pp.231-237，1987.2
[55]内田裕市，六郷恵哲，小柳洽，寸法依存性に着目した低鉄筋RCはりの曲げ破壊性状，土木学会論文集，第451号，V-17,pp129-138,1992.8
[56]伊良波繁雄，離散ひびわれ用の新ハイブリッドストレス要素とコンクリートの破壊への応用，博士論文，1992

付 録

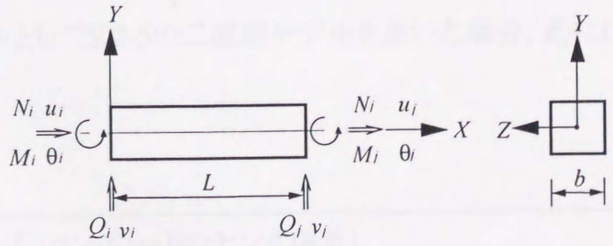
付録. 1　はり－柱要素の引張軟化を考慮した剛性マトリックスおよび質量マトリックスと減衰マトリックス

(1)はり-柱要素の軟化を考慮した剛性マトリックス[8][9][50]

付図.1に示すように，はり-柱部材の軸方向にX座標，高さ方向にY座標，XY面に垂直にZ座標を設定する。また，はり－柱要素の節点力を付図.2のように仮定すると，はり-柱要素の引張軟化を考慮した剛性マトリックス$[K_{cr}]$として，式(1)が得られる。



付図.1 はり-柱要素の座標



付図.2 はり-柱要素

$$
[K_{cr}]=\begin{bmatrix}
\frac{E_a}{L} & 0 & -\frac{E_b}{L} & -\frac{E_a}{L} & 0 & \frac{E_b}{L} \\
 & \frac{12E_c}{L^3} & \frac{6E_c}{L^2} & 0 & -\frac{12E_c}{L^3} & \frac{6E_c}{L^2} \\
 & & \frac{4E_c}{L} & \frac{E_b}{L} & -\frac{6E_c}{L^2} & \frac{2E_c}{L} \\
 & & & \frac{E_a}{L} & 0 & -\frac{E_b}{L} \\
 & \text{sym} & & & \frac{12E_c}{L^3} & \frac{6E_c}{L^2} \\
 & & & & & \frac{4E_c}{L}
\end{bmatrix} \tag{1}
$$

ここでは，付図.1に示すようなひび割れを各層ごとに考慮するファイバーモデルを用いているので，剛性マトリックス$[K_{cr}]$の中の各係数E_a，E_b，E_cはヤング係数Eの断面で，以下に示すように，層ごとで計算を行う。

$$
\begin{aligned}
E_a &= \int_A E dA = b\sum_{j=1}^{n} E_j \Delta y \\
E_b &= \int_A E y dA = b\sum_{j=1}^{n} E_j y_j \Delta y \\
E_c &= \int_A E y^2 dA = b\sum_{j=1}^{n} E_j y_j^{\,2} \Delta y
\end{aligned} \tag{2}
$$

ここで，b ＝はりの幅，n ＝層数，H=はりの高さとすると，$\Delta y = H / n$ ，y_j=j層のy座標。軟化モデルとして図2-5の二直線モデルを用いた場合，E_jには，次の値を用いる。

弾性状態	$E_j=E$(コンクリートのヤング係数)
引張軟化	$E_j=C_1EL/(E+C_1L)$(応力が引張軟化曲線の第1勾配:$C1$の時) $E_j=C_2EL/(E+C_2L)$(応力が引張軟化曲線の第2勾配:C_2の時)

(2) はり-柱要素の質量マトリックス

はり-柱要素の質量マトリックス$[M]$は，次式のように表すことが出来る。

$$[M]=\frac{\gamma AL}{g}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 13/35 & 11L/210 & 0 & 9/70 & -13L/420 \\ & & L^2/105 & 0 & 13L/420 & -L^2/140 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & sym & & & 13/35 & -11L/210 \\ & & & & & L^2/105 \end{bmatrix} \tag{3}$$

ここで，L=要素の長さ，A=要素の断面積，γ=コンクリートの単位体積重量である。

(3) はり-柱要素の減衰マトリックスの定式化

減衰マトリックスの考え方の一つとして，次式に示す比例減衰(*Proportional Damping*)，あるいは，*Rayleigh* 減衰(*Rayleigh Damping*)といわれるものがある。

$$[C]=C_S+C_v=\alpha[K]+\beta[M] \tag{4}$$

ここで，$C_S=\alpha K$，$C_v=\beta M$ で表し，C_Sは構造減衰，C_vは粘性減衰と呼ぶ。また，上式の α，β は構造物の振動実験等により決定される。

はり-柱要素の減衰係数マトリックスとして，本論同様に構造減衰($[C]=\alpha[K]$)を用いた。

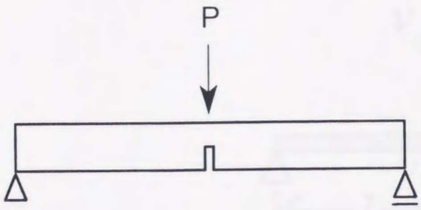
付録. 2 オフセットビーム要素[51]

コンクリートの破壊エネルギーの試験方法として，*RILEM*では切欠きはり(付図.3)の3点曲げ試験から，破壊エネルギーを求めている。切欠きはりでは，切欠き部分と切欠きのない部分では図心の位置が違う。このために，はり-柱要素を用いて切欠きを有するはりの曲げ試験をシミュレーションするときは，図心でのずれを考慮した解析が必要である。

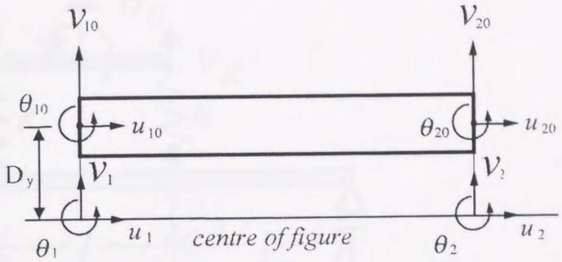
付図.4に示すように，図心での節点変位を$u_1,v_1,\theta_1,u_2,v_2,\theta_2$とし，図心から$D_y$離れた点

の変位を$u_{10}, v_{10}, \theta_{10}, u_{20}, v_{20}, \theta_{20}$とすれば，平面保持の仮定より

$$
\begin{aligned}
&u_{10} = u_1 - \mathrm{D_y}\boldsymbol{\theta}_1 \quad , \quad u_{20} = u_2 - \mathrm{D_y}\boldsymbol{\theta}_2 \\
&v_{10} = v_1 \quad , \quad v_{20} = v_2 \\
&\boldsymbol{\theta}_{10} = \boldsymbol{\theta}_1 \quad , \quad \boldsymbol{\theta}_{20} = \boldsymbol{\theta}_2
\end{aligned}
\tag{5}
$$



付図.3 コンクリートはりの曲げ試験



付図.4 オフセットビーム要素

の関係が成り立つ。式(5)をマトリックス表示すると

$$
\begin{Bmatrix} u_{10} \\ v_{10} \\ \theta_{10} \\ u_{20} \\ v_{20} \\ \theta_{20} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
1 & 0 & -\mathrm{D_y} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\mathrm{D_y} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{Bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}
= [\mathrm{T}]\{\mathrm{u}\}
\tag{6}
$$

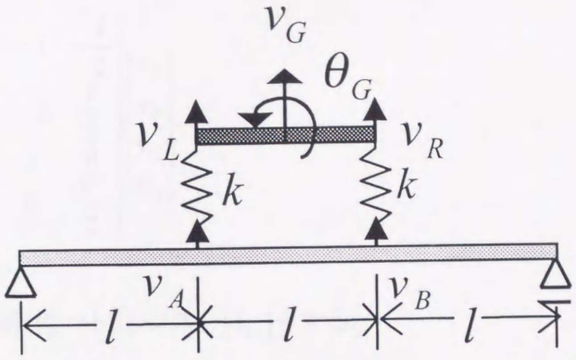
となる。図心がずれているときの弾塑性剛性行列を$\left[k'_{ep}\right]$とすると

$$
\left[k'_{ep}\right] = [T]^{\mathrm{T}}\left[k_{ep}\right][T]
\tag{7}
$$

となる。

付録. 3 三等分点載荷試験での荷重の加え方

ここでは，解析における三等分点載荷の載荷方法を示す。付図.5 に示すように，等しい荷重をはりに作用させるために試験機を付図.5 のようにモデル化した。



付図.5 載荷モデル

ここで，図中の v_L，v_G，v_R は剛体の鉛直変位，θ_G は剛体の回転変位，v_A，v_B は載荷点の鉛直変位である。

はりの載荷点に付図.5 のような剛性が等しいバネをもつ剛体を仮定し，剛体棒の中央の鉛直変位 v_G を強制的に与えて解析を行った。

このときの全体剛性マトリックスは，次のように求められる。

バネに蓄えられているひずみエネルギー U は，次式のようになる。

$$U = \frac{1}{2}k(v_L - v_A)^2 + \frac{1}{2}k(v_R - v_B)^2 \tag{8}$$

v_L，v_R は，剛体棒の中央の鉛直変位 v_G と回転変位 θ_G より，次式のように与えられる。

$$v_L = v_G + \frac{l}{2}\theta_G \tag{9}$$

$$v_R = v_G - \frac{l}{2}\theta_G \tag{10}$$

式(8)に式(9)，式(10)を代入すると，ひずみエネルギー U は次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}k(v_G + \frac{l}{2}\theta_G - v_A)^2 + \frac{1}{2}k(v_G - \theta_G - v_B)^2 \\
&= \frac{k}{2}\begin{Bmatrix} v_A \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{l}{2} \\ -1 & 1 & \frac{l}{2} \\ -\frac{l}{2} & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_A \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix} + \frac{k}{2}\begin{Bmatrix} v_B \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{l}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & -\frac{l}{2} & \frac{l^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_B \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix} \\
&= \frac{k}{2}\begin{Bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{l}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{l}{2} \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -\frac{l}{2} & \frac{l}{2} & 0 & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

よって剛体部分の剛性マトリックスを$[k_G]$とすると

$$
[k_G] = k\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{l}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{l}{2} \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -\frac{l}{2} & \frac{l}{2} & 0 & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix}
\tag{12}
$$

となる。式(12)とはり-柱要素の全体剛性マトリックスを足し合わせることにより，付図.5の三等分点載荷したときの解析が可能となる。また，v_Gは強制変位で既知であるので，その項を荷重項に移すことができ，最終的には，式(13)のように，連立一次方程式の未知数としてθ_Gだけが増えたことになる。

$$
\begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ +kv_G \\ \cdot \\ \cdot \\ +kv_G \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} & & v_A & & & v_B & & & \theta_G \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & 0 \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & +k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -kl/2 \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +k & \cdot & \cdot & kl/2 \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\
0 & \cdot & -kl/2 & \cdot & \cdot & kl/2 & \cdot & \cdot & kl^2/2
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ v_A \\ \cdot \\ \cdot \\ v_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_G \end{Bmatrix}
\tag{13}
$$

式(13)で，点線の内側は通常のはりの全体剛性マトリックスであり，その中の$+k$は対応する部分にバネ剛性kを加えることを意味する。

付録. 4 固有振動数の誘導[52]

減衰を無視した自由振動の運動方程式は，次式で表される。

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\mathrm{u}}\}+[\mathrm{K}]\{\mathrm{u}\}=\{0\} \tag{14}$$

各質点が，一定の振動形を保ちながら，単振動をしていると仮定すると，式(14)の解は式(15)のようになる。

$$\{\mathrm{u}\}=\{\mathrm{U}_0\}\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{15}$$

式(14), (15)より

$$\left([\mathrm{K}]-\omega^2[\mathrm{M}]\right)\{\mathrm{U}_0\}=\{0\} \tag{16}$$

となり$\{\mathrm{U}_0\}$のすべての要素が0とならないための条件から，次式のような固有方程式が得られる。

$$\left|[\mathrm{K}]-\omega^2[\mathrm{M}]\right|=0 \tag{17}$$

式(17)で，ωは円固有振動数である。

(1)縦振動における固有振動数

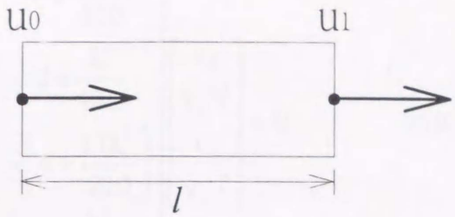
はりの縦振動数を求めるために，式(17)より，マトリックス方程式を作ると

$$\begin{bmatrix} \left(1-\dfrac{\lambda^2}{3}\right) & -\left(1+\dfrac{\lambda^2}{6}\right) \\ -\left(1+\dfrac{\lambda^2}{6}\right) & \left(1-\dfrac{\lambda^2}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{u}_0 \\ \mathrm{u}_1 \end{bmatrix}=0 \tag{18}$$

$$\lambda^2 = \gamma l^2 \omega^2 / gE$$

ここで，γ は単位体積重量，g は重力加速度である。

境界条件により，円固有振動数 ω を求めると，固有振動数 $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ となる。



付図.6 はりの縦振動

付表.1 に固有値と固有振動数を示した。

$$f = \frac{\mu}{2\pi L}\sqrt{\frac{gE}{\gamma}} \ \text{(Hz)} \quad (\mu : \text{固有値})\,(L : l * \text{要素数})$$

付表.1 縦振動の固有値

境界条件	振動の次数 / 要素分割数	1次	2次	3次	4次	5次
C/C	2	3.464				
	4	3.223	6.928	11.259		
	8	3.162	6.446	9.974	18.118	22.517
	厳密解	3.145	6.283	9.428	12.566	15.708
C/F	2	1.611	5.629			
	4	1.581	4.987	9.059	13.101	
	8	1.573	4.781	8.171	11.866	15.946
	厳密解	1.571	4.712	7.854	10.996	14.137

（ C/C 両端固定:C/F 1端固定ー他端自由 ）

(2)曲げ振動における固有振動数

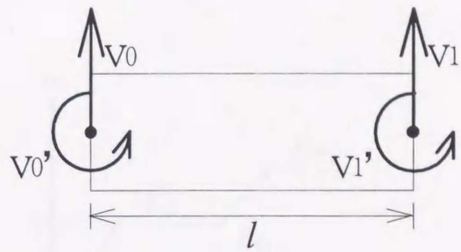
はりの曲げ固有振動数を求めるために，式(17)より，マトリックス方程式を作ると

$$
\begin{bmatrix}
12-\frac{13\lambda^2}{35} & 6-\frac{11\lambda^2}{210} & -\left(12+\frac{9\lambda^2}{70}\right) & 6+\frac{13\lambda^2}{420} \\
6-\frac{11\lambda^2}{210} & 4-\frac{\lambda^2}{105} & -\left(6+\frac{13\lambda^2}{420}\right) & 2+\frac{\lambda^2}{140} \\
-\left(12+\frac{9\lambda^2}{70}\right) & -\left(6+\frac{13\lambda^2}{420}\right) & 12-\frac{13\lambda^2}{35} & -\left(6-\frac{11\lambda^2}{210}\right) \\
6+\frac{13\lambda^2}{420} & 2+\frac{\lambda^2}{140} & -\left(6-\frac{11\lambda^2}{210}\right) & 4-\frac{\lambda^2}{105}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_0 \\ v_0' l \\ v_1 \\ v_1' l \end{bmatrix} = 0 \qquad (19)
$$

$$\lambda^2 = \gamma A l^4 \omega^2 / g E I_{xx}$$

境界条件により，円固有振動数 ω を求めると，固有振動数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ となる。

付表.2 に固有値と固有振動数を示した。



付図.7 はりの曲げ振動

$$f = \frac{\mu^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{gEI_{xx}}{\gamma A}} \ \text{(Hz)} \quad (\mu : \text{固有値})\ (L : l * \text{要素数})$$

付表.2 曲げ振動の固有値

境界条件	振動の次数 / 要素分割数	1次	2次	3次	4次	5次
C/C	2	4.768	9.054			
	4	4.733	7.889	11.113	15.285	19.657
	8	4.730	7.856	11.009	14.181	17.392
	厳密解	4.730	7.853	10.996		
C/F	2	1.876	4.714	8.669	14.770	
	4	1.875	4.697	7.885	11.075	15.104
	8	1.875	4.694	7.857	11.008	14.178
	厳密解	1.875	4.694	7.855		
S/S	2	3.148	6.620	10.495	14.170	
	4	3.142	6.296	9.511	13.239	16.691
	8	3.142	6.284	9.431	12.591	15.781
	厳密解	3.142	6.283	9.425	12.566	15.708

（ C/C 両端固定:C/F 1端固定ー他端自由:S/S 両端支持 ）