琉球大学学術リポジトリ

一様断面俸の横振動時における端末条件 第1報:自由振動

メタデータ	言語:
	出版者: 琉球大学理工学部
	公開日: 2013-05-15
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 屋富祖, 建樹, Yafuso, Tateki
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/26075

一様断面棒の横振動時における端末条件

第1報：自由振動

屋富祖　建　樹*

End Condition of the Transverse Vibration of Uniform Bars.

Ist Report: Free Vibration

Tateki YAFUSO

The paper presents on equation of end condition involving the effect of rotary inertia for transverse vibration of uniform bars and the effect of rotary inertia on angular frequency and end condition.

Results were obtained as follows:

(1) In a case of a short bar and for higher nodes, the effect of rotary inertia became stronger.

(2) Experimental results agree well with the presented theory.

第1章　緒　言

近年，技術の進歩とともに機械が次第に大型化，高速化され，工業上振動の問題がきわめて重要になってきている。

振動現象は工業上効果的に利用されることも決して少なくはないが，多くの場合は障害となって現れる。そのため最近は振動問題の解決のために大きな努力が払われるようになり，これまでにも多くの実験的・理論的研究がなされてきた。

棒の横振動問題は構造物の振動において最も基本的な現象であるため，一般の複雑な構造物の振動問題を解析する際の重要な基礎となるものである。

従来，一様断面棒の横振動に対する運動方程式をたてる場合には，棒の断面寸法が棒の長さに比べて小さいものと考えて断面の回転慣性やせん断変形の影響は考慮されなかった。しかし，はりが短かくなって断面寸法がはりの長さに比べて大きてなっている場合や，はりがきわめて高い振動数で振動していてスパンがいくつかの切断面によって比較的短い部分に分られた状態になる場合には，回転慣性やせん断変形の影響は無視できないほど大きなものとなる。

このような場合についてのはり理論は S. Timoshenko[1]やA.V.Krishina[2]らによって研究された。

本研究ははり理論をさらに拡張するために，一端支持，他端固定の境界条件をもつ一様断面棒の横振動に対して，断面の回転慣性をも考慮した運動方程式をたてることから出発して振動数方程式と端末条件式を誘導し，これらの理論式を従来の回転慣性の影響を考慮しない場合の理論式と比較すると同時に，実験を行って導かれた端末条件式が実際に応用されうるものかどうかを検討したものである。

その結果，一般に，はりの長さがしだいに短かくなり，かつ高次の振動になればなるほど固有振動数や端末条件に及ぼす回転慣性の影響は増大し，また導かれた端末条件式は実際にも使用しうるものであることがわかったので報告する。

記号説明

w　：たわみ

M　：曲げモーメント

S　：せん断力

受付：1973年10月31日

＊琉球大学理工学部機械工学科

$q(x,t)$ ：荷重もしくは外力
θ ：x断面の傾き角
A ：はりの断面積
E ：ヤング率
I ：断面二次モーメント
K ：回転半径
g ：重力の加速度
ℓ ：スパンの長さ
θ_A：支持端Aの傾き角
M_B：固定端Bの曲げモーメント
R_A：支持端Aのせん断力
R_B：固定端Bのせん断力
ρ_ℓ：単位長さ当りの質量
ω_n：はりの固有角振動数
α_n：位相差

第2章　横振動の運動方程式

図1は，はりのたわみ線を示している。

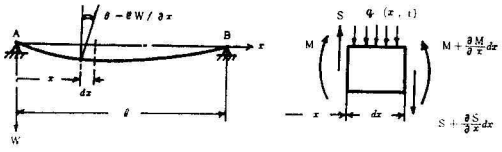


Fig. 1

はりの断面はその軸線を含む鉛直面に対して左右対称であるとし，振動はその面上で起るものとする。微小部分dxに作用する鉛直方向の力の釣合いより(1)式が得られる。

$$\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial S}{\partial x}+q(x,t) \qquad (1)$$

またはりがたわむ際，その切断面は回転運動を行うが，この時のモーメントの釣合いより(2)式が得られる。

$$-\frac{\gamma I}{g}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}+EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+S=0 \qquad (2)$$

(2)式をxで微分し(1)式を使用すれば，せん断力Sが消去されて(3)式が得られる。

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\gamma I}{g}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}=q(x,t) \qquad (3)$$

本式が断面の回転慣性を考慮した一様断面棒の運動方程式である。

第3章　自由振動の運動方程式の解と端末条件式

自由振動に対する運動方程式は，(3)式において$q(x,t)$を0とおいて

$$EI\frac{\partial x^4}{\partial w^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\gamma I}{g}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}=0 \qquad (4)$$

ここで，次のような関係がある。

$$\rho_\ell=\frac{\gamma A}{g} \qquad I=AK^2$$

これらを(4)式に代入してEIで割れば(5)式が得られる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\rho_\ell}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\rho_\ell K^2}{EI}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2}=0 \qquad (5)$$

3－1　運動方程式の解

図2は，一端支持，他端固定の境界条件をもつはりのたわみ線を示している。

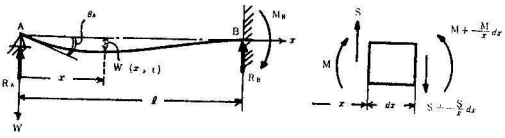


Fig. 2

たわみを

$$w=a\,e^{sx}\sin(\omega_n t+\alpha_n) \qquad (6)$$

とおいて(5)式に代入すれば(7)式を得る。

$$S^4+\frac{\rho_\ell\omega_n^2K^2}{EI}S^2-\frac{\rho_\ell\omega_n^2}{EI}=0 \qquad (7)$$

ここでλ_nを実数として

$$\lambda_n^4=\frac{\rho_\ell\omega_n^2}{EI} \qquad (8)$$

とおけば，(7)式は(9)式となる。

$$S^4+K^2\lambda_n^4S^2-\lambda_n^4=0 \qquad (9)$$

(9)式をSについて解くと，次の4つの根を得る。

$$S_1=\pm\lambda_n\sqrt{\sqrt{1+\frac{K^4\lambda_n^4}{4}}-\frac{K^2\lambda_n^2}{2}}$$

$$S_2=\pm i\lambda_n\sqrt{\sqrt{1+\frac{K^4\lambda_n^4}{4}}+\frac{K^2\lambda_n^2}{2}}$$

ここで，p，qを正の実数として

$$\left.\begin{aligned}p&=\lambda_n\sqrt{\sqrt{1+\frac{K^4\lambda_n^4}{4}}-\frac{K^2\lambda_n^2}{2}}\\ q&=\lambda_n\sqrt{\sqrt{1+\frac{K^4\lambda_n^4}{4}}+\frac{K^2\lambda_n^2}{4}}\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

とおけば，e^{sx}は(11)式となる。

$$ae^{sx} = A\cosh px + B\sinh px + C\cos qx + D\sin qx \qquad (11)$$

ここでA, B, C, Dは定数である。

(11)式を(6)式に代入するとたわみは(12)式になる

$$w(x,t) = (A\cosh px + B\sinh px + C\cos qx + D\sin qx)\cdot\sin(\omega nt + \alpha n) = \varphi(x)\sin(\omega_n t + \alpha n) \qquad (12)$$

ここで

$$\varphi(x) = A\cosh px + B\sinh px + C\cos qx + D\sin qx \qquad (13)$$

である。

支持端$x=0$では，次の4つの境界条件が存在する。

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{x=0} = 0 \\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0} = \theta A \\ &\left(EI\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_{x=0} = 0 \\ &\left(EI\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right)_{x=0} = RA \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

この4式を用いて(13)式の定数A, B, C, Dを決定すれば

$$\left.\begin{aligned} &A = 0 \\ &B = \frac{q^2\theta A}{p(p^2+q^2)} + \frac{RA}{p(p^2+q^2)EI} \\ &C = 0 \\ &D = \frac{P^2\theta A}{q(p^2+q^2)} - \frac{RA}{q(p^2+q^2)EI} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

よって(13)式は

$$\varphi(x) = \left\{\frac{q^2\theta A}{p(p^2+q^2)} + \frac{RA}{p(p^2+q^2)EI}\right\}\sinh px + \left\{\frac{p^2\theta A}{q(p^2+q^2)} - \frac{RA}{q(p^2+q^2)EI}\right\}\sin qx \qquad (16)$$

となる。次に固定端$x=\ell$では

$$\left.\begin{aligned} &(\varphi)_{x=\ell} = 0 \\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=\ell} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

なる境界条件が存在するので(16)式と(17)式より(18)，(19)式が得られる。

$$\left\{\frac{q^2}{p(p^2+q^2)}\cdot\theta A + \frac{1}{p(p^2+q^2)}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\sinh P\ell + \left\{\frac{p^2}{q(p^2+q^2)}\cdot\theta A - \frac{1}{q(p^2+q^2)}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\sin q\ell = 0 \qquad (18)$$

$$\left\{\frac{q^2}{p^2+q^2}\cdot\theta A + \frac{1}{p^2+q^2}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\cosh P\ell + \left\{\frac{p^2}{p^2+q^2}\cdot\theta A - \frac{1}{p^2+q^2}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\cos ql = 0 \qquad (19)$$

(18)式より$RA \neq 0$であるので

$$EI\frac{\theta A}{RA} = -\frac{q\sinh P\ell - P\sin q\ell}{q^3\sinh P\ell + P^3\sin q\ell} \qquad (20)$$

同様に(19)式より

$$EI\frac{\theta A}{RA} = -\frac{\cosh p\ell - \cos q\ell}{q^2\cosh p\ell - p^2\cos q\ell} \qquad (21)$$

(20)式よりθAを求めて(16)式に代入して整理し，それをさらに(12)式に代入すると(22)式が得られる。

$$w = \frac{RA}{pq(p^2+q^2)EI}\left[q\left\{1 - \frac{q^2(q\sinh p\ell - p\sin q\ell)}{q^3\sinh p\ell + p^3\sin q\ell}\right\}\sinh px - p\left\{1 + \frac{p^2(q\sinh p\ell - p\sin q\ell)}{q^3\sinh p\ell + p^3\sin q\ell}\right\}\sin qx\right]\sin(\omega_n t + \alpha_n) \qquad (22)$$

本式が自由振動に対する運動方程式(5)の解である。

3－2　振動数方程式

(20)，(21)式を等しくおいて整理すると

$$q\sinh p\ell\cos q\ell - p\cosh p\ell\sin q\ell = 0$$

あるいは

$$\tanh p\ell = \frac{p}{q}\tan q\ell \qquad (23)$$

となる。本式が求める振動数方程式である。

また(23)式で$p=q$とおけば

$$\tanh p\ell = \tan p\ell \qquad (24)$$

ただし，ここで

$$p = \lambda_n = \sqrt[4]{\frac{\rho_\ell\,\omega_n^2}{EI}} \qquad (25)$$

となって，回転慣性の影響を考慮しない場合に対する振動数方程式と一致する。

3－3　端末条件式

固定端$x=\ell$での曲げモーメントおよびせん断力は

$$M_{x=\ell} = -M_B,\quad S_{x=\ell} = -R_B$$

であり，これと(16)式より(26)，(27)式が得られる。

$$-EI\left[\left\{\frac{pq^2}{p^2+q^2}\cdot\theta A + \frac{p}{p^2+q^2}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\sinh p\ell - \left\{\frac{p^2q}{p^2+q^2}\cdot\theta A - \frac{q}{p^2+q^2}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\sin q\ell\right] = -M_B \qquad (26)$$

$$-EI\left[\left\{\frac{p^2q^2}{p^2+q^2}\cdot\theta A + \frac{p^2}{p^2+q^2}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\cosh p\ell - \left\{\frac{p^2q^2}{p^2+q^2}\cdot\theta A - \frac{q^2}{p^2+q^2}\cdot\frac{RA}{EI}\right\}\cos q\ell\right] = -R_B \qquad (27)$$

(18), (19), (26), (27)式を連立させて $\cosh p\ell$, $\sinh p\ell$, $\cos q\ell$, $\sin q\ell$ について解けば

$$\cosh p\ell = \frac{R_B}{q^2 EI\ \theta_A + R_A}$$

$$\sinh p\ell = \frac{p\ M_B}{q^2 EI\ \theta_A + R_A}$$

$$\cos q\ell = -\frac{R_B}{p^2 EI\ \theta_A - R_A}$$

$$\sin q\ell = -\frac{q\ M_B}{p^2 EI\ \theta_A - R_A}$$

となる。ここで

$$\left.\begin{aligned}\cosh^2 p\ell - \sinh^2 p\ell &= 1\\ \cos^2 q\ell + \sin^2 q\ell &= 1\end{aligned}\right\}$$

なる関係式を用いると(28), (29)式を得る。

$$(q^2 EI\ \theta_A + R_A)^2 = R_B^2 - p^2 M_B^2 \qquad (28)$$

$$(p^2 EI\ \theta_A - R_A)^2 = R_B^2 - q^2 M_B^2 \qquad (29)$$

(28), (29)両式をM_B^2, R_B^2について解けば(30), (31)式を得る。

$$M_B^2 = EI\ \theta_A\ \{(p^2 - q^2)\ EI\ \theta_A - 2 R_A\} \qquad (30)$$

$$R_B^2 = R_A^2 + 2 R_A EI\ \theta_A (q^2 - p^2) + (p^4 - p^2 q^2 + q^4)(EI\ \theta_A)^2 \qquad (31)$$

この2式が求める端末条件式である。さらに R_Aをくくり出して整理すると

$$M_B^2 = R_A^2 \left\{(p^2 - q^2)\left(\frac{EI\ \theta_A}{R_A}\right)^2 - 2 EI \frac{\theta_A}{R_A}\right\}$$

$$R_B^2 = R_A^2 \left\{1 + 2(q^2 - q^2)\frac{EI\ \theta_A}{R_A} + (p^4 - p^2 q^2 + q^4)\left(\frac{EI\ \theta_A}{R_A}\right)^2\right\}$$

となり，この式に(20)式を用いれば(32), (33)式が得られる。

$$M_B^2 = R_A^2 \left\{(p^2 - q^2)\frac{(q \sinh p\ell - p \sin q\ell)^2}{(q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell)^2} + 2\frac{q \sinh p\ell - p \sin q\ell}{q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell}\right\} \qquad (32)$$

$$R_B^2 = R_A^2 \left\{1 - 2(q^2 - p^2)\frac{q \sinh p\ell - p \sin q\ell}{q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell} + (p^4 - p^2 q^2 + q^4)\frac{(q \sinh p\ell - \sin q\ell)^2}{(q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell)^2}\right. \qquad (33)$$

よって，支持端の反力 R_A が求まれば，(32), (33)式より固定端の曲げモーメントM_B，およびせん断力R_Bが容易に求められる。

(16)式は，はりの任意の点におけるたわみを表わしているから，これを δ_x とおいて整理すれば

$$\delta_x = \left\{\frac{q^2 \sinh px}{p(p^2 + q^2)} + \frac{p^2 \sin qx}{q(p^2 + q^2)}\right\}\theta_A + \left\{\frac{\sinh px}{p(p^2 + q^2)} - \frac{\sin qx}{q(p^2 + q^2)}\right\}\frac{R_A}{EI} \qquad (34)$$

となり，さらに(20)式より θ_Aを求めて(34)式に代入して整理すれば次式になる。

$$R_A = EI\ \delta_x \frac{q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell}{\sinh px \sin q\ell - \sin qx \sinh p\ell}$$

これを(32), (33)式に代入すれば：，(35)(36)式が得られる。

$$M_B^2 = (EI\ \delta_x)^2 \left\{(p^2 - q^2)\frac{(q \sinh p\ell - p \sin q\ell)^2}{(\sinh px \sin q\ell - \sin qx \sinh p\ell)^2} + 2\frac{(q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell)(q \sinh p\ell - p \sin q\ell)}{(\sinh px \sin q\ell - \sin qx \sinh p\ell)^2}\right\} \qquad (35)$$

$$R_B^2 = (EI\ \delta_x)^2 \left\{\frac{(q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell)^2}{(\sinh px \sin q\ell - \sin qx \sinh p\ell)^2} - 2(q^2 - p^2)\frac{(q^3 \sinh p\ell + p^3 \sin q\ell)(q \sinh p\ell - p \sin q\ell)}{(\sinh px \sin q\ell - \sin qx \sinh p\ell)^2} + (p^4 - p^2 q^2 + q^4)\frac{(q \sinh p\ell - p \sin q\ell)^2}{(\sinh px \sin q\ell - \sin qx \sinh p\ell)}\right\} \qquad (36)$$

よって，任意点のたわみδxが求まれば，M_B，R_Bが求まることになる。また(35), (36)式において $p = q$ とおけば(37), (38)式となる。

$$M_B^2 = 2(EI\ \delta_x)^2 p^4 \left\{\frac{\sinh^2 p\ell - \sin^2 p\ell}{(\sinh px \sin p\ell - \sin px \sinh p\ell)^2}\right\} \qquad (37)$$

$$R_B^2 = 2(EI\ \delta_x)^2 p^6 \left\{\frac{\sinh^2 p\ell + \sin^2 p\ell}{(\sinh px \sin p\ell - \sin px \sinh p\ell)^2}\right\} \qquad (38)$$

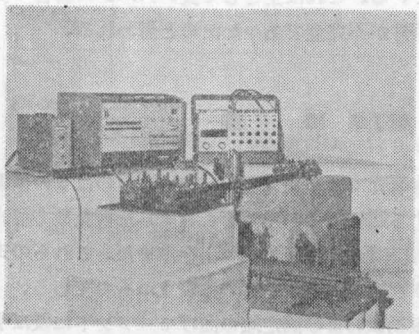
ただし，ここで

$$P = \lambda_n = \sqrt[4]{\frac{\rho_\ell\ \omega_n^2}{EI}}$$

この2式が回転慣性の影響を考慮しない場合の固定端の曲げモーメントおよびせん断力を求める式である。

第4章　実験装置および実験方法

実験装置概要を写真Ｉと図３に示す。実験供試用は



Picture 1　Experimental apparatus

① Rail　③ Beam　⑤ Strain gage　⑦ Base
② Ball bearing　④ Transducer　⑥ Fixing plate

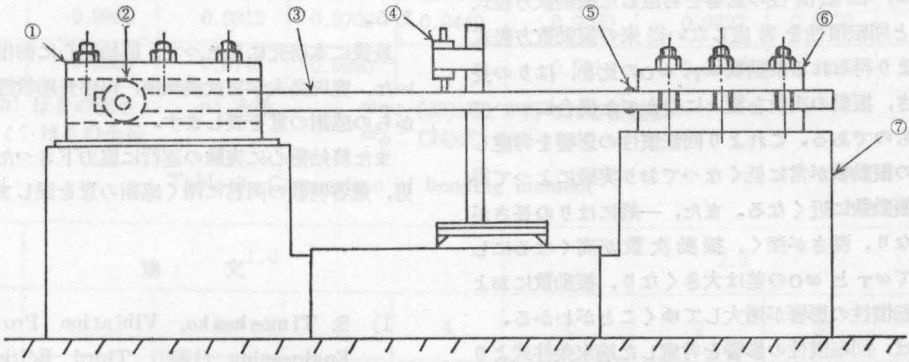


Fig. 3　Rough sketch of Experimental Apparatus

シログラフに記録させ，その振幅を曲げモーメントに換算して求めた。

なお，固定端の反力は測定方法に疑問が生じたため今回の実験からは除外することにした。

実験に用いた軟鋼はりの諸元を表１に示す。使用した機器は以下の通りである。

りは，一方を固着用鉄板⑥とボルトで基礎⑦に固定され，他端にはボールベアリングで作った車輪(2)が取りつけられており支持端レール①の上を自由にすべることができる。

実験は，はりを木槌で軽く叩いて自由振動させ，そのときのたわみを差動トランスで測定する。差動トランスのコアの先端ははりに強く接着されている。コアの変位量に比例して生じた電圧変化は変位計によって再びコアの変位量に直されて指示される。また変位形は電磁オシログラフに直結されているので，電圧変化は記録紙に正弦波形となって記録される。固定端の曲げモーメントは，固定端にごく接近した点にひずみゲージを貼り振動によって発生する曲げひずみを電磁オ

Table 1　Beams

供試ばり番号	全長 ℓ (cm)	深さ h (cm)	幅 b (cm)	ヤング率 E ($kg\ cm^2$)	断面２次モーメント I (cm^4)	比質量 ρ ($kg \cdot S^2/cm^4$)
S－1	94.5	2.523	1.489	2.07×10^6	1.9928	7.97×10^{-6}
S－2	100.3	1.995	0.897	2.07×10^6	0.5935	7.99×10^{-6}
S－3	100.2	2.191	2.191	2.10×10^6	1.9204	7.98×10^{-6}

動ひずみ測定器（携帯用DPM）	共和電業
直記式電磁オシログラフ	横河電機
変　位　計　（Type 6111）	新光電機
変動変圧器　（Type 1511）	新光電機
変　圧　器　（Type 5—130—20）	山菱電機
万能分析器（SA—33 B）	リオン
整流子モートル（SSC—611 E）	松下電器

第5章　実験結果および考察

5—1　振動数および固定端の曲げモーメントに及ぼす回転慣性の影響

従来の実験的研究によれば，実験によって求めたはりの振動数は，従来のはり理論より求められた振動数よりも低くなることが示されている。[1)] 小野[8)]も片持ばりの場合について同様の結果を報告しており，はりの長さが短かくなり振動数が高くなるほど実験値と理論値の差が増大することを確かめている。

表2は，回転慣性の影響を考慮した振動数方程式(23)式と回転慣性を考慮しない従来の振動数方程式(24)式より得られる振動数ω_T，ω_Oの比を，はりの長さ，深さ，振動の次数を種々に変えてた場合について示したものである。これより回転慣性の影響を考慮した場合の振動数が常に低くなっており実験によって得られる振動数に近くなる。また，一般にはりの長さが短かくなり，深さが深く，振動次数が高くなるにしたがってω_Tとω_Oの差は大きくなり，振動数におよぼす回転慣性の影響が増大してゆくことがわかる。

表3は，回転慣性の影響を考慮した端末条件式より得られた曲げモーメントM_{BT}と回転慣性を考慮しない端末条件式より得られる曲げモーメントM_{BO}の比を上と同様に示したものである。これらの結果から，固定端の曲げモーメントもまた，回転慣性を考慮した場合の方が値が小さくなることがわかり，また，はりの長さが短かく，深さが深く，振動次数が高くなればなるほどM_{BT}とM_{BO}の差が大きくなることがわかる。

5—2　端末条件の実験結果

図4～図9は，はりのたわみの実験値と固定端の曲げモーメントの理論値と実験値を縦軸に，時間を横軸にとり1サイクルについて示したものである。理論値と実験値はよく合っており，誤差は最大のもので25%，最小のものでは2%である。また，はりのどの点でたわみを測定しても結果に大差のないことがわかる。一般に，同一のはりについては，スパンの短かい場合に誤差が少なく，スパンの長い場合に誤差が大きくなっている。これは主として長いスパンの場合の支持端の条件が不完全であったためと思われる。

第7章　結　　論

1　本研究では，一端支持・他端固定のはりの横振動に対する回転慣性の影響をも考慮した振動数方程式(23)と端末条件式(35)，(36)を求めた。これらの式は，はり理論を拡張するのに役立つものである。

2　振動数および固定端の曲げモーメントに及ぼす回転慣性の影響は，いずれもはりの長さが短かくなり，深さが深く，振動次数が高くなるほど増大する。また，回転慣性を考慮した場合の方が考慮しない場合より実験値に近い値を与える。

3　本研究で求めた固定端の曲げモーメントを表わす端末条件式(35)は実際にも十分使用できるものである。

最後に本研究にあたって，終始熱心に御指導いただいた，鹿児島大学富武満教授，田中豊助教授に対し心からの感謝の意を表します。

また終始熱心に実験の逐行に協力下さった，有富正男，荒谷明教の両君に深く感謝の意を表します。

文　　献

1) S. Timoshenko, Viblation Problem in Engineening (1955) Third Edition Dvpn Nostrand
2) A. V. Krishina Murty, Viblation of Short Beam AIAAJ. 8—1 (1970) 34
3) J. P. DEN. Hartog, Mechanical Vibrations (1956) Fourth Edition McGRAW-Hill
4) 井町　勇，機械振動学 (昭39)　朝倉書店
5) 古川　英一，振動および衝撃測定 (昭41)　誠文堂
6) 谷口　修，改訂振動工学 (昭32)　コロナ社
7) 西村源六郎，振動工学 (昭44)　誠文堂
8) 小野　洋一，一様断面棒の横振動時における端末条件 鹿児島大学　修士論文

Table 2　Coparison of angular freguency

$* \omega_T / \omega_o$

h(cm)	1.0				2.0			
ℓ (cm) \ n	1	2	3	4	1	2	3	4
80	* 0.9997	0.9996	0.9994	0.9989	0.9995	0.9987	0.9976	0.9957
60	0.9997	0.9994	0.9990	0.9981	0.9993	0.9979	0.9956	0.9924
40	0.9995	0.9988	0.9976	0.9958	0.9987	0.9953	0.9906	0.9831
30	0.9993	0.9979	0.9957	0.9925	0.9975	0.9920	0.9831	0.9712

h(cm)	3.0				4.0			
ℓ (cm) \ n	1	2	3	4	1	2	3	4
80	0.9909	0.9892	0.9864	0.9823	0.9985	0.9955	0.9903	0.9834
60	0.9904	0.9873	0.9824	0.9753	0.9977	0.9921	0.9833	0.9712
40	0.9889	0.9812	0.9709	0.9449	0.9950	0.9827	0.9638	—
30	0.9869	0.9746	0.9560	—	0.9914	0.9702	0.9392	0.9015

h: はりの深さ　n: 次数　ω_T: (23)式より得られる振動数
ℓ: はりの全長　ω_o: (24)式　〃

Table 3　Comparison of bending momeut

$* M_{BT}/M_{BO}$

h(cm)	1.0				2.0			
ℓ (cm) \ n	1	2	3	4	1	2	3	4
80	* 0.99981	0.99976	0.99973	0.99947	0.99970	0.99940	0.99894	0.99801
60	0.99980	0.99967	0.99956	0.99918	0.99961	0.99907	0.99811	0.99704
40	0.99971	0.99948	0.99950	0.99514	0.99922	0.99861	0.99834	0.98291
30	0.99958	0.99940	0.99493	0.99616	0.99857	0.998433	0.98151	0.98525

h(cm)	3.0				4.0			
ℓ (cm) \ n	1	2	3	4	1	2	3	4
80	0.99949	0.99876	0.99750	0.99566	0.99910	0.99785	0.99538	0.99242
60	0.99917	0.99794	0.99599	0.99356	0.99865	0.99646	0.99278	0.98862
40	0.99833	0.99630	0.99499	1.05461	0.99706	0.99361	0.99144	—
30	0.99721	0.99689	0.95863	—	0.99517	0.99507	0.93138	0.94870

h: はりの深さ　n: 次数　M_{BT}: (35)式より得られる曲げモーメント
ℓ: はりの全長　M_{BO}: (37)式より　〃

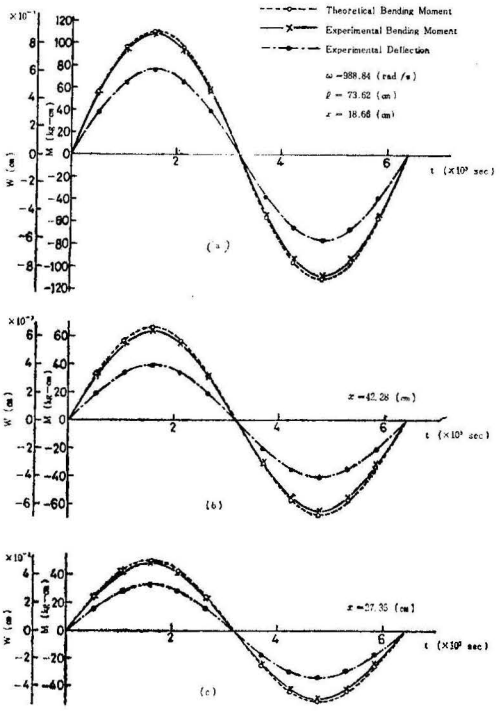


Fig. 4 Bending moment and deflection for S-1

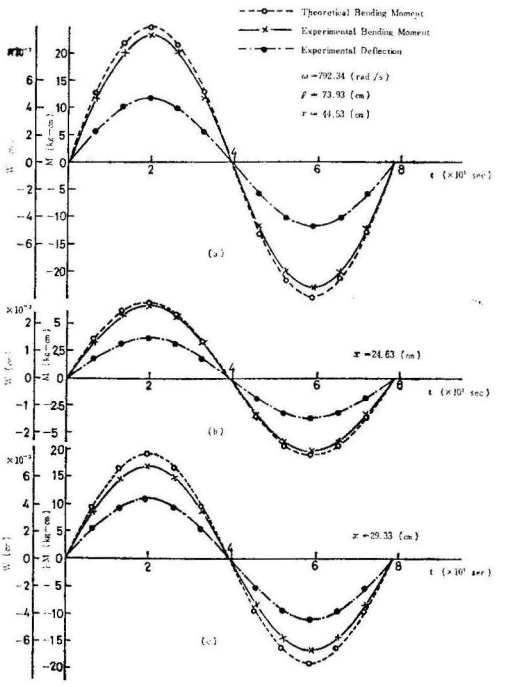


Fig. 6 Bending moment and deflectio for S-2

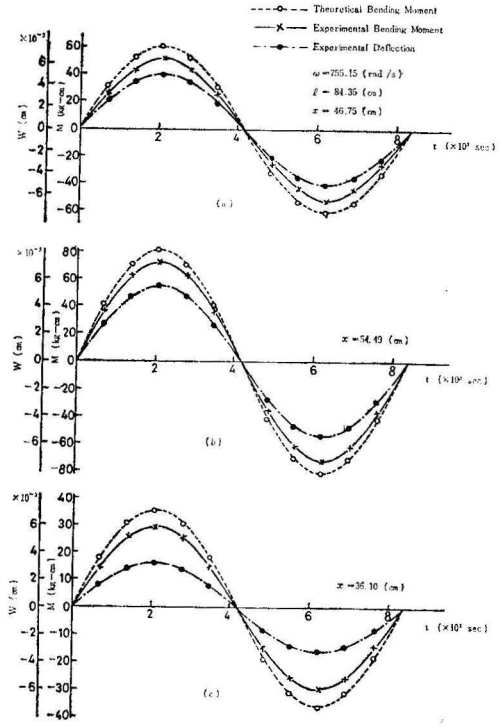


Fig. 5 Bending moment and deflection for S-1

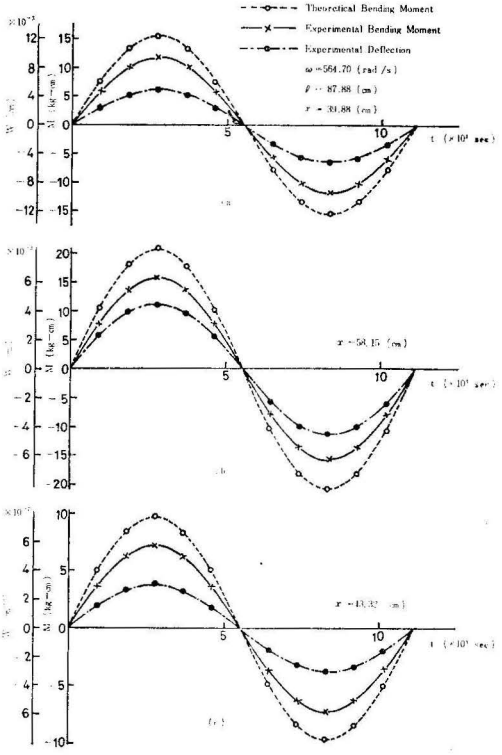


Fig. 7 Bending momentand deflectio for S-2

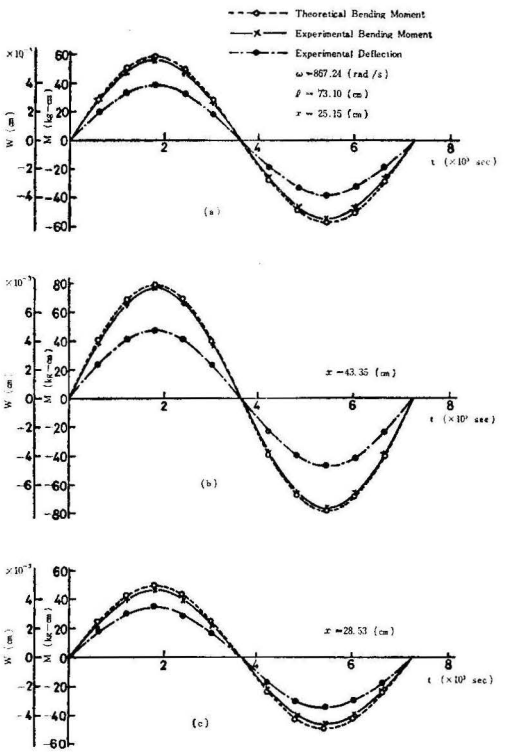


Fig. 8 Bending moment and deflectio for S-3

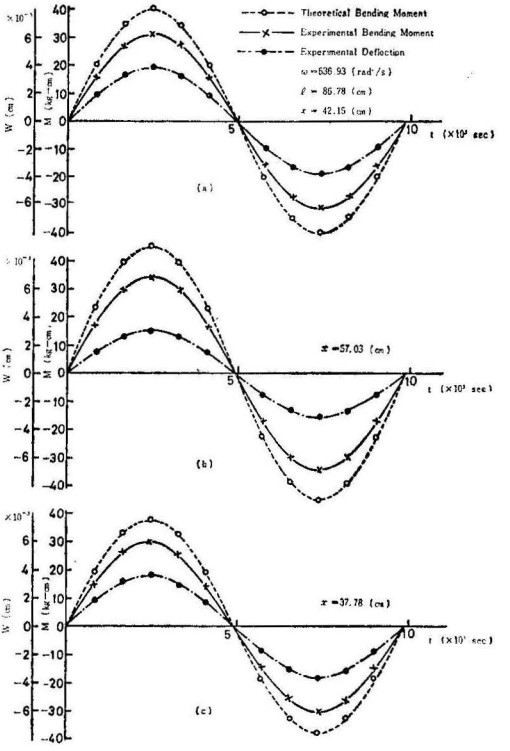


Fig. 9 Bendingmoment and deflection for S-3