

琉球大学学術リポジトリ

擬似衝撃波に関する研究

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2013-09-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 永井, 実, Nagai, Minoru メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/26356

擬似衝撃波に関する研究

永 井 美*

Investigation of Pseudo-shock Waves

Minoru NAGAI *

Summary

In the high-speed flow in duct, the shock wave which has occurred when the supersonic flow was decelerated to the subsonic flow interacts with the wall boundary layer. Then, the length of the compression region is lengthened and becomes some times of the duct length. Such a shock wave is called pseudo-shock wave being distinguished from the normal shock wave.

It is thought that the interaction problems of shock waves and boundary layers have been learned mainly from the view point of the outer flow aerodynamics such as aeronautics and there are few investigations from the view point of the inner flow aerodynamics, so there remains many unknown points about the behaviour and the structure of pseudo-shock waves in ducts.

In this paper, pseudo-shock waves in ducts were investigated experimentally and theoretically.

Chapter 1 of this paper gives a review of the investigations of shock-boundary layer interactions and pseudo-shock waves. In chapters 2 and 3, the behaviour of pseudo-shock waves in fairly long ducts and at the portion of sudden enlargement of duct area were learned and the results were explained by the theory of one-dimensional adiabatic friction flow. Further, it was reported that there was the history in the behaviour of pseudo-shock at the sudden enlargement portion and that the oscillation of pseudo-shock wave gave great influences to the duct wall locally.

In chapter 4, the structure of pseudo-shock waves of various inflow Mach numbers were observed and a diffusion model of pseudo-shock wave was presented which was obtained by reforming Crocco's shockless model. This model could explain the length of pseudo-shock and the pressure distribution along the duct in the region of pseudo-shock wave, and closer agreements between the theory and the experimental data by author and other researchers were obtained.

In chapter 5, it was cleared that the pseudo-shock wave in a straight duct was not steady but always oscillating to and fro in the duct, and theoretical considerations of causes and frequencies of the oscillations were presented.

Chapter 6 gives the conclusions of this investigation.

Finally in the appendix, the basic theories of the high speed aerodynamics in ducts which were used in this paper were summarized.

受付：1974年10月30日

* 琉球大学理工学部機械工学科

目 次

記号 (30)

序論 (31)

第1章 擬似衝撃波に関する従来の研究 (31)

 1.1 衝撃波と境界層の干渉 (31)

 1.2 擬似衝撃波 (33)

 1.3 擬似衝撃波のモデル (34)

第2章 長い管路に発生した擬似衝撃波 (35)

 2.1 実験装置 (35)

 2.2 擬似衝撃波の挙動 (36)

 2.3 軸方向静圧分布 (38)

第3章 管路の急拡大部に発生した擬似衝撃波 (41)

 3.1 実験装置と計測の方法 (41)

 3.2 管路の急拡大部における擬似衝撃波の挙動 (42)

 3.3 管軸方向静圧分布の変化 (44)

 3.4 擬似衝撃波の発生に伴う振動現象 (45)

 3.5 高速度シュリーレン写真による観察 (48)

 3.6 擬似衝撃波の振動と諸変動量の関連 (49)

 3.7 浅底水槽流による模擬試験 (49)

第4章 擬似衝撃波の構造 (52)

 4.1 マツハ数可変型小型超音速風洞 (52)

 4.2 実験結果とその考察 (54)

 4.3 擬似衝撃波の拡散モデル (57)

 4.4 拡散モデルの実験的検証 (60)

第5章 擬似衝撃波の振動現象 (62)

 5.1 計測方法 (62)

 5.2 擬似衝撃波の振動とその解析 (63)

 5.3 壁面静圧の変動 (66)

 5.4 振動現象に関する考察 (68)

第6章 結 論 (71)

 謝 辞 (72)

 参考文献 (72)

補遺 管内高速流動の基礎理論 (73)

 A.1 断熱流れの基礎式 (73)

 A.2 等エントロピ流れ (74)

A.3 断熱摩擦流れ (76)

A.4 衝撃波の発生 (78)

A.5 衝撃波前後の関係 (79)

記 号

A 管路の断面積

a 音 速

c 擬似衝撃波の拡散モデルにおける高速流の減衰係数

c_p 定圧比熱

c_v 定積比熱

D 管の等価直径

f 壁面摩擦係数または周波数

G 重力の加速度

h エンタルピ

J 衝撃関数 = $pA + \rho u^2$

L 擬似衝撃波の長さまたは管路の長さ

ℓ 無次元長さ = L/D

ℓ_{max} 最大チョーク長さ

M 気流マッハ数 = u/a

m 質量流量

P₀ 集合胴圧力

p₀ 局所よどもみ点圧力

p 静 圧

R 気体定数

Re_D 管路の等価直径を基準にしたレイノルズ数

R_{ij} ξ_i と ξ_j の相関関数

r_{ij} ξ_i と ξ_j の相関係数

S スペクトル密度関数またはエントロピ

s 修正したスペクトル密度関数

T 温 度

t 時 間

u 気流速度

w 無次元速度 = $u/\sqrt{2c_p T_0}$ (クロッコ数)

Δw 無次元速度差 = $w_1 - w_2$

X 管軸方向の距離

x 管軸方向の無次元距離 = X/D

γ 比熱比 = c_p/c_v

ρ 密 度

μ 拡散モデルにおける低速領域の流量の全流量に対する比 = m''/m_1

- ξ 偏差 $= x - \bar{x}$
- τ 時間間隔

添 字

- 0 集合胴またはよどみ点状態
- 1, 2 擬似衝撃波直前の状態, 直後の状態
- 1, 2, ... 先頭衝撃波, 第 2 衝撃波, ...
- i, e 直管入口の状態, 出口の状態
- *
- ' , " 音速状態
- ' , " 拡散モデルにおける高速領域, 低速領域
- H ヘルムホルツの共鳴
- O 気柱振動

序 論

超音速流が亜音速流へ減速される過程では、気体の密度、圧力、温度の非常に高いこう配が発生する。その内部は、粘性および熱伝導性が重要な役割を演ずる散逸過程であるが、区間の長さは非常に短かく、およそ気体分子の平均自由行程の程度である。したがって通常の気体力学では、その散逸過程の長さを無視し、前後の一樣流に着目することによって、この過程を一つの不連続面とみなすことができる。かような不連続面は衝撃波とよばれ、中でも特に波面が流線と直交する場合は垂直衝撃波と呼ばれる。垂直衝撃波の一例として、衝撃波管内の静止気体中を伝播する圧縮領域をあげることができる。

ところが、管内高速流動において、超音速の気流が亜音速に減速される過程に発生する垂直衝撃波は、管内壁に発達した境界層との複雑な干渉によって、圧縮領域がひきのばされ、その区間の長さは管径の数倍にもなることが知られている。そうすると例えば超音速ディフューザの性能を論ずる場合に、もはやこの圧縮領域の長さおよびその過程を無視することはできない。このような圧縮領域は、通常の不連続面とみなされる衝撃波とは区別され、擬似衝撃波と呼ばれている。

衝撃波と境界層の干渉問題は、たとえば遷音速ならびに極超音速飛行体の物体表面に生じる現象、あるいは超音速ジェット推進機のインレットディフューザや超音速風洞のディフューザに生ずる現象として、従来おもに航空力学上の問題として、外部流体力学的研究に重点がおかれてきたように思われる。

ところが、近年の流体機械や装置の進歩に伴う流れ

の高速高圧化とともに、流体機械の翼間流れや管内流動においても、しばしば衝撃波と境界層の干渉問題が発生し、擬似衝撃波が注目を浴びつつあるように思われる。

それにもかかわらず、擬似衝撃波に関する研究資料の蓄積はまだ不十分で、現状では最も簡単な直管内における擬似衝撃波の構造すら明確には理解されていない。

本論文は、以上の観点から、管路内に発生した擬似衝撃波の挙動や構造を実験的に詳しく調べることを目的としたもので、擬似衝撃波に関する基本的な理解を得ることができたように思われる。

本論文では、第 1 章において、擬似衝撃波に関係する従来の研究を概観し、本研究の問題点を提供する。ついで第 2 章および第 3 章において、比較的長い管路および管路の急拡大部における擬似衝撃波の実験結果について述べ、擬似衝撃波の挙動を明らかにするとともに、管路の急拡大部における擬似衝撃波の振動が管路系に及ぼす影響について論ずる。第 4 章では、直管内に発生した擬似衝撃波の構造に関する詳しい実験結果を基に、擬似衝撃波の拡散モデルを数々に提案する。このモデルによれば、従来不明であった擬似衝撃波の長さおよび擬似衝撃波内部の圧力分布が説明できる。最後に第 5 章において、擬似衝撃波に振動現象のあることを明らかにし、その原因および振動の周波数について考察を行なう。

第 6 章は結論である。なお、本論文に必要な、管内高速流動の基礎理論と数式を一括して巻末の補遺に掲げた。

第 1 章 擬衝撃波に関する従来の研究

本章では、外部流れにおける衝撃波と境界層の干渉についての研究を紹介し、ついで、内部流れにおける擬似衝撃波に関する研究を概観する。

1.1 衝撃波と境界層の干渉 衝撃波と境界層の干渉に関する工学的研究が組織的に開始されたのは、ほぼ遷音速飛行が実用化された 1940 年代後半のように思われる。

Page と Sargent (1.1) は、超音速風洞内に設置された平板上の境界層と垂直衝撃波との干渉の様態をシュリーレン法を用いて観察し、干渉の結果衝撃波の足は λ 形に分枝し、境界層内の圧力上昇は 2 段階にわたって上昇することなどを始めて明らかにした。ついで、Barry, Shapiro, Naumann ら (1.2) は $M=2.05$ の気

流中で、種々の強さの斜め衝撃波と境界層の干渉について系統的な実験を行なった。図 1.1 はかれらの実験における衝撃波の入射点近傍における干渉の詳細模様

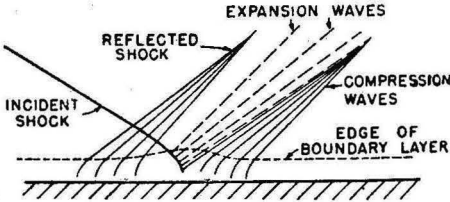


Fig. 1.1 Reflection of a shock from a plane wall with a boundary layer. (Ref. 1.2)

で、境界層は、逆圧力勾配による局所的剝離のために、衝撃波の入射点の前方より壁面からもち上げられ、入射点の下流で再び壁面に付着する。このような境界層の界面の変化は、図に示すように主流へ一つの膨脹波と二つの圧縮波を発生せしめており、衝撃波の壁面からの反射は局所的には等圧反射であるが、これらの波が全体として巨視的な正常反射を構成している。

図 1.2 は、壁面にその衝撃波の入射点近傍における静

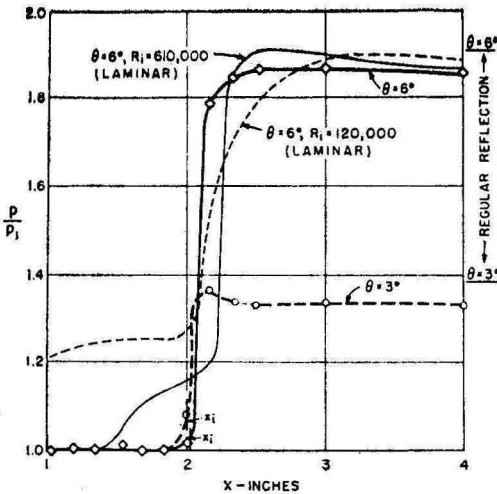


Fig. 1.2 static pressure distribution on the plate surface with tripped turbulent boundary layer. (Ref.1.2)

圧分布で、乱流境界層の場合と層流境界層の場合を比較することができる。これらの実験結果より入射衝撃波が強いほど境界層の界面は強くもち上げられ、また境界層は層流境界層の方が (Rex が小さいほど) 大きくもち上げられる等が明らかにされた。

Gadd (1.3) は、斜め衝撃波と境界層の干渉問題に

おいて境界層の速度プロファイルを仮定することによって剝離点の圧力を理論的に予測する式を与えた。またほぼ同じ時期に Tyler と Shapiro (1.4) も剝離点圧力を与える式を導いたが、その結果は、 $M = 1 \sim 3$, $Rex = 10^5 \sim 10^7$ の範囲にわたる実験結果とほぼ一致している。その後、理論的研究はさらに Mager (1.5), Lees と Reeves (1.6), Gai (1.7) らの研究により進歩した。図 1.3 は Lees と Reeves の解と実験結果の比

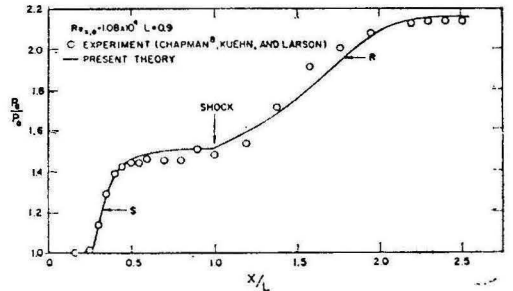


Fig. 1.3 Experimental and theoretical pressure distributions for a shock-wave boundary-layer interaction at $M=2.45$ (Ref. 1.6)

較で、境界層の剝離および再付着ともに両者はよく一致している。

つぎに、垂直衝撃波と境界層の干渉については、Gadd (1.8) および Seddon (1.9) の実験がある。Seddon は $M = 1.47$ の気流中で Shock generator で発生せしめた垂直衝撃波と乱流境界の干渉の模様を詳細に観察し、とくに分岐した衝撃波の足の近傍の速度分布を測定して 図 1.4 に示す結果を得た。これに

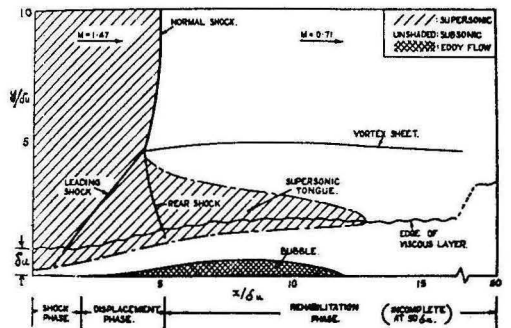


Fig. 1.4 Interaction of normal shock wave and turbulent boundary layer (Ref 1.9)

よれば、分岐足の後流は必ずしも亜音速流ではなく、“Supersonic tongue” の領域が存在する。さらに Viscous layer を上流から Shock phase, Displacement phase および Rehabilitation phase にわけ、

Rehabilitation phaseにおける速度プロファイルの変化をColes (1.10) の“Wake hypothesis”を拡張して説明した。またこの場合、壁面静圧は Rehabilitation phase によってなだらかに上昇するが、最終的に到達する値は垂直衝撃波の理論値の90%であると報告している。

以上にのべた実験では、衝撃波を Shock generator によって発生せしめているので、衝撃波の位置は壁面に対して固定されている。ところが遷音速飛行中の翼面に局部的に発生した弱い垂直衝撃波は、翼面境界層と干渉するとともに、前後にはげしく振動することが、報告されている。すなわち Liepmann (1.11) らは $2 \times 20 \text{ in}^2$ の風洞を用い、 $M=0.844$ の気流中に翼型を設置して実験を行ない、翼面に発生した衝撃波が前後にはげしく振動していることを、露光時間の異なる2枚のシュリーレン写真によって明らかにした。

HiltonとFowber (1.12) は $20 \times 8 \text{ in}^2$ 断面の風洞の気流中の翼について同様の実験を行ない、3,000 rpm のドラムカメラによる直接撮影により衝撃波の振動を明らかにした。Holder (1.13) は高速度カメラによって同様の実験を行ない、900~1800Hzの周期的な振動現象を観察している。図 1.5 は Hilton らによって観察さ

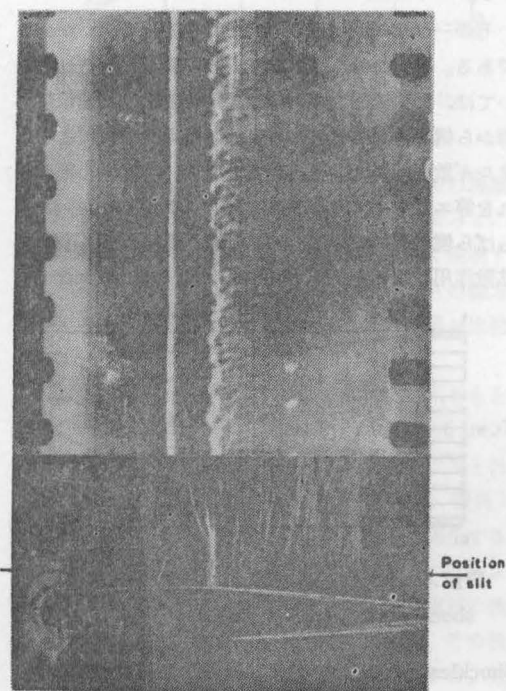


Fig. 1.5 spark schlieren photograph and wave traces. Film movement was upward. (Ref. 1. 14)

れた翼面上の衝撃波のシュリーレン写真 (1.14) であり、写真の上部に示すドラムカメラのフィルム上の軌跡によって、衝撃波群が前方へ運動していることがわかり、その周波数は約 1,000 Hz であるとしている。Lambourne (1.15) は衝撃波の振動とフラップの運動の関連を明らかにし、バズ現象および衝撃波の振動にともなう壁面静圧の変動を説明している。図 1.6 は Humphreys によって観察された翼面の圧力変動を示

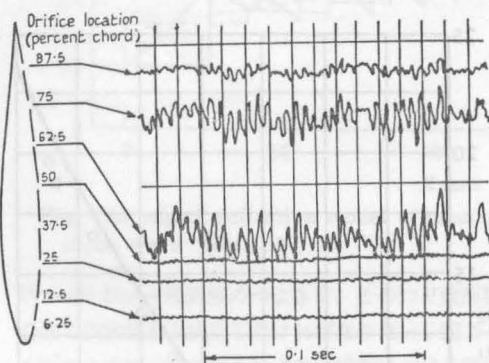


Fig. 1.6 Pressure fluctuations at surface of 12% thick aerofoil $M=0.87$, $\alpha=0^\circ$. (Ref. 1. 15)

すオシログラム (1.15) である。衝撃波の振動に対する理論的な研究としては、遷音速流の安定性を考察した Kuo (1.16) の研究および、平板上の層流境界層と分岐した衝撃波の足との干渉によって生じる自励振動を示した Trilling (1.17) の理論がある。Trilling の理論は定性的に、高い周波数 (1,000 ~ 2,000Hz) の衝撃波の振動の説明に成功しているように思われる。

1.2 擬似衝撃波 つぎに管内超音速流中に発生した擬似衝撃波に関する研究についてのべよう。ただし、この方面の研究は、前節にのべてた衝撃波と平板境界層の干渉に関する研究に較べれば、かなり少ない。

Stodola (1.18) はラバル管の軸中心線上に可動静圧管を挿入し、管内に衝撃波が発生している時の軸方向静圧分布を測定したが、その圧力上昇は垂直衝撃波の理論が示すような不連続ではなく、かなりなだらかなものであることを報告した。Weise (1.19) は2次元の管路において、上下壁面の境界層を吸い込みによって除去すれば、その時の衝撃波はほぼ垂直になることを確かめ、擬似衝撃波が境界層の存在によるものであることを明らかにした。つづいて、Moeller (1.20) らによって、シュリーレン法を用いた系統的な実験が行な

われ、管内に発生した垂直衝撃波は、流入気流のマッハ数が高いほど、また境界層が厚いほど、境界層を強く干渉し、なだらかな圧力上昇をもった擬似衝撃波となることを示した。

Neumann と Lustwerk (1.21) は直径1" で管長約50" の細長管内にマッハ数約 5.0 の超音速気流を流入させ、背圧を変化させながら管壁面の軸方向静圧分布を測定した。図 1.7 は圧力上昇の開始点から圧力の最

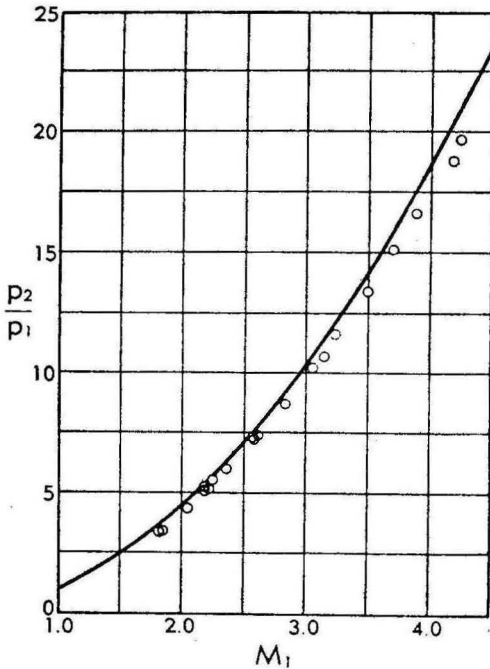


Fig. 1.7 Experimental pressure ratios of pseudo-shocks and theoretical pressure ratio of normal shocks at various Mach number. (ref. 1. 21)

大値までを擬似衝撃波の区間とし擬似衝撃波前後の圧力比を垂直衝撃波の理論と比較したものである。擬似衝撃波前後の圧力比は垂直衝撃波の理論値と 5% の範囲でよく一致するがその理由として、擬似衝撃の区間では境界層が剝離しているために、壁面摩擦力による運動量損失がほとんど無いことを挙げている。また擬似衝撃波の長さは、マッハ数の増加関数で、およそ管径の10倍前後であると述べている。ただし、本実験では、一つのラバル管と一本の細長管による一回の実験結果から多数のマッハ数に対する擬似衝撃波の圧力比を計算しているため、入口マッハ数の値のとり方いかんによっては結論がかなり変更される可能性もある

(1.22) のでさらに精密な追試が必要であるように思われる。

McLafferty (1.23) は、垂直衝撃波へ流入する気流の速度境界層の影響を考慮に入れ、衝撃波前後の質量、運動量およびエネルギーの保存則を解いて、流入気流の境界層排除厚さが厚くなるほど、衝撃波による圧力上昇が小さくなることを理論的に示した。

文献 (1.24) は、擬似衝撃波の長さに関する従来の実験結果を流入気流マッハ数の逆数を用いて、 $L/D = 18.75 (1 - 1/M_1)$ なる直線で整理しているが、その根拠は明らかでない。

最近、Waltrup と Billig (1.25) は比較的短い円管中に発生させた擬似衝撃波について実験を行ない、擬似衝撃波の圧力比は、垂直衝撃波の理論値よりかなり低くなることを示し、このことより擬似衝撃波は斜め衝撃波と考えられると結論している。ただし、本実験はおもに擬似衝撃波先頭部の圧力分布に注目したもので、擬似衝撃波の終了点は明確ではないなど、かなり疑問点を残しているように思われる。

1.3 擬似衝撃波のモデル 擬似衝撃波を説明する試みとして、これまでに二つのモデルが提案されている。

その一つは Crocco (1.26) による Shockless model である。Crocco は、境界層が十分発達した流れにおいては、擬似衝撃波の内部は X 形の弱い斜め衝撃波の群から構成されることに着目し、斜め衝撃波によるエネルギー散逸はかなり小さいことから、管路中心部の流れを等エントロピ流れと考え、エントロピ上昇はもっぱら境界層の剝離につづく管壁近傍の低速領域の拡散作用によるものと考えた。図 1.8 に Crocco の

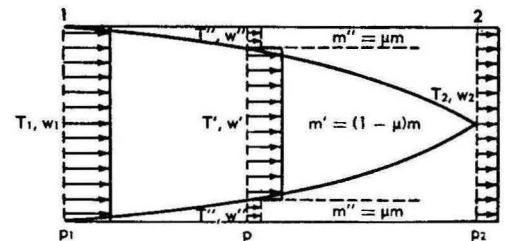


Fig.1.8 crocco's shockless model of pseudo-shock wave (ref. 1. 26)

Shockless model を示す。検査面 1 および 2 を擬似衝撃波の先端および後端とし、低速流領域の流量の全流量の対する割合は μ で表わされる。 μ は検査面 1 で零で、軸方向に漸次増大し、検査面 2 で遂に 1 とな

る。内部の静圧は各断面にわたって一定であると考
え、等エントロピ領域の無次元速度 w' より次式によ
って与える。[w' については補遺の式(A.4)、
(A.5)を参照]

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{1 - w'^2}{1 - w_1'^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (1.1)$$

壁面における熱伝達および摩擦力は無視するので、各
断面について、質量、運動量、およびエネルギー保存則
および(1.1)を適用すれば流量比 $\mu = m''/m_1$ の関
数として、擬似衝撃波内部の諸量を計算することがで
きる。図1.9に計算結果を示す。モデルの性格から検

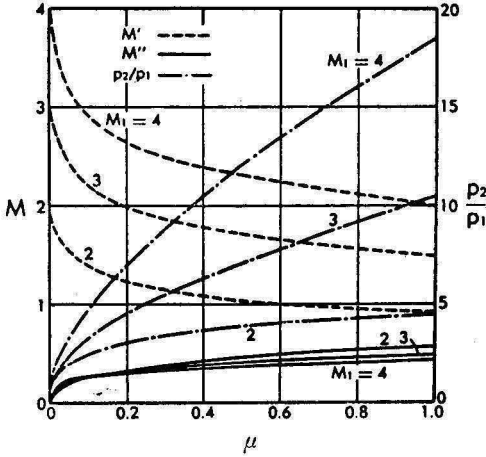


Fig. 1.9 Example of calculations by shockless model $\gamma=1.4$ (ref. 1.26)

査面1および2における状態量は垂直衝撃波の理論に
よるものと全く同一となるが、本モデルによって、擬
似衝撃波内部のなだらかな圧力上昇をうまく説明する
ことが可能となった。ただし、本モデルは μ の軸方向
分布 $\mu = \mu(x)$ を与えないので、実験結果と比較す
ることは不可能である。

他の一つは、玉木らが(1.27)その実験結果をもとに
して提案した衝撃波反射モデルである。図1.10は
 $M_1 = 1.70$ の擬似衝撃波に適用した場合のモデルと計算
結果である。壁面における境界層の剝離を、頂角 10°
のクサビ形壁面でおきかえ、その先端より発生する斜
め衝撃波を管路中心線と管壁との間で交互に反射させ
る。反射をくり返すことによって斜め衝撃波の強さは
しだいに弱まり、ついに $M=1.0$ となり、その後は
亜音速拡散領域によって擬似衝撃波は終了する。先端
のクサビ角は、 M_1 にかかわらず 10° としてよいとし
ているが、先頭衝撃波から第2衝撃波、第2衝撃波か
ら第3衝撃波間の気流の壁面への曲げもどしによる

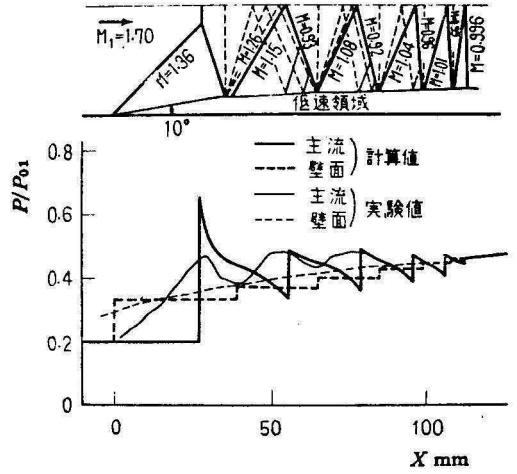


Fig. 1.10 shock reflection model of pseudo-shock wave (ref. 1.27)

Prandtl-Meyer膨脹波のつよさは、そのつど壁面静圧
分布の実験値から決定しなければならない。図より明
らかなように、本モデルによれば壁面における静圧の
なだらかな上昇と管路中心部の静圧の脈動を説明する
ことが可能である。ただし、モデルの性格から、個々
の実験結果を説明することは可能だが擬似衝撃波の構
造を一般的に予測するにはいたらない。さらに、現実
の擬似衝撃波が非常に振動しやすいものであることを
考慮すれば、かゝる静的な説明には限界があるように
思われる。

1.1節で述べたように平板境界層と干渉した垂直衝
撃波は激しい振動現象を伴っている。また、管内の擬
似衝撃波の振動現象に着目した研究はこれまでのとこ
ろ全く無い。

そこで本研究では、これらの研究成果の上に、改め
て、管内超音速流に発生した擬似衝撃波の挙動、構
造および振動現象を明らかにすることを試みた。

第2章 長い管路に発生した擬似衝撃波

本章および次章では、管内高速流の立場から、擬似
衝撃波の詳しい構造にはふれず、比較的長い管路中に
発生した擬似衝撃波が管前後の圧力比の変化によって
如何なる挙動を示すか、また管路途中に設けた管路断
面積の急拡大部は擬似衝撃波に対して如何なる効果を
及ぼすか、などのやや巨視的な実験結果について述べ
る。

2.1 実験装置 所定の管内超音速流を得る方法
として、吹出し式風洞の原理を用いた。実験装置の概
要を図2.1に示す。

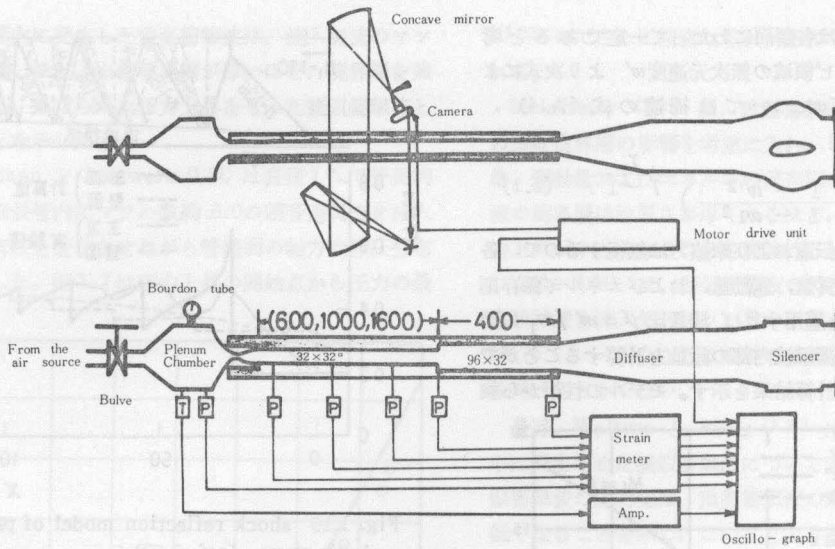


Fig. 2.1 Experimental apparatus

高圧空気源（常用圧力 $30\text{kg}/\text{cm}^2$ ，容積 6m^3 ）に貯えられた，よく乾燥した空気は，パイプラインを通過し，集合胴においていったんよみ点状態に回復したのち，ラバル管によって所定のマッハ数に加速され，供試管へ送りこまれる。供試管を通過した気流はディフューザ，消音器を経て大気へ放出される。ラバル管は3種で，設計マッハ数はそれぞれ3.0，2.0，1.4である。図2.2にラバル管の写真を示す。供試管は $32\times$

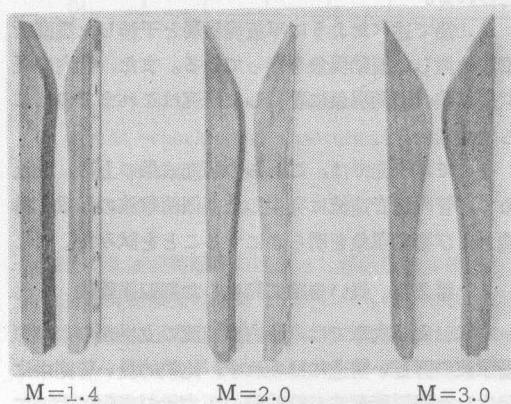


Fig. 2.2 D' Laval nozzle

32mm^2 の正方形断面の直管部とその後方の，面積比で1:3に急拡大された， $32\times 96\text{mm}^2$ の拡大部よりなる。管路の長さが擬似衝撃波に及ぼす影響を調べるため，図2.1に示す直管部には長さが600，1,000および1,600mmの3種類の管路を用意した。拡大管部の長さは400mmである。図2.3に直管部の長さ600mmの場

合の供試管の写真を示す。図に示されるように供試管

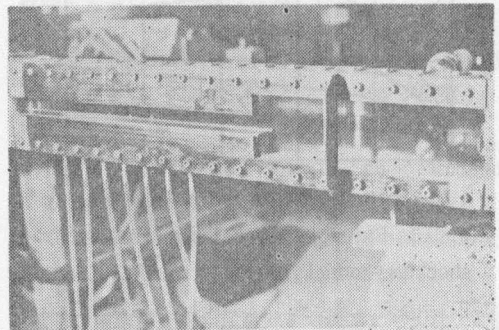


Fig. 2.3 Experimental duct with sudden enlargement portion of duct area,

の左右壁は光学的観察のために，フランジ部を除いて全面光学ガラスで構成されている。

2.2 擬似衝撃波の挙動 図2.4にラバル管の設計マッハ数が3.0直管部の長さが1,600mm (50D)の場合に，集合胴圧力を5.7および12 ataに変えた場合の流れのシュリーレン写真の代表例を示す。各写真はそれぞれ流れ方向に連続した10枚の写真より合成したものである。集合胴圧力 P_0 を大気圧から徐々に上げていくと，まずラバル管が超音速状態にスタートし，供試管に擬似衝撃波が進入してくる。この過程ですでに垂直衝撃波は境界層と干渉することによって擬似衝撃波となっている。直管部に進入した擬似衝撃波はさらに P_0 を上げるとともに下流へ移動し，同時にその形状を変化させているのが認められる。

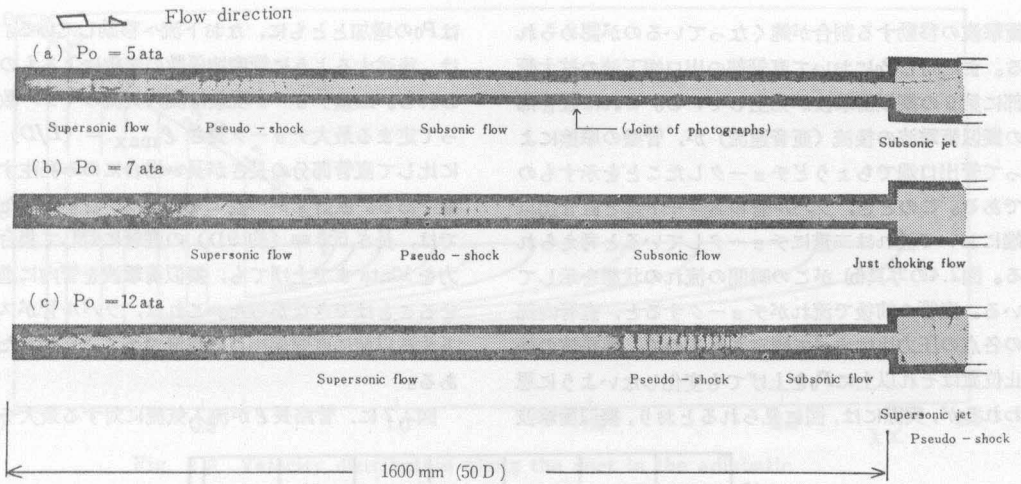


Fig. 2.4 Behaviour of pseudo-shock wave in a fairly long duct
(Design Mach number of D'Laval nozzle=3.0)

図 2.5 は擬衝撃波発生部分の拡大写真で先頭部がλ形衝撃波をなし、その後方には約10個の垂直状の衝撃波

が連なった曲率的な擬衝撃波を示している。

図 2.4 において、管路入口から擬衝撃波の先頭ま

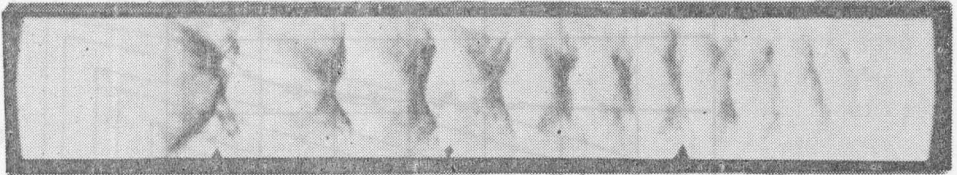


Fig. 2.5 Pseudo-shock wave in straight duct ($X_1 = 250\text{mm}$.
 $M_1 \approx 2.75$, $Re_D = 7,84 \times 10^5$)

での距離 X_1 と集合胴圧力 P_0 との関係を示せば、図 2.6 が得られる。同図によって、 P_0 の増加とともに擬衝撃波が、直管部へ進入し、さらに下流方向へ移動す

る様子が明らかである。ここで、移動曲線を細かくみれば、 P_0 が約 7 ata, X が約 800 mm (25D) の点を境にして、曲率が変化しており、 P_0 の増加に対する擬

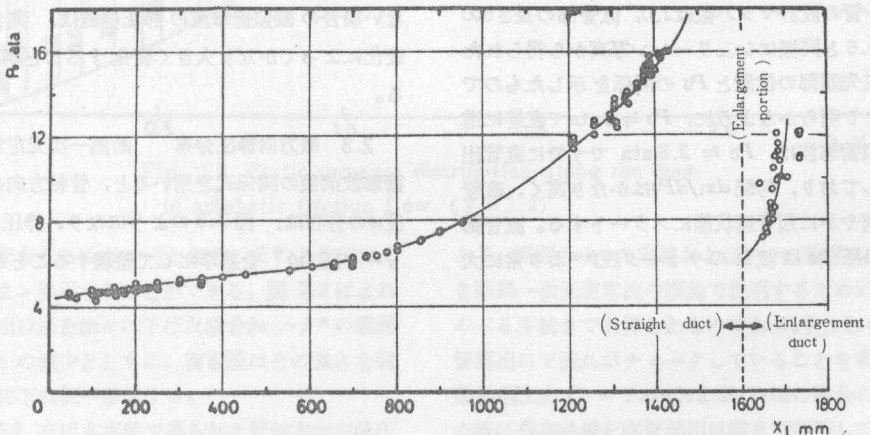


Fig. 2.6 Behaviour of pseudo-shock when the duct length is longer than the maximum choking length. (D'Laval nozzle $M=3.0$, $L=1,600\text{mm}$)

衝撃波の移動する割合が鈍くなっているのが認められる。また同じ P_0 において直管部の出口端下流の拡大管部に第2の擬似衝撃波が発生している。これは直管部の擬似衝撃波の後流(亜音速流)が、管壁の摩擦によって管出口端でちょうどチョークしたことを示すものである。このとき、ラバル管のスロート部と直管出口端において流れは二重にチョークしていると考えられる。図2.4の写真(b)がこの瞬間の流れの状態を示している。直管の前後で流れがチョークすると、直管内部の各点の圧力比はすべて固定されるので、衝撃波の静止位置はそれ以上に P_0 を上げても変化しないように思われるが、実際には、図に見られるとおり、擬似衝撃波

は P_0 の増加とともに、なお下流へ移動している。これは、後述するように管摩擦係数の変化によるものと思われる。二重チョーク現象は流入気流のマッハ数によって定まる最大チョーク長さ $\ell_{\max} = (L/D)_{\max}$ に比して直管部分の長さが長い場合にのみ発生する現象である。設計マッハ数1.4のラバル管を用いた実験では、長さ600mm(約9D)の直管に対して集合胴圧力を1.0ataまで上げて、擬似衝撃波を管内に進行させることはできなかった。これは、ラバル管がスタートする以前に直管部出口の気流がチョークしたためである。

図2.7に、管路長 ℓ が流入気流に対する最大チョー

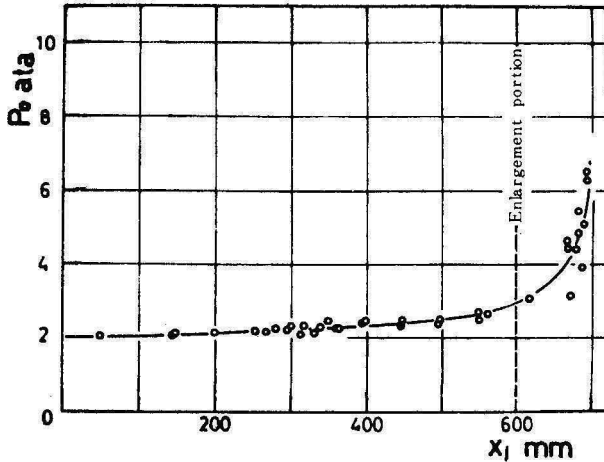


Fig. 2.7 Behaviour of pseudo-shock when the duct length is shorter than the maximum choking length. (D'Laval nozzle $M_1 = 2.0$, $L = 900\text{mm}$)

ク長さ ℓ_{\max} より短い場合の擬似衝撃波の挙動を示す。ラバル管の設計マッハ数は2.0、直管部の長さ600mmで、図3.6と同様にシュリーレン写真から得られた擬似衝撃波先頭部の位置と P_0 の関係を示したものである。図より明らかなように、 $P_0 \approx 2.8\text{ata}$ で直管に入れた擬似衝撃波は、 $P_0 \approx 2.8\text{ata}$ ですでに直管出口端に達しており、勾配 dx_1/dP_0 はかなり高く、直管部全体は速やかに超音速状態にスタートする。直管部出口端の静圧 p_e は流れのチョーク圧 p^* より常に大

きい。このように、流れが管路出口でチョークしていない場合の擬似衝撃波の静止位置は、集合胴圧力の変化によってかなり大きく変化することが認められる。

2.3 軸方向静圧分布 断熱一次元定常流および衝撃波前後の関係式を用いると、管軸方向の無次元速度 w の分布は、図2.8のようになり、静圧分布はチョーク圧力 p^* を基準にして整理することが可能で、

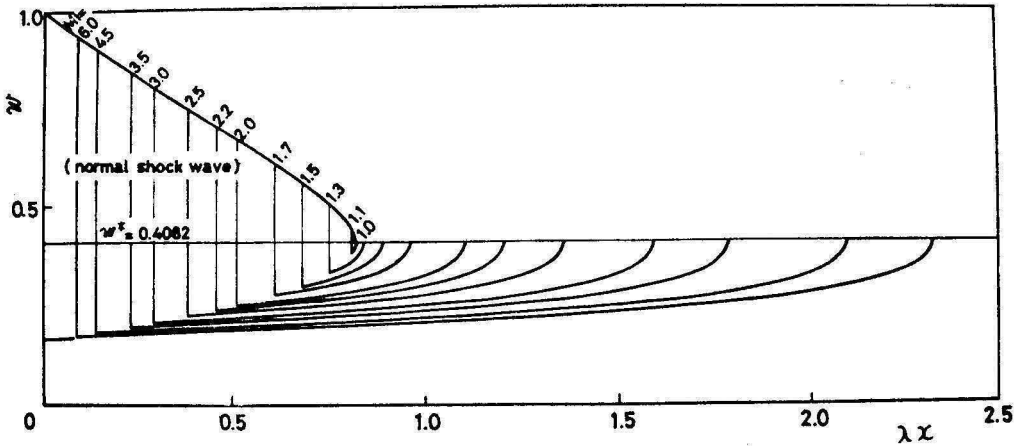


Fig. 2.8 Velocity distribution along the duct in the adiabatic friction flow ($\gamma = 1.4$)

図 2.9 に示すようになる。(補遺 A. 3 節参照) 両図は直管に $w=1.0$ すなわち $M = \infty$ の気流が流入し

た場合の計算結果である。 $w < 1.0$ の流入気流に対しては、図の横軸上で、流入気流の w および p/p^* に

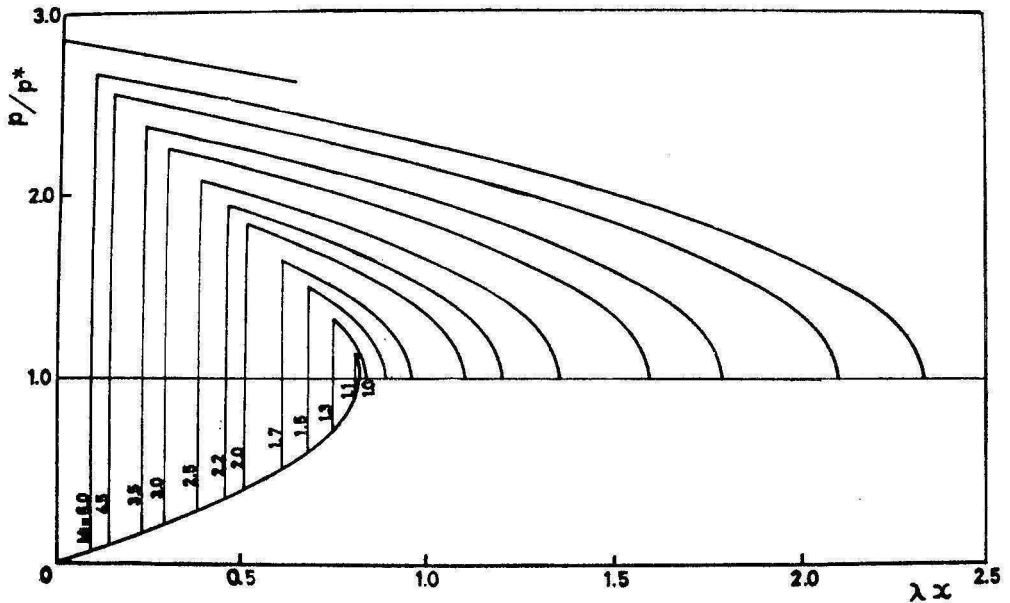


Fig. 2.9 Static pressure distribution along the duct in adiabatic friction flow. ($\gamma = 1.4$)

対する位置をあらためて $x=0$ とおき、そのより右のグラフをそのまま使用することができる。図 2.9 によれば、管路の出口圧を徐々に下げた場合 $p_e > p^*$ の範囲では p_e/P_0 の減少とともに、衝撃波はその強さを弱めつつ次第に下流側へ移動する。

つぎに 図 2.10 に本実験で得られた管軸方向の静圧分布を示す。図中の○印、△印および□印の静圧分布はそれぞれ図 2.4 の (a), (b) および (c) の状態の測定値で

ある。同図の 5 つの実線および 3 つの破線は、実験結果を断熱一次元定常流の理論で説明するために、以下にのべる手続きで計算したものである。すなわち、まず直管部出口で流れがチョークしていることを利用して、集合胴圧力 $P_0 = 7 \text{ ata}$ および 12 ata の場合の亜音速側の静圧分布曲線を直管部出口端まで外挿して $P^*/P_0 = 0.14$ を推定する。つぎに、管内の全測定点について p_1/P_0 を p^*/P_0 で除すると p_1/p^* が得られるの

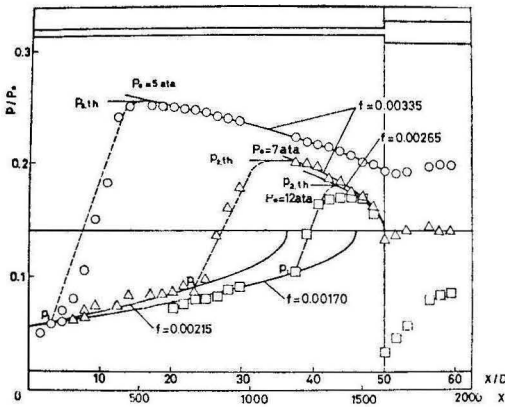


Fig.2.10 Experimental static pressure distributions along the duct with pseudo-shock waves.

で、次式の関係

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{p^*}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{p^*} \quad \text{【式 (A. 44)】}$$

より、 w の軸方向分布がわかる。実験的に得られたこの w の分布曲線より、擬似衝撃波の発生部分を除く、超音速流領域および亜音速流領域について、それぞれ適当な2点(例えば a, bを選んで、次式

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \ln w_a + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w_a^2}\right) - \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \ln w_b + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w_b^2}\right) = 4f(x_b - x_a) \quad \text{【式 (A. 36)】}$$

を満足するように f を決定する。 f が決定すれば、改めて、 f に基づく w の分布曲線を与え、さらに連続の式

$$\frac{p \cdot w}{1-w^2} = \text{const} \quad \text{【式 (A. 11)】}$$

より p/P_0 の分布曲線を描く。計算結果は図中の実線で示されている。つぎに擬似衝撃波の発生部に対しては、圧力上昇の開始点の無次元速度 w_1 および p_1/P_0 を用いて垂直衝撃波前後の関係式

$$w_2 = w^* \cdot w_1 \quad \text{【式 (A. 56)】}$$

$$p_2/p_1 = \frac{w_1^2 - w^* \cdot 4}{w^* \cdot 2(1-w_1^2)} \quad \text{【式 (A. 59)】}$$

より p_2/P_0 が計算される。計算結果は、 p_2/P_0 を満足し、圧力上昇の途中の実験点を通過する適当な曲破線によって図示した。図によれば、超音速側の静圧分布は、 $P_0 = 7 \text{ ata}$ の場合は $f=0.00215$, $P_0 = 12 \text{ ata}$

の場合は $f = 0.00170$ の分布曲線をほぼ満足している。また亜音速側の静圧分布は $P_0 = 5 \text{ ata}$ および 7 ata の場合は、 $f = 0.00335$, $P_0 = 12 \text{ ata}$ の場合は 0.00265 の曲線をほぼ満足している。

前述のように、流れが直管の両端で二重にチョークした場合、前後の圧力比が固定されるので、擬似衝撃波の静止位置も固定されるように思われるが、実際には、管摩擦係数 f の変化によって、擬似衝撃波の静止位置が変化したものと考えられる。 f の変化は集合胴圧力 P_0 が変化したためにレイノルズ数が変化することによる。図 2.11 はこのことを検証するために横軸

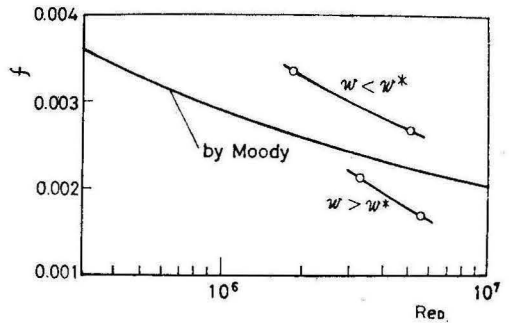


Fig. 2.11 Comparison between wall friction coefficients and Moody's chart.

に管の等価直径を基準にした流入気流のレイノルズ数 ReD 【式(A.46)】、縦軸に摩擦係数 f をとり、実験結果を低速円管流に対するMoody線図(2.1)と比較したものである。図より計算された f の値は、実験態形のレイノルズ数に対してほぼ妥当な値であり、レイノルズ数とともに摩擦係数が減少する割合もほぼMoody線図の傾向と一致している。亜音速側の圧力分布曲線より計算した摩擦係数はMoody線図よりやや高めの値を与え、超音速側の圧力分布曲線より計算した摩擦係数はMoody線図よりやや低めの値を与える。この傾向は、超音速流の壁面摩擦係数を直接測定したColes(2.2)の実験結果、すなわち、マッハ数が高いなど摩擦係数は非圧縮性の摩擦係数より低くなることと一致している。

つぎに、擬似衝撃波による圧力上昇を垂直衝撃波による理論値と比較すれば、両者はかなりよく一致しているように思われる。ただし垂直衝撃波による圧力比 p_1/p_2 は衝撃波直前のマッハ数 M_1 の選択に敏感に左右されるので本図よりただちに一般的結論を出すことはできない。本研究では、参考のため、管路壁面に微

少凸起（セロテープを壁面に貼付けた）を設け、発生したマッハ波の角度 θ をシュリーレン写真から読みとり、マッハ角の関係式 $M = 1/\sin \theta$ によって、マッハ数を計算したが、得られた値は、常に上述の一次元摩擦流れの仮定より得られる値よりも大であった。マッハ角から得られたマッハ数によって定まる衝撃波の理論的な圧力上昇は、実験値よりかなり大きい。いっばう一次元摩擦流れの関係より得られるマッハ数は、 ρ^*/P_0 の選択にかなり左右される。さらに、先述のように、 P_0 の変化によって超音速流の局所マッハ数が絶えず変化することも考慮しなければならない。

第1章に紹介した Neumannら (1.21) の実験は、直径1インチの細長管を用いて行われたもので、擬似衝撃波の静止位置を変化させることによって、マッハ数 M_1 を変化させたものである。したがって、 M_1 の決定には、本実験と同様の問題が残されているように思われる。他方、Seddon (1.9) および玉木ら (1.27) は、 M_1 のよく制御できる風洞を用いて、擬似衝撃波の実験を行っており、その結果、擬似衝撃波による圧力上昇は垂直衝撃波の理論値よりも10%前後減少するとしている。

本章では、長い管路中に発生した擬似衝撃波の挙動は、摩擦係数の変化や、擬似衝撃波の長さを考慮しなければならないと云う困難を除けば、ほぼ一次元断熱

摩擦流れの理論によって説明できることを報告するにとどめ、擬似衝撃波の構造については、後の第4章に譲る。

第3章 管路の急拡大部に発生した擬似衝撃波

管路の急拡大部の流れは、バルブやオリフィスの後流などのように、実際の配管系統で多く見られるが、とくに最近のような大容量、高圧、高速流動の装置および配管系統においては、管路の急拡大部の流れが局所的に超音速に達し、衝撃波を発生せしめることがしばしば生じる。すでに国内の事故調査 (3.1) によっても、ボイラあるいは高炉の配管において、減圧比の大きいバルブの下流測管路が擬似衝撃波によると思われる異状振動によって運転中に破損した事故が数件発生している。本章では、図 2.1 に示した供試管の急拡大部にかかる擬似衝撃波の挙動および擬似衝撃波の発生にともなう振動現象についてのべる。

3.1 実験装置と計測の方法 実験装置は 図2.1 の装置において直管部の長さ 600mm、拡大管部の長さ 400mm のものを用いた。その詳細図を 図3.1 に示す。急拡大部は管路の断面積を2次的に1:3の割合で拡大する。

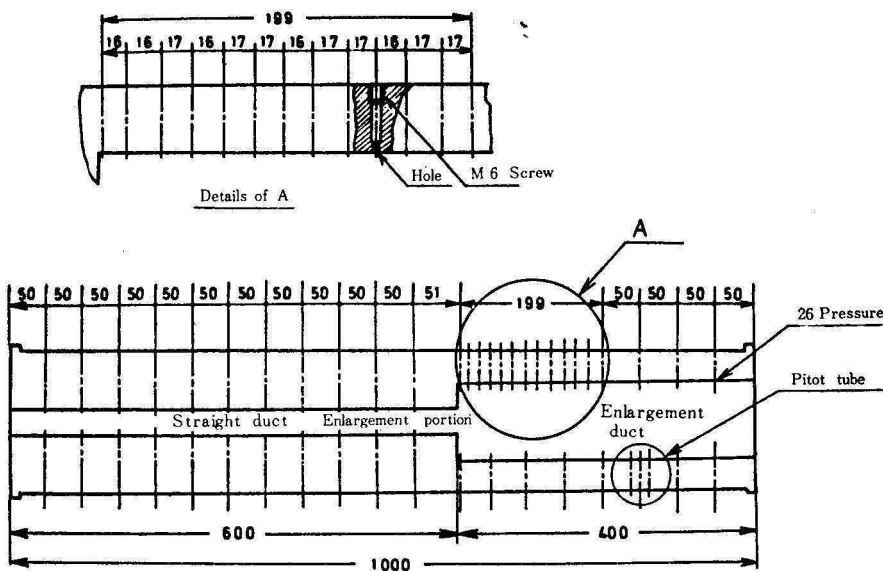


Fig. 3.1 experimental duct

本実験では、流れの場の光学的観察とあわせて、擬似衝撃波の発生に伴う圧力の変動、振動、騒音の発生

などを明らかにするためつぎの計測を行なった。

(a) 壁面静圧変動の計測、固有振動数の高い(約10

KHz) 半導体ゲージを用いた圧力変換器を直接管壁の静圧測定孔に取付け、壁面静圧の変動を計測した。

(b) 主流中の静圧および全圧変動の計測、同様の半

導体ゲージを内部に挿入したピトー静圧管および全圧管を用い、管路急拡大部直後の主流中の圧力変動を計測した。図3.2に使用したピトー管の詳細な構造を示

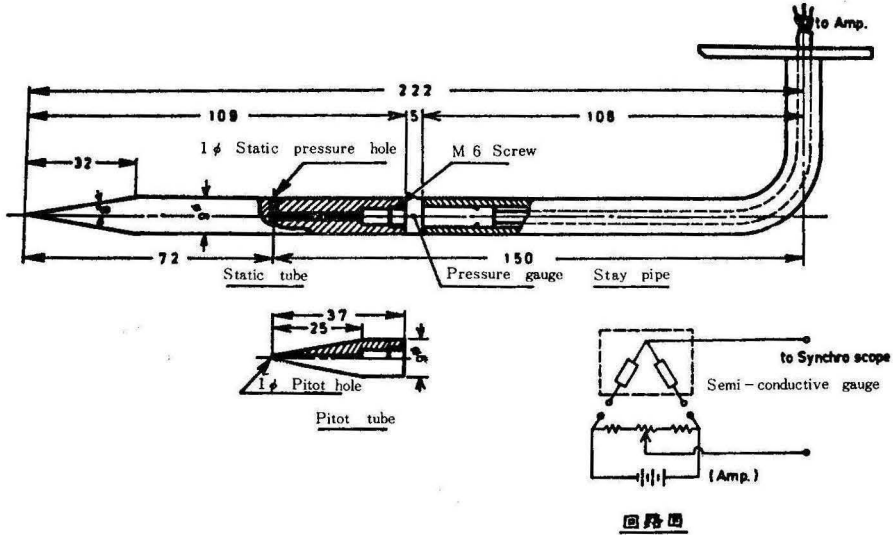


Fig. 3.2 Pitot-static tube

す。

(c) 管壁振動の計測、供試管の振動を管壁に取付けた加速度型圧電ピックアップによって測定した。

(d) 騒音の計測、管路の急拡大部近傍の騒音を騒音計で計測した。騒音計のマイクロフォンを管路の外側で管壁から約5 cmの位置に置き、周囲の騒音は低くして、擬似衝撃波が発生している音をできるだけ他の騒音から区別するようにした。

以上の計測による圧力変動、管壁振動および騒音は、すべてオシロスコープで観察されると同時にテープレコーダに記録され、周波数分析器によってそれぞれ分析が行われた。

また、シュリーレン装置の受光部に通常のカメラの他に高速度カメラを設置して、管路の急拡大部に発生した擬似衝撃波の振動現象を直接観察した。

3.2 管路の急拡大部における擬似衝撃波の挙動

図3.3に管路の急拡大部における擬似衝撃波の挙動のシュリーレン写真を示す。前章で明らかにしたように、管路の急拡大部の流れは、その前方の直管部の長さが流入気流の最大チョーク長さ l_{max} よりも長く出口端でチョークする場合と、そうでない場合によって異なる。図3.3は後者の場合である。なおこの場合の直管部における擬似衝撃波の挙動は図2.7に示されている。図3.3より、 $P_0 = 2.5$ ata で直管の出口に達し

た擬似衝撃波(図(a))は、 P_0 をさらに上げると、そのまま形状を崩さずに急拡大部を通過し、拡大管部の自由噴流中へ移動する(図(b))。このときの流れは、ラバル管による不足膨脹流と類似している。さらに P_0 を増加させると、自由噴流は次第にその広がり角度を増し(図(c))、遂に管路壁面に到達する(図(d))。この過程で擬似衝撃波は2本の強い衝撃波からなる構造に変化しており、 P_0 をさらに増加させると擬似衝撃波は下流へ移動し、この部分の流れは超音速状態にスタートし、図(e)のごとくなる。このとき、拡大管の超音速流中には、急拡大部上下壁面より発生した斜め衝撃波が観察されるが、これは、超音速飛行物体のwake shockに相当するものである。つぎに前とは逆に、この状態から P_0 を徐々に下げてゆくと、拡大管の下流から上流へ擬似衝撃波が移動し(図(f), (g))、衝撃波の足が壁面から離れ(図(h))、自由噴流中の擬似衝撃波となる。さらに P_0 を減少させると、擬似衝撃波は直管部へ進行していき、この部分の流れは再び亜音速流へブレイクダウンする。この過程は、スタートの過程と全く同じように思われるが、同じ集合胴圧力で撮影した図(b)と(g)を比較してみると、スタート時の(b)では擬似衝撃波は噴流中に存在しているのに対し、ブレイクダウン時の(g)では、擬似衝撃波の足はまだ壁面に付着している。すなわち、急拡大部の流れのスタート

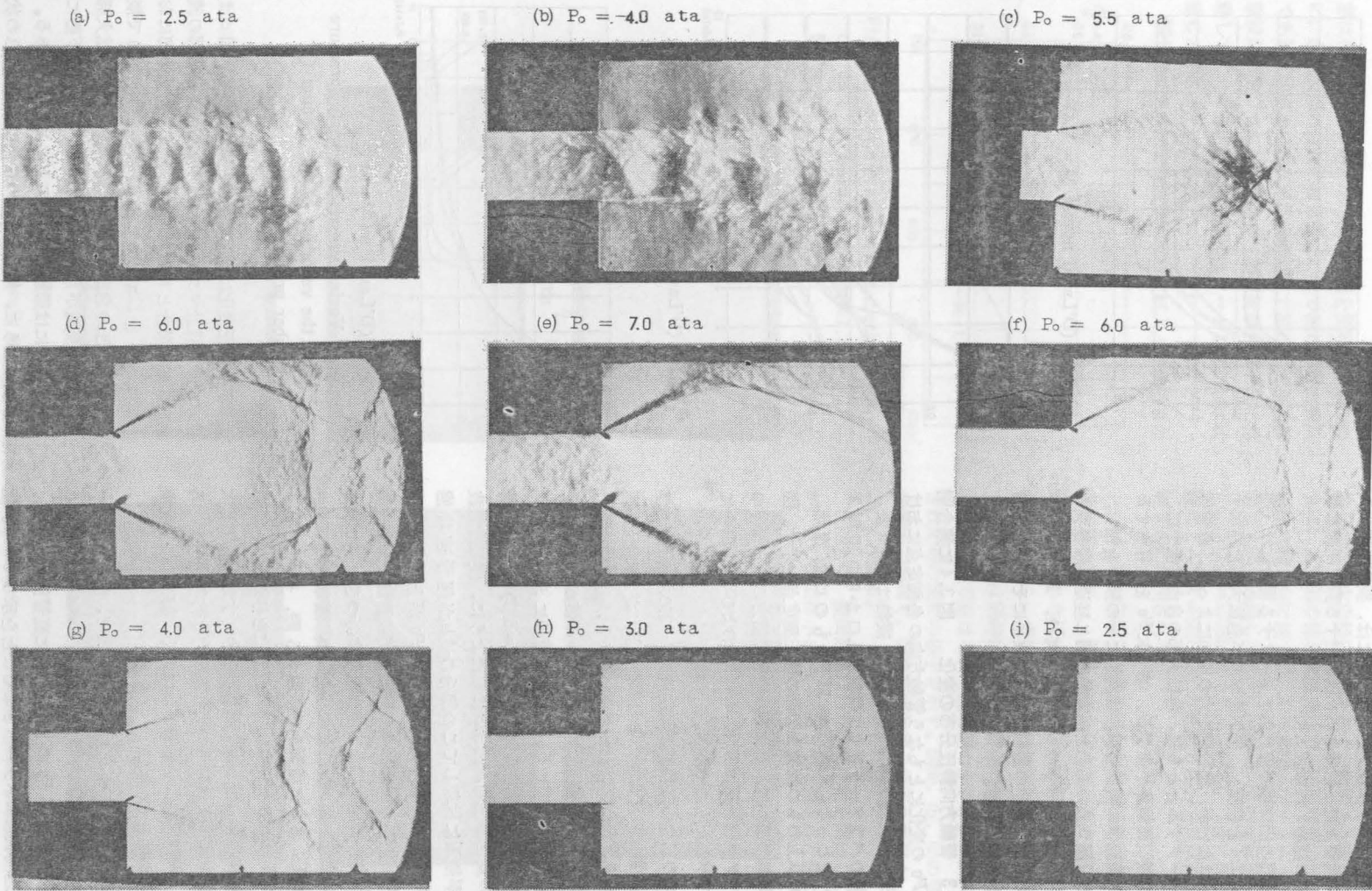


Fig. 3.3 Behaviour of pseudo-shock at the sudden enlargement portion of duct. (D'Laval nozzle $M=2.0$)

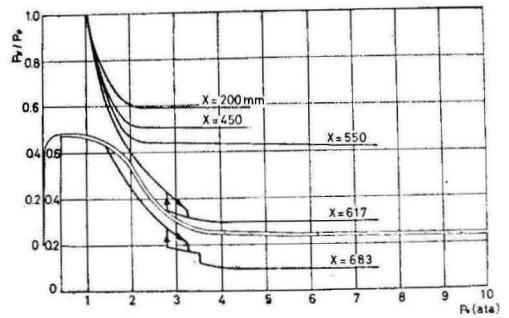
の過程とブレイクダウンの過程の間には、擬似衝撃波の足が拡大管々壁へ付着あるいは離脱する際に明瞭な履歴現象が認められる。

直管部の出口端で流れがチョークする場合には（前章の図2.4を参照），擬似衝撃波が急拡大部を通過することはないが，集合胴圧力の増加によって，直管部がチョークするとともに，急拡大部の自由噴流中に，新たに擬似衝撃波が生ずる。さらに P_0 を上昇させると自由噴流中の擬似衝撃波は次第にその強さを増し，以降は，図3.3の場合と基本的に同じ経過と履歴現象を示す。ブレイクダウン時においては， P_0 の減少とともに自由噴流中の擬似衝撃波は次第にその強さを弱め，遂に消滅する。

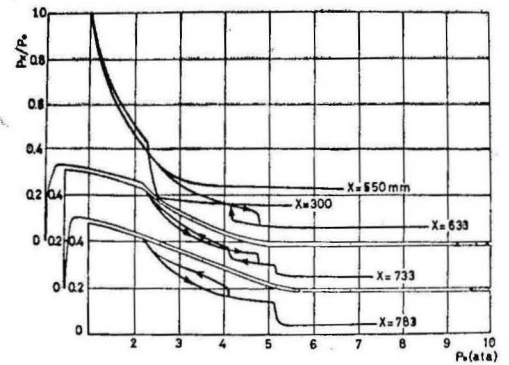
3.3 管軸方向静圧分布の変化 図3.4に集合胴圧力 P_0 の変化にともなう管軸方向の各測定点における静圧 p の変化を示す。横軸は P_0 ，縦軸は p/P_0 で，各曲線のパラメータとして供試管入口からの距離 X （mm）をとった。 X が600mm以下のものは直管部，600mm以上のものは拡大管部の静圧測定点を示す。図(a)，(b)および(c)は，それぞれ直管部前方のラバル管の設計マツハ数がそれぞれ1.4，2.0 および3.0の場合について示したものである。

図(a)の三つの直管部の測定点 ($X=200, 450$ および 550) の静圧の変化は，この部分の流れが常に亜音速流であり， P_0 が1.9ata以上になると，直管部出口で流れがチョークするために， p/P_0 の値がほぼ一定となることを示している。一方拡大管部においては， $P_0 = 3.25ata$ で急拡大部直後 ($X=617$) の圧力に階段状の変化が生じ，図3.3に見たように，擬似衝撃波の足が壁面に付着してこの部分の流れが超音速状態になることを示している。さらに P_0 が上昇し $P_0 = 3.5ata$ では， $X=683mm$ の位置を擬似衝撃波が下流側へ通過し，階段状の圧力減少を起す。つぎに逆に集合胴圧力を徐々に減少させた場合，擬似衝撃波は下流から移動し，さらに壁面から離脱する際，それぞれ， $X=683, 617$ の測定点圧力に急変化を与えることがわかる。ただし，壁面から離れるとき，すなわち急拡大部のブレイクダウン時の集合胴圧力は約2.8ataで，スタート時の圧力よりも約0.5ata低く，前述の履歴現象を明らかにしている。

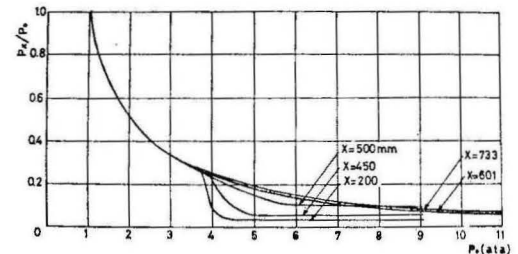
つぎに図(b)より $X = 300$ の位置で，静圧が $P_0 = 2.3ata$ で急に減少することから，ラバル管で発生した擬似衝撃波が P_0 の上昇とともに直管部を移動し，超音速流状態にスタートさせることを示している。拡



(a) (D'Laval nozzle $M = 1.4$)



(b) (D'Laval nozzle $M = 2.0$)



(c) (D'Laval nozzle $M = 3.0$)

Fig. 3.4 Variations of local static pressure with the variation of the plenum chamber pressure

大管部の静圧変化は図(a)の場合と同様である。図(c)はラバル管の設計マツハ数が3.0の場合で，直管部の流れは図(b)の場合とほぼ同様であるが，拡大管部においては， P_0 を1.1ataまで増加しても，図(a)と(b)で観察された静圧の急減は観察されない。これは急拡大部を通過した気流が自由噴流を形成し，拡大管上下壁に達するまでには膨脹し得ないことによるものである。

以上のように，集合胴圧力の変化によって流れの状

態は種々変化するが、以後の説明を簡略化するために、急拡大部の流れに着目し、ここで流れが自由噴流であれば状態A、流れが拡大管壁まで広がって擬似衝撃波が発生しておれば状態B、擬似衝撃波が下流に移動して拡大管部が超音速状態にスタートしておれば状態Cと呼ぶことにする。

図 3.5 にラバル管の設計マッハ数が 1.4 で状態 B の

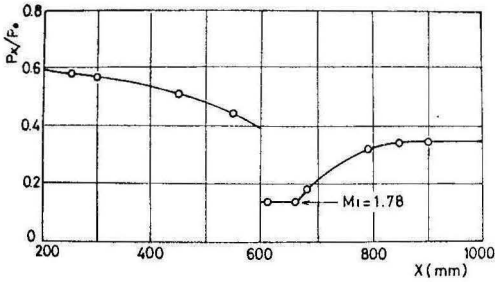


Fig. 3.5 Static pressure distribution along the duct (D'LaVal nozzle $M=1.4$, $P_0=3 \text{ ata}$, Condition B)

場合の管軸方向静圧分布を示す。同図より明らかのように、直管部の流れは亜音速で、壁面摩擦力のために静圧は軸方向に減少し、 $X=600\text{mm}$ でチョークする。急拡大部を通過した気流はPrandtl-Meyer膨脹を行ない、ほぼ $M=1.78$ にまで加速される。つぎに擬似衝撃波によって $X=660\sim 900$ の範囲で圧力上昇が行なわれ亜音速に減速される。

3.4 擬似衝撃波の発生にともなう振動現象 (a) 壁

面静圧の変動 図 3.6 は急拡大部の後方 100 mm の壁面に設けられた圧力変換器によって記録された静圧変動の例である。オシログラムの輝線(A)が静圧変動を示し、輝線(B)は同時に測定した管壁の加速度である。シュリーレン写真はそれぞれ右側のオシログラムが観察された時の流れの様子を示す。図(a), (b), (c)の順に集合胴圧力が高く、流れの状態はそれぞれ状態A, BおよびCである。

状態Aで、壁面静圧はわずかな変動を開始しているが、その振幅は小さい。状態Bでは測定点近傍に擬似

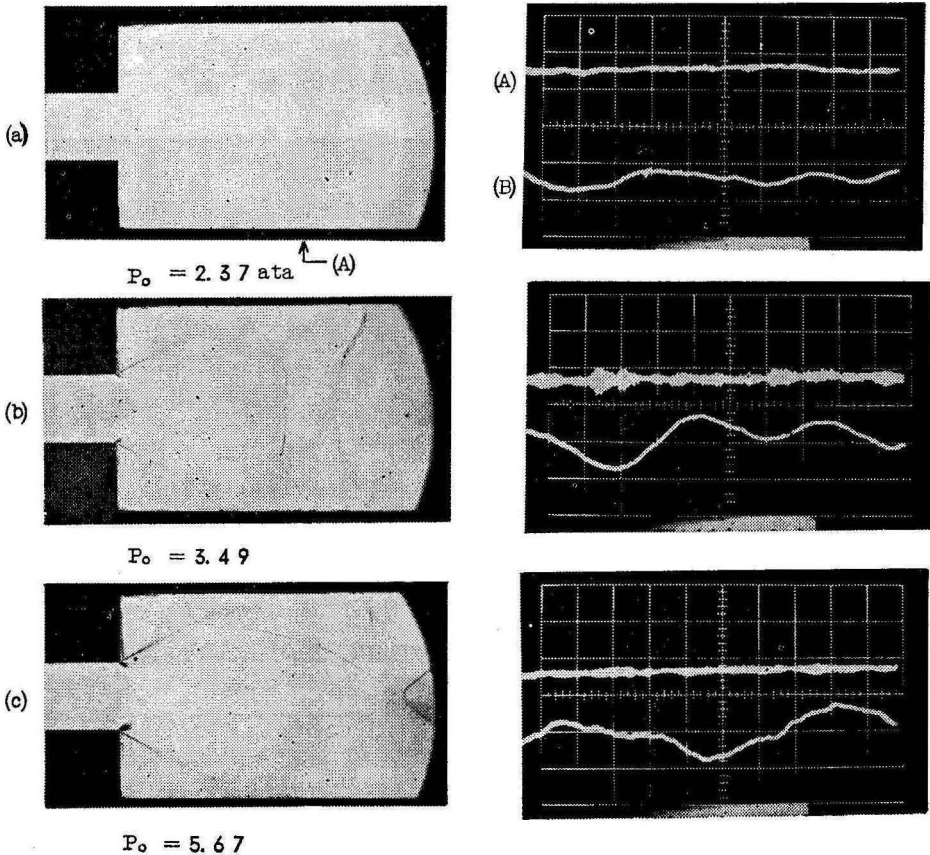


Fig. 3.6 Fluctuation of wall static pressure. (Swf: 1ms/div, (A) : Wall static pressure 0.305 kg/cm²/div, (B): Wall oscillation 0.5 G/div, D'LaVal nozzle $M=1.4$)

衝撃波が発生するために、壁面静圧ははげしい変動を示し、最大振幅は約 0.12kg/cm^2 に達する。状態Cでは、状態Bに比べて明らかに変動振幅が減衰している。このことより、管路の急拡大部における壁面静圧

の変動は、その部分に発生する擬似衝撃波に影響されることが明らかである。

図3.7に、状態BおよびCにおける壁面静圧変動の周波数分析結果の一例を示す。状態Bの静圧変動は約

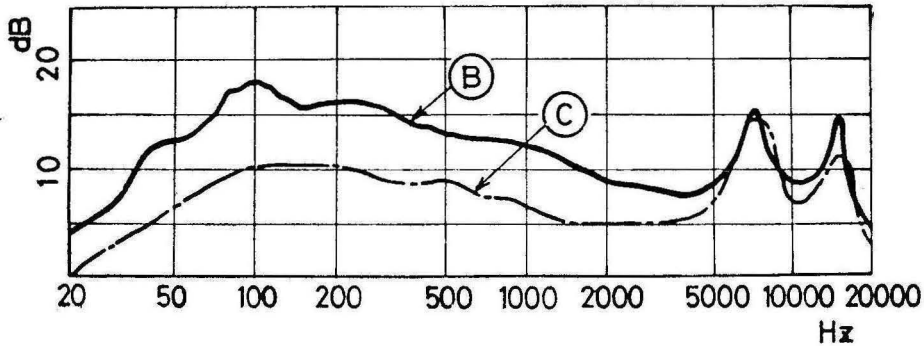
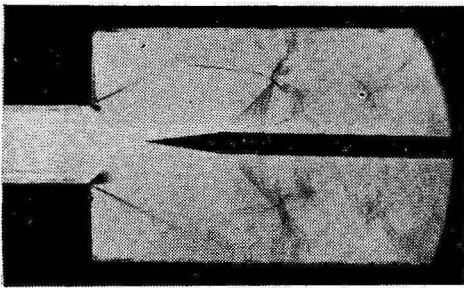


Fig. 3.7 Spectra of wall static pressure fluctuations (B: Condition B, C: Condition C, D'Laval nozzle $M=1.4$)

100Hzの低周波数成分と10KHz程度の高周波数成分からなっていることがわかる。一方状態Cにおいては、約100Hzの周波数成分が著しく減衰することが認められる。これより低周波数の変動成分は主として測定点における擬似衝撃波の振動によるものであると

推察される。5 KHz以上の高周波数の成分は管内高速流動に個有的のものと思われる。

(b) 主流中の静圧および全圧の変動 図3.8はピトー管による静圧変動の測定例である。ピトー管を挿入したために流れの様子が変化し、集合胴圧力を6 ata



$P_0 = 6.29 \text{ ata}$

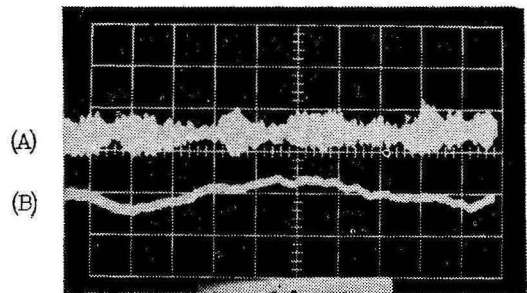


Fig.3.8 Static pressure fluctuation in main flow (Swf: 1 ms/div, (A):static pressure 0.305 kg/cm/div, (B): Wall oscillation 0.5 G/div, D'Laval nozzle $M=4.1$)

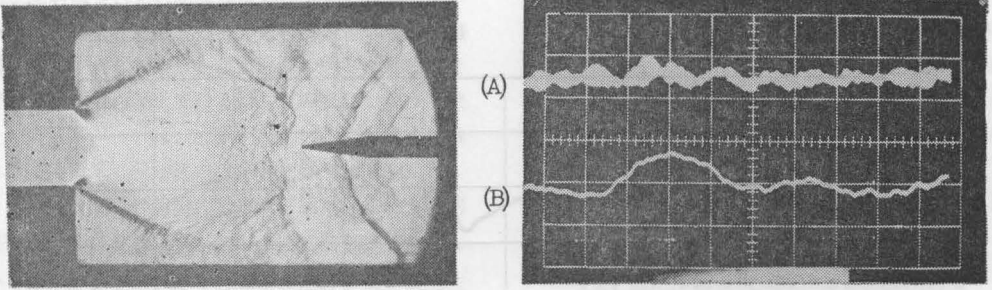
まで上げて、流れを状態Cにすることが不可能であった。図に示すようにピトー管の静圧測定孔付近に擬似衝撃波が発生しており、オシログラムから明らかに測定静止ははげしい変動を示している。このときの静圧変動の最大振幅は 0.15kg/cm^2 であった。

は、 $P_0=5.94\text{ata}$ のときに、 2.5kg/cm^2 を記録した。

図3.10にピトー管による静圧および全圧変動の周波数分析結果を示す。図より、静圧変動と全圧変動はほぼ同様のスペクトルを有し、ともに前述の壁面静圧変動と類似していることがわかる。ただし図3.7における100Hz近傍のピークがこの場合にはかなり減衰しているが、これはピトー管と擬似衝撃波の干渉の結果このピークが高周波数側へ移行したことによるものと思われる。

図3.9は同じ流れに対するピトー全圧の測定例である。急拡大部に発生した擬似衝撃波がピトー管の先端部付近で前後に運動するため、オシログラムにみられるように、大きな全圧変動が観察される。最大振幅

(c) 管壁の振動 図3.6, 3.8および3.9のオシロ



$P_0 = 5.94 \text{ ata}$

Fig. 3.9 Pitot pressure fluctuation in main flow (Swf: 1 ms/div, (A): Pitot pressure 9.88 kg/cm²/div, (B): Wall oscillation 0.5 G/div, D'Laval nozzle $M=1.4$)

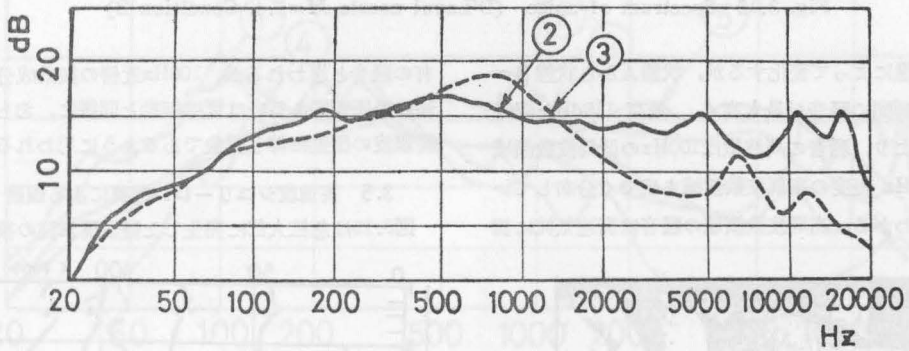


Fig. 3.10 Spectra of oscillations of static pressure and pitot pressure in main flow (2: static pressure, 3: Pitot pressure, D'Laval nozzle $M=1.4$, Condition B)

グラム上の輝線(B)は急拡大部より 100 mm 下流の管壁に設置した振動計により計測された、管壁の加速度を示すものである。図より明らかなように、供試管は管内に擬衝撃波が発生するとともに大きく振動を始める。管壁振動を定量的に論ずるには管路系の機械的特

性が示されねばならないが、通常の薄肉管に比較すれば十分の強度を有すると思われる本装置において、最高約 1G(重力の加速度)の振動が記録された。図3.11に管壁振動の周波数分布を示す。図より、100Hz近傍の低周波数領域の振動がきわめて顕著であり、一方

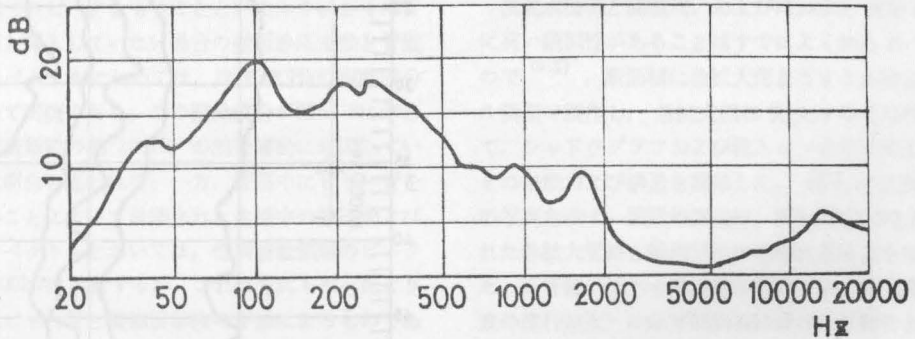


Fig. 3.11 Spectrum of wall oscillation (D'Laval nozzle $M=1.4$, Condition B)

高周波数領域の成分はかなり小さいことがわかる。これはオシログラムからも直接察知せられるところであ

る。先きのべた静圧変動の周波数成分のうち、10KHz程度の高周波数成分に対しては管壁はダンパーの役割

を果しており、おもに低周波数成分によって重要な影響を受けるように思われる、

(d) 騒音 図3.12は急拡大部近傍の管路外部で採取した騒音の周波数分布である。騒音の全音圧レベルは

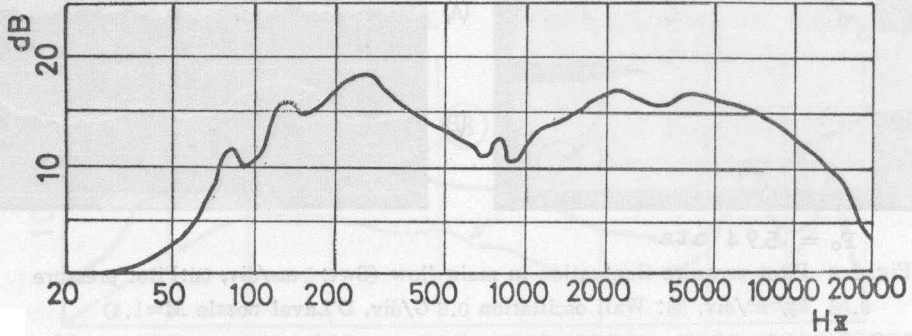


Fig. 3.12 Spectrum of noise (D'Laval nozzle $M=1.4$, Condition B)

流れの状態によって変化するが、状態Aから状態Bへ移行する瞬間の騒音が最も高く、最高 11.5dBを記録した。図より、騒音の周波数は100Hzの低周波数領域から 10KHz 程度の高周波数領域まで広く分布していることがわかる。高周波数領域の騒音は高速気流に個

有の騒音と思われるが、100Hz近傍の振動成分は、前述の静圧変動あるいは管壁振動と同様に、おもに擬似衝撃波の振動に伴う現象であるように思われる。

3.5 高速度シュリーレン写真による観察

図3.13は急拡大部に発生した擬似衝撃波の振動現象

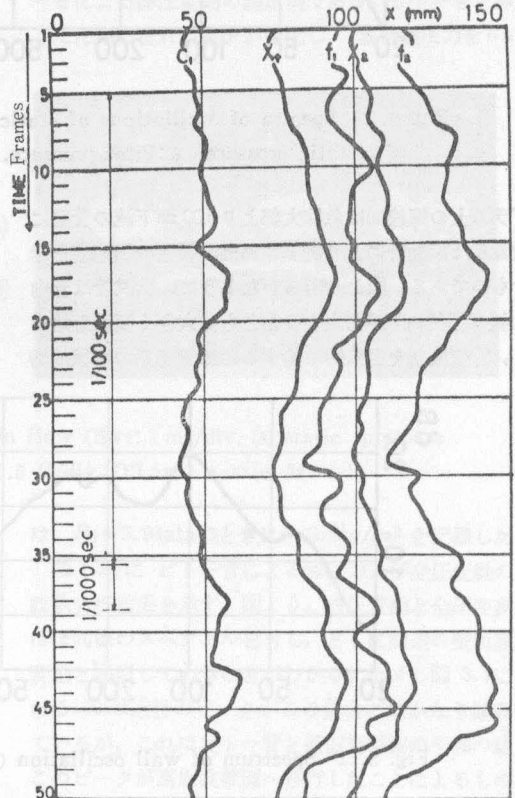
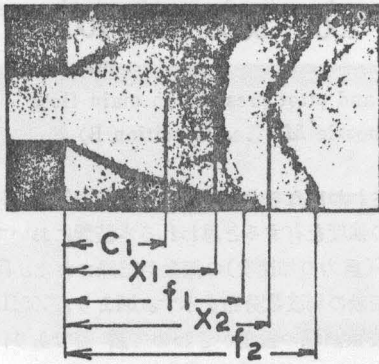


Fig. 3.13 oscillation phenomena of pseudo-shock wave observed by the high speed camera (D'Laval nozzle $M=1.4$)

を高速度シュリーレン写真によって明らかにしたものである。撮影されたシュリーレン写真の一コマ毎に擬似衝撃波を構成している先頭衝撃波，第2衝撃波（それぞれ管路の中心線上で計る）およびそれぞれの足（壁面上で計る），さらに先頭衝撃波の前方に黒く観察される圧縮領域の開始線の位置をそれぞれ計測した。図より，各計測量の前後運動はほぼ同期しており，約100Hzの大振幅運動と約1 KHzの小振幅運動よりなっていることがわかる。とくに先頭衝撃波と第2衝撃波の低周波数の大振幅運動は明瞭で，その最大振幅はそれぞれ20mmと30mmにも達し，拡大管部の等価直径で除

すれば，それぞれ0.42と0.73になる。なお，本実験につづいて行われた実験（3.2）によれば，急拡大部の面積変化率を1：1.5にした場合，擬似衝撃波の壁面への付着と離脱が交互にくり返す，きわめて明瞭な周期性（58Hz）をもった振動現象を観察した。直管内に発生した擬似衝撃波についての，より系統的な実験と，振動現象の発生原因および周波数についての考察は後述の第5章に譲る。

3.6 擬似衝撃波の振動と諸変動量の関連

図3.14 は前述の壁面静圧変動，主流中の静圧と全圧の変動，管壁振動および騒音の周波数分布を相互比較

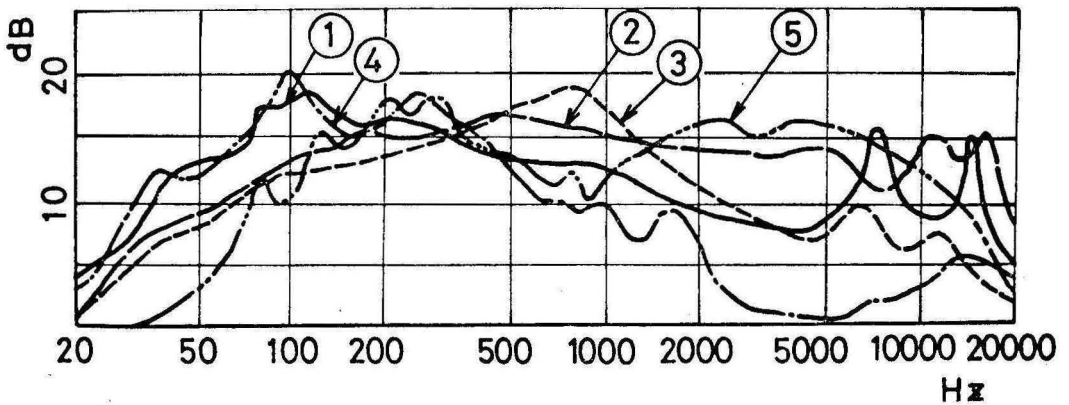


Fig. 3.14 Spectra of various fluctuation quantities (1 : Wall static pressure, 2 : Static pressure in main flow, 3 : Pitot pressure in main flow, 4 : Wall oscillation, 5 : Noise, D'Laval nozzle $M=1.4$, Condition, B)

のために重ね合わせたものである。図より，各変動量のスペクトルについて共通していることは，およそ100~200 Hzの低周波数領域と1~10KHzの高周波数領域に二つのピークをもつことといえよう。とくに管路中に何ら挿入していない場合の壁面静圧変動と管壁振動のスペクトルにおいては，ほぼ100Hzの振動成分がきわめて明瞭である。この振動成分が図3.13に示された擬似衝撃波の約100Hzの前後運動に起因していることは明白と思われる。一方，管路中にピトー管を挿入することによって計測された主流中の静圧および全圧のスペクトルにおいては，低周波数領域のピークが500~800Hzに移行するが，これは先にのべたように，挿入ピトー管と擬似衝撃波の干渉によるものであろう。このことはピトー管を挿入した高速度撮影によっても確かめられた。騒音のスペクトルが他のスペクトルよりも分散的になるのは，管壁のフィルター効果や，流れの各所で発生する騒音の影響と思われる。

3.7 浅底水槽流による模擬試験 本実験と並行して，浅底水槽を用いた簡単な模擬試験を行なったので，その概要を報告する。

浅底水槽流と高速流，およびはね水と衝撃波の間に高い類似性があることはすでによく知られているので^(3.3)，断面積に急拡大部を有する水路をアクリル樹脂で製作し，急拡大部に発生するはね水について，シャドウグラフおよび注入インキなどによって，その挙動および構造を観察した。図3.15に浅底水槽の写真を示す。装置の諸元は，図2.1および3.1に示された急拡大管路と幾何学的に相似になるように選ばれた。直管部に流入する浅底水流のマッハ数（流速/長波の進行速度）は直管部前端に設けた可動せきによって調整される。可動せきの高さおよび水路前後の水位差（圧力差に対応する）を変化させることによって，希望するマッハ数をもった射流（超音速流）や常流（亜音速流），および射流から常流への不連続的な変化

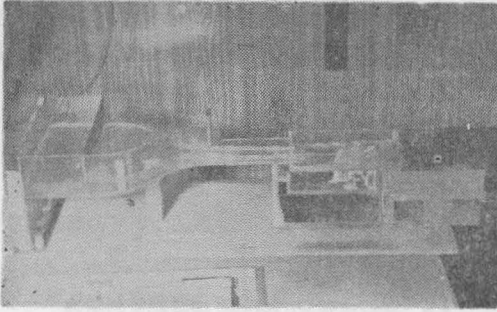


Fig. 3.15 Photo-graph of shallow water channel (Jumping water is shown in enlargement portion)

をもたらすはね水（衝撃波）を発生せしめることがで

きる。また、壁面摩擦力による直管部出口端のチョークも観察される。

図3.16は急拡大部近傍の水流の変化をシャドウグラフによって観察したものである。上流の可動セキ前の水位（集合胴圧力）は一定に保ち、下流側の水位（背圧）を同図 a, b, c……の順に減少させたものである。同図を前掲の図 3.3と比較すれば、高速気流との類似性がきわめて高いことは明らかである。すなわち図 a では常流の自由噴流、図 b で噴流中にはね水が発生し、図 c では噴流が水路側壁にまで膨脹し、擬似衝撃波に類似の 2 本の段階的な水位上昇からなる（擬似）はね水が発生している。さらに下流側水位を減少させると図 d, e の順ではね水を下流側へ移動させ、図 f では、管路の全体が射流状態にスタートしている。

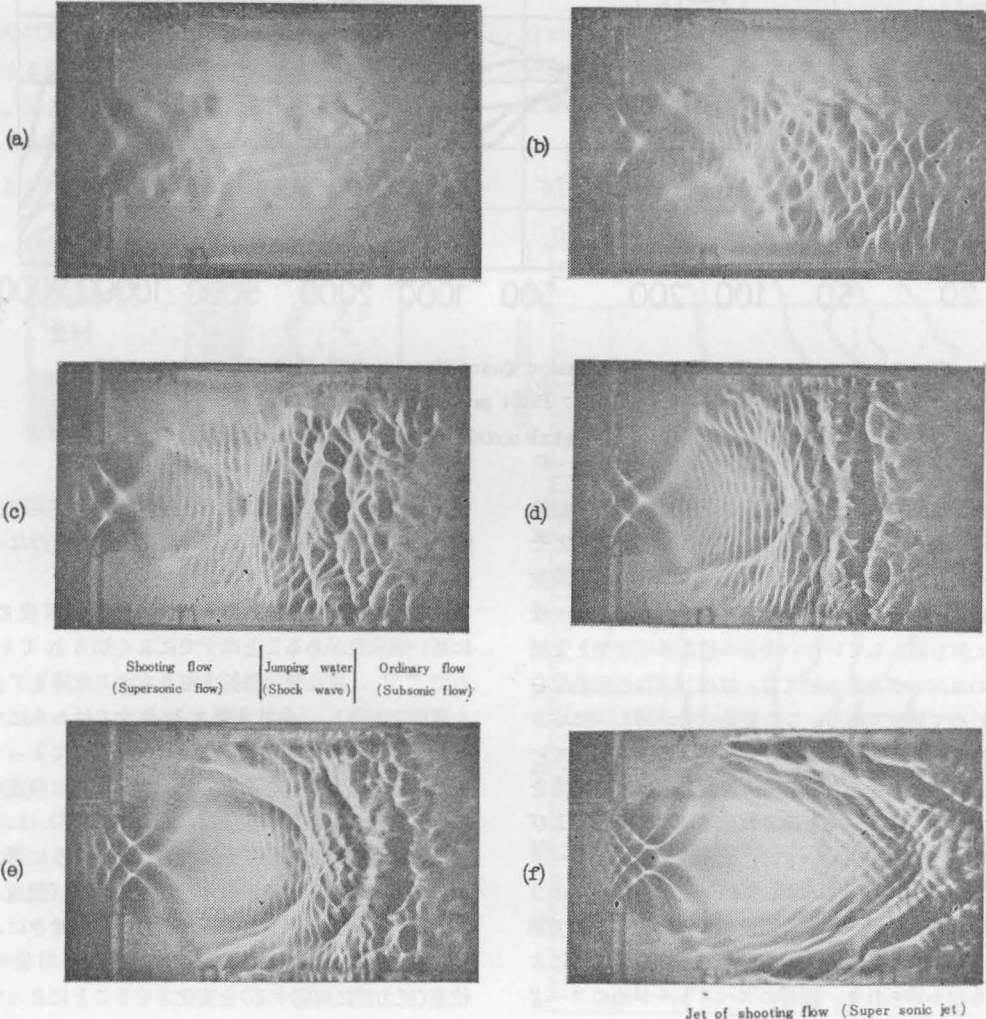
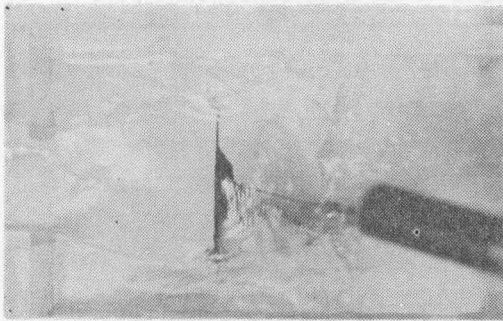


Fig. 3.16 Shadow-graphs of shallow water flow with jumping waters

図 3.17 は、はね水発生部の水路底面に注射針によってインキを注入した場合の上面および側面写真である。両写真から明らかなように、はね水の底層には逆

流領域が存在し、一つのはね水は側面から見れば一つの渦を形成すること、および底面における逆流域の先端の分岐線は、上面から見て主流に垂直な明瞭な直線



(a) Upper view



(b) Side view

Fig. 3.17 Observations of Jumping water by ink flow

になることがわかる。流れの各所で同様にインキ注入を行なって流線を観察した結果、およそ図3.18に示

す流線図が得られた。

はね水は、擬似衝撃波と同様にはげしく振動してい

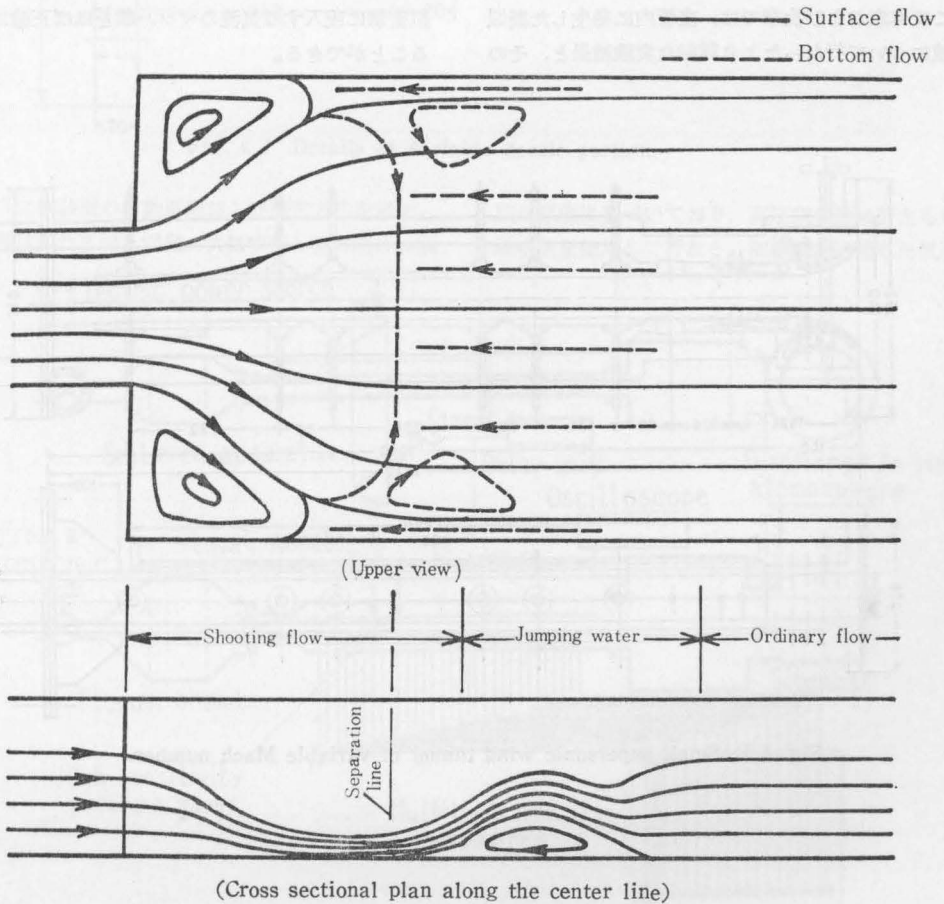


Fig. 3.18 Stream lines near a jumping water

ることが、肉眼で直接たしかめられるが、その振動は不規則で、前後運動の振巾は、擬似衝撃波の場合ほど顕著ではない。高速度カメラを用い、シャドウグラフ法で観察したところ、急拡大部の直管部出口端の肩から一連の小さな過流が流線にそって放出され、はね水および後流の振動に一定の影響を及ぼしていることがわかった。下流側からの顕著なじょう乱の伝播は認められなかった。

第4章 擬似衝撃波の構造

前章までの実験結果によって、管内高速流動における擬似衝撃波の挙動に関するある程度の知識を得た。擬似衝撃波は、被雑な形状のいくつかの波から構成され、その圧力上昇はなだらかで、管径の数倍の長さにと及んでいる。また決して定常な波ではなく、前後にはげしく振動することによって圧力変動や管壁振動をもたらすことが明らかとなった。

そこで本章および次章では、直管内に発生した擬似衝撃波について行なったより詳細な実験結果と、その

考察について報告する。

4.1 マッハ数可変型小型超音速風洞 図4.1および図4.2に本研究のために新たに設計したマッハ数可変型小型超音速風洞を示す。本風洞の測定部は $60 \times 60 \text{mm}^2$ の正方形断面で、長さ 830mm の直管からなり、その上下壁は前方のラバルノズルと一体である。図4.2に示すようにラバルノズルの末広がり部の一部は厚さ 1mm の鋼板製で、可撓性を有し、先細部およびスロート部を歯車装置によって上下させることより、ノズルスロート部の開口面積を任意に設定することができる。測定部の両側壁は厚さ 15mm の光学ガラス製の窓を構成し、軸方向に任意の部分を光学的に観察することができる。本風洞によれば、ラバルノズルの設計マッハ数を連続的に変化させることによって、系統的な実験が可能となり、同時に、長い直管の場合と異なり、ラバルノズルから比較的に近い距離で計測されるので、擬似衝撃に流入する気流のマッハ数をほぼ正確に決定することができる。

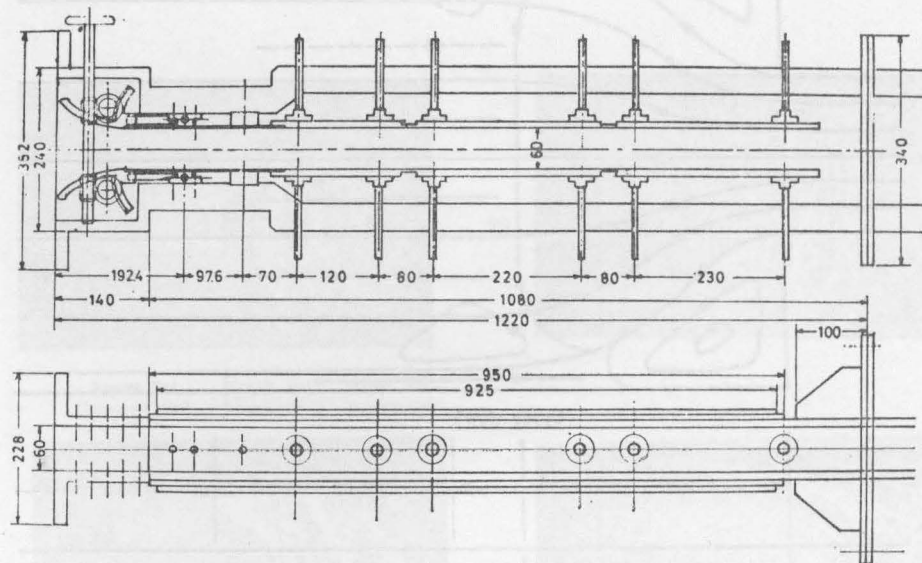


Fig. 4.1. Small supersonic wind tunnel of variable Mach number.

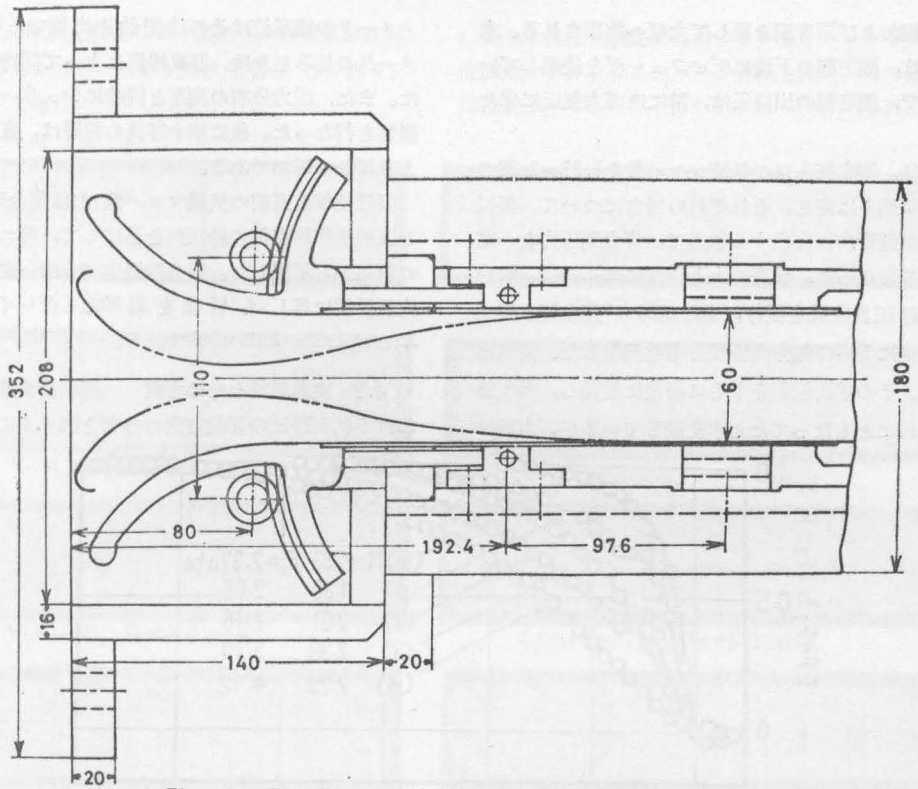


Fig. 4.2 Details of variable nozzle portion.

図 4.3 に本装置の作動原理および測定方法を示す。
作動原理はこれまでと同様、大気吹出し型の間けつ風

胴の原理に基づいており、高圧空気源に貯えられた乾燥空気を使用して行なう。測定部を通過した気流は後

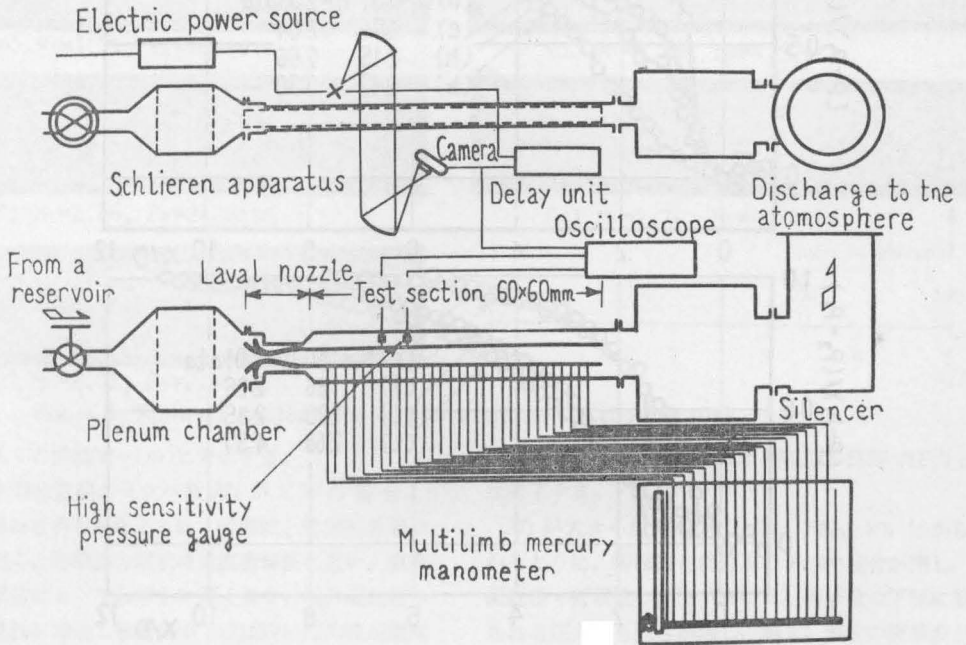


Fig. 4.3 Schematic diagram of experimental arrangement.

部集合胴および消音胴を通して大気へ放出される。本装置では、測定部の下流にディフューザを使用していないので、測定部の出口圧は、常にほぼ大気圧に保たれる。

実験は、測定部入口の気流マッハ数を1.33~2.79の範囲で13通りに変え、それぞれの場合について、擬似衝撃波が直管内に存在する状態で、集合胴圧力を一定に保って行なった。管路の上下壁面には15mm(0.25D)間隔の静圧測定孔を設け、図に示す40連多管水銀マノメータによって軸方向静圧分布を測定した。擬似衝撃波は、その平均位置を中心に前後に振動し、局所静圧もそれにとまってたえず変動しているが、水銀マ

ノメータの指示値はその時間的平均値である。マノメータの読みとりは、写真撮影によって同時に行なった。また、圧力分布の測定と同時にシュリーレン写真撮影を行なった。後に示す写真の視野は、直管部入口より100~400mmである。

擬似衝撃波直前の気流マッハ数 M_1 は集合胴圧力 P_0 と擬似衝撃波直前の静圧 p_1 を基にして、等エントロピの仮定から算出した。集合胴温度 T_0 は一定で、ほぼ大気温度に等しい。管径を基準にしたレイノルズ数 ReD は $1.73 \sim 2.23 \times 10^6$ である。

4.2 実験結果とその考察 擬似衝撃波の区間における壁面静圧の管軸方向の分布を図4.4に示す。同

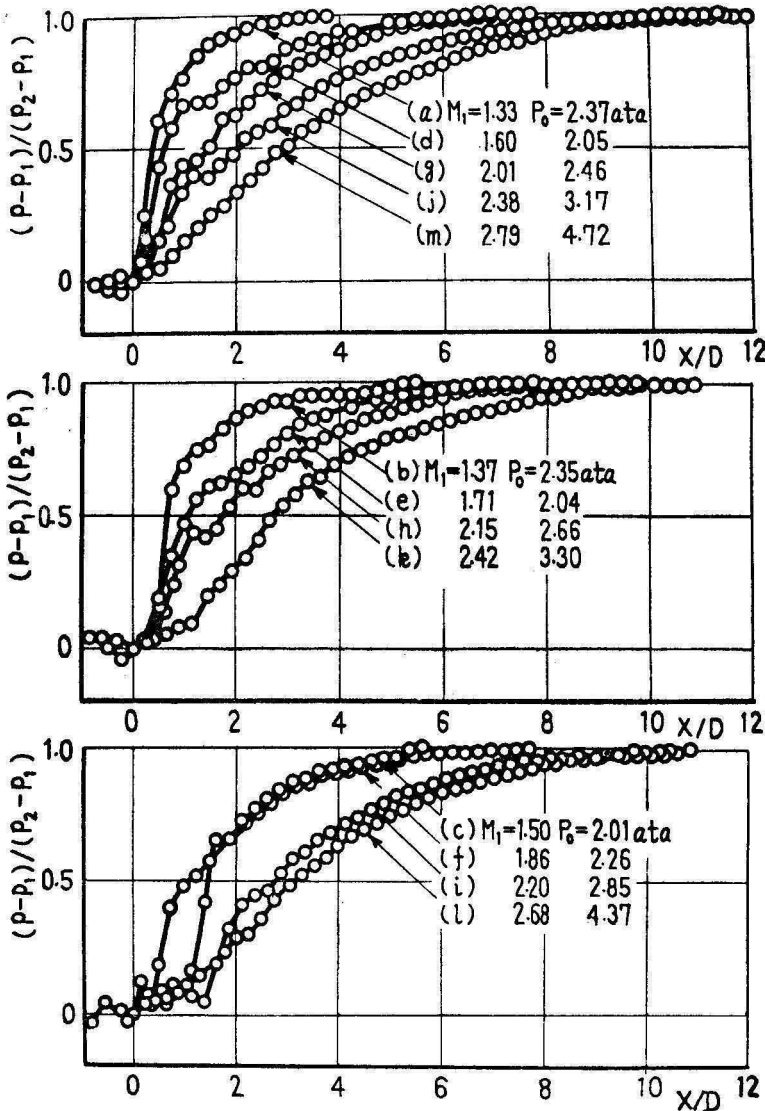


Fig. 4.4 Wall static pressure distribution in pseudo-shocks

図の横軸は、無次元距離 X/D で縦軸は、擬似衝撃波前後の静圧差 (p_2-p_1) による無次元静圧 $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ である。


 Flow direction

図4.5は圧力測定時におけるシュリーレン写真で、光源はマグネシウムスパーク光源を用い、その露光時間は約 $10\mu\text{s}$ である。図4.5の(a)~(m)の写真はそれ

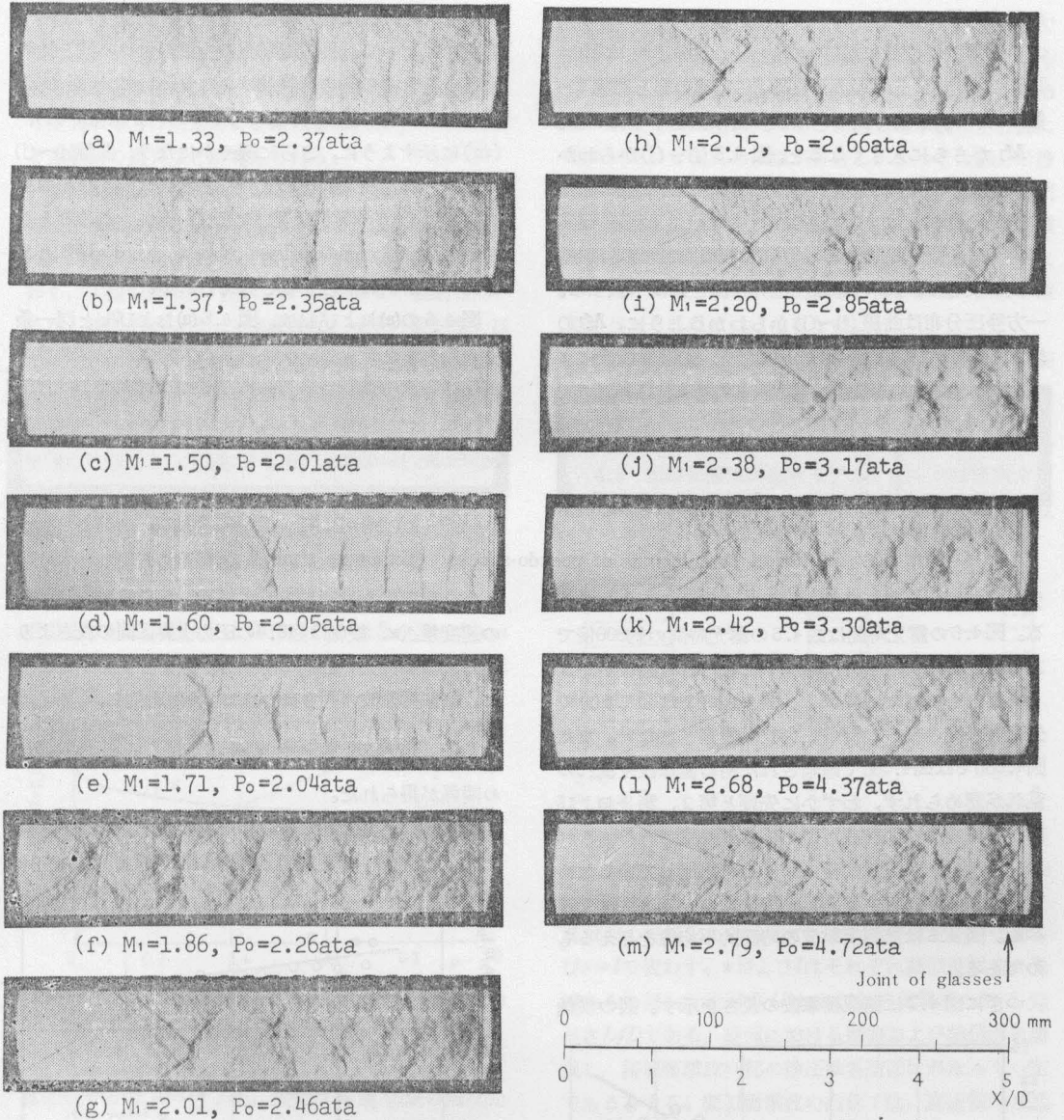


Fig. 4.5 Schlieren photographs of pseudo-shocks (Exposure time $10\mu\text{s}$)

ぞれ図4.4の曲線(a)~(m)に対応する。

擬似衝撃波直前のマッハ数 M_1 が 1.33 の場合、図4.5(a)から明らかなように、衝撃波と管壁境界層の干渉は弱く、衝撃波の形状は垂直衝撃波に近い。境界層は衝撃波によってわずかに厚くなり、境界層近傍の流れの乱れが増加し衝撃波の下流に弱い圧力波が観察される。図4.4の曲線(a)によれば、そのときの静圧上

昇はかなり急で、管径の3.8倍程度の距離で圧力上昇は終了する。

M_1 が大きくなるにつれ、図4.5(b), (c), (d)からわかるように、衝撃波と境界層の干渉の度が増し、壁面近傍で衝撃波の分枝がおこる。衝撃波の下流に観察される圧力波も強さが増し、第2, 第3の衝撃波が形成される。いっぽう図4.5の曲線(b), (c), (d)に示すよ

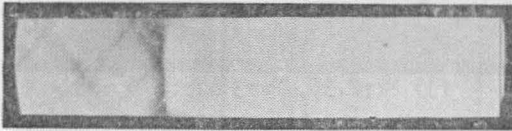
うに壁面静圧分布は M_1 の増加とともに、しだいに緩やかになり、圧力が上昇する区間の長さ（擬似衝撃波の長さ）が増加する。また第2、第3の衝撃波の形成によって、静圧分布曲線は階段状の脈動を示し、各段の圧力上昇の開始点は、それぞれ先頭、第2および第3の衝撃波の位置に対応している。図4.5(e)は $M_1=1.71$ の場合で、先頭が入形衝撃波で、そのあとに第2～第6の衝撃波が続く典型的な擬似衝撃波を示している。

M_1 がさらに大きくなると、図4.5(f)～(j)からわかるように、衝撃波と境界層の干渉がさらに激しくなり、先頭衝撃波は λ 形から X 形へ移行し、擬似衝撃波の構造は一層複雑になる。写真から観察される擬似衝撃波の長さは、図4.4の静圧上昇区間とほぼ一致する。一方静圧分布は曲線(f)～(j)からわかるように、 M_1 の増加とともにさらにゆるやかになり、先頭衝撃波によ

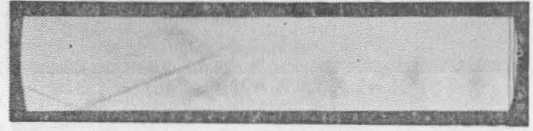
る静圧上昇が擬似衝撃波全体の静圧上昇に占める割合は、かなり小さくなる。

図4.5の(k), (l), (m)は、さらにマッハ数を大きくした場合の擬似衝撃波の先頭部分で、それはもはや明瞭な X 形ではなく、多数の弱い斜め衝撃波によって構成されている。擬似衝撃波の上流のマッハ波と比較するとこれらの斜め衝撃波はかなり弱いことがわかる。この場合の静圧分布は図4.4の曲線(k), (l), (m)に示すように、さらに緩やかになり、曲線(d)～(j)で観察された脈動はもはや観察されない。なお曲線(k), (l), (m)の形状は互いにほぼ一致し、このことから擬似衝撃波内部の静圧分布曲線は、 M_1 の増加とともに一定形状に漸近すると考えられる。

図4.6の(a)および(k)は、図4.5(a)および(k)と同一条件の流れを、シュリーレン写真の光源にタングステン



(a) $M_1=1.33$, $P_0=2.37$ ata



(k) $M_1=2.42$, $P_0=3.30$ ata

Fig. 4.6 Schlieren photographs of pseudo-shocks (Exposure time $1/125$ sec.)

ランプを用い、露光時間 $1/125$ 秒で撮影したものである。図4.6の露光時間は図4.5の露光時間の約800倍であるが、得られた写真は図4.5に較べれば輪郭がかなりあまいものになっている。図4.6(a)では図4.5(a)の先頭衝撃波の後方の弱い圧力波が観察されない。また図4.6(k)では図4.5(k)で観察された斜め衝撃波や流れの乱れが認められず、わずかに先頭と第2、第3および第4の圧縮領域の存在が認められる程度である。これは、擬似衝撃波が前後にはげしく振動しているため、振動現象に対する詳しい実験については次章で述べる。図4.6は擬似衝撃波の時間的平均像を与えるものである。

つぎに図4.7に擬似衝撃波の長さを示す。図の横軸

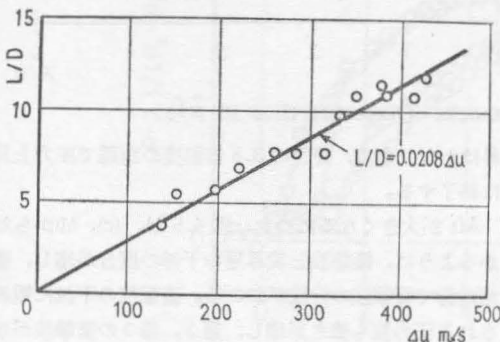


Fig. 4.7 Lengths of pseudo-shocks

は集合胴温度を 283°K として計算した垂直衝撃波前後の速度差 Δu 、縦軸は図5.4の圧力上昇区間の長さより得られる無次元長さ L/D である。図より明らかなように、擬似衝撃波の長さは、ほぼ Δu に比例し、

$$L/D = 0.0208 \Delta u \quad (4.1)$$

の関係が得られた。

図4.8は、実験的に得られた擬似衝撃波前後の静圧比 $(P_2/P_1)_{ex}$ を垂直衝撃波の理論的静圧比

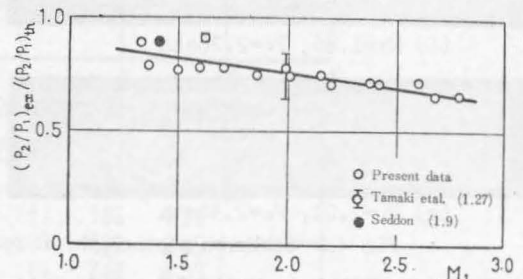


Fig. 4.8 Pressure ratios across pseudo-shocks

$(P_2/P_1)_{th}$ と比較したものである。図によれば、擬似衝撃波前後の静圧比は垂直衝撃波前後の静圧比よりもかなり低く、その差はマッハ数とともに増加する傾向にある。同様の結果は、図に示す Seddon (1.9) および 玉木ら (1.27) の最近の研究によっても得られており、

ほぼ一般的な傾向であると思われる。したがって第2章および第3章にのべたように、Neumannら(1.21)の実験報告すなわち“擬似衝撃波による圧力上昇は垂直衝撃波の理論値にほぼ一致する”は修正が必要であるように思われる。このように擬似衝撃波による圧力上昇が理論値より小さくなる原因として、流入気流の境界層厚さの影響(1.23)、擬似衝撃波の区間における壁面摩擦力の効果および擬似衝撃波後方の乱れによる運動量の損失などが考えられる。

擬似衝撃波前後の圧力比には種々の要因が作用するので、当面これを無視することにすれば、本実験結果は、注目すべきつぎの2点を明らかにしている。すなわち、(1)擬似衝撃波内部の流れは、激しく振動しているが、時間的平均静圧分布曲線は、マッハ数が高いほど緩やかになり一定形状に漸近する。(2)擬似衝撃波の長さは、その前後の速度差にほぼ比例する。これらの結果は、擬似衝撃波内部の現象を衝撃波ではなく、気流の拡散によって説明した Crocco の Shockless model(1.26) の妥当性を実証しているように思われる。

ただし、CroccoのShockless modelは、第1章ですでに明らかにしたように、実験結果と比較することは不可能である。図4.9に $M_1=3.0$ の場合の Shockless modelの計算例を示す。横軸は低速領域の流量の全流

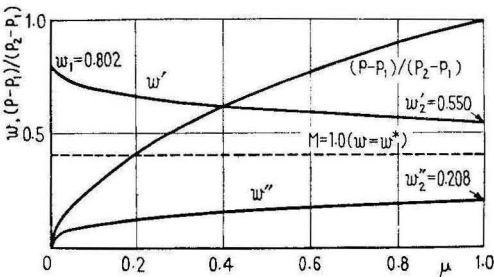


Fig. 4.9 An example of numerical calculation of shockless model ($M_1 = 3.0, \gamma = 1.4$)

量に対する比 $\mu = m'/m_1$ 、縦軸は高速領域の無次元速度 w' 、低速領域の無次元速度 w'' および 無次元静圧 $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ である。同図より考えられる Shockless modelの問題点を改めて整理すれば、(1)、擬似衝撃波の終了点で高速領域の速度が低速領域の速度と一致しない。(2)、静圧分布が擬似衝撃波の終了点近傍でかなり急な勾配をもっており、後方の静圧との接続が不自然である。(3)、 $\mu = \mu(x)$ が与えられないので、擬似衝撃波の長さや管軸方向の静圧分布

が計算できない、などである。

上記の問題点のうち(1)および(2)は、高速領域を式(1.1)によって等エントロピ流れと仮定したためと思われる。Shockless modelの他の基礎式は、エネルギー、運動量および質量の保存則から導かれたものであり、断熱摩擦なし流れを考えれば正しく成立するものと考えられる。式(1.1)のみが、解を得るために、仮定された基礎式である。擬似衝撃波の中心部に等エントロピ流れの領域が存在し、かつその部分の静圧が管の全断面にわたる静圧を決定する、とした仮定は、図5.5に示す流れの状態と比較して、かなり無理があるように思われる。さらに問題点(3)を解決するためには、 X 軸方向への高速領域と低速領域の拡散の様相が与えられなければならない。

そこで、本論文では、これらの問題点を解決し、擬似衝撃波の構造を説明するために、Shockless modelを改良し、つぎの拡散モデルを新たに提案する。

4.3 擬似衝撃波の拡散モデル 図4.10は提案する擬似衝撃波の拡散モデルである。検査面1と2を擬似

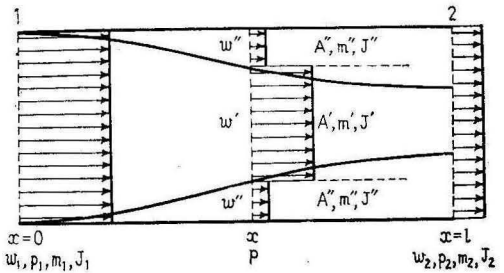


Fig. 4.10 Diffusion model of pseudo-shock wave.

衝撃波の先端および後端とり、その位置を $x=0$ および $x=l$ で表わす。 x および l はそれぞれ擬似衝撃波の先端からの無次元距離 X/D および擬似衝撃波の無次元長さ L/D である。壁面における摩擦および熱伝導を無視し、擬似衝撃波内部の静圧は各断面にわたって一定であるとする。擬似衝撃波の内部では、高速領域と低速領域が相互に拡散し、 $x=l$ で両者が等しくなると考える。

図1.8の Shockless model と異なる点は、高速領域が等エントロピ流れでないこと、擬似衝撃波の後端で高速領域の流量は零ではなく、その速度が低速領域の速度と一致すること、および軸方向の距離 X を導入したことである。

擬似衝撃波の先端および後端の境界条件はつぎのよ

うになる。

$$\begin{aligned} x=0; w'=w_1, w''=0, \mu=0, p=p_1 \\ x=l; w'=w''=w_2, 0 < \mu \leq 1, p=p_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ただし, $w=u/\sqrt{2c_p T_0}$ である。流量 m および衝撃関数 J は w を用い, 次式で与えられる【式 (A.11), (A.13) 参照】。

$$m = \sqrt{\frac{pA}{RT_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{w}{1-w^2} \quad (4.3)$$

$$J = m \sqrt{RT_0} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} w + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w} \right) \quad (4.4)$$

擬似衝撃波の内部では, 流量および運動量保存則より, 次式が成立する。

$$m' + m'' = m_1 = m_2 \quad (24.5)$$

$$J' + J'' = J_1 = J_2 \quad (4.6)$$

同様に各流線のエネルギーが保存されるとして, つぎのように仮定する。

$$T_0' = T_0'' = T_{01} = T_{02} \quad (4.7)$$

また幾何学的条件により, 次式が成立する。

$$A' + A'' = A_1 = A_2 \quad (4.8)$$

つぎに擬似衝撃波内部の高速領域と低速領域の拡散を, 次式のように仮定する。

$$\frac{dw'}{dx} = -cw' \quad (4.9)$$

$$\frac{dw'}{dx} + B \frac{dw''}{dx} = 0 \quad (4.10)$$

式 (4.9) は高速領域の速度の拡散による減衰を表わす式で, 減衰係数 c は実験的に定められる。式 (4.10) は高速領域と低速領域の速度の X 軸方向の変化の関係を一次式で仮定したもので, 係数 B は境界条件式 (4.2) によって定められる。

式 (4.8) に (4.3) を代入し m' , m'' のかわりに $(1-\mu)m_1$, μm_2 を用い, さらに式 (4.7) の関係を利用して整理すれば, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} (1-\mu) \frac{1-w_1^2}{w_1'} + \mu \frac{1-w_2^2}{w_2''} &= \frac{p}{p_1} \frac{1-w_1^2}{w_1} \\ &= \frac{p}{p_2} \frac{1-w_2^2}{w_2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

同様に式 (4.6) に (4.4) を代入して整理すると, つぎのようになる。

$$(1-\mu) \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w_1'} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} w_1' \right) + \mu \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right.$$

$$\begin{aligned} \left. \cdot \frac{1}{w_2''} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} w_2'' \right) &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w_1} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} w_1 \\ &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w_2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} w_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

式 (4.12) の最後の式より Prandtl の関係式が得られ, またその結果を式 (4.11) の最後の式に代入すれば, Rankine-Hugoniot の式が得られる。すなわち

$$w_2 = w^{*2} / w_1 \quad (\text{Prandtl の関係}) \quad (4.13)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_1^2 / w^{*2} - w^{*2}}{1 - w_1^2} \quad (\text{Rankine-Hugoniot の関係}) \quad (4.14)$$

ここで, $w^{*2} = (\gamma-1)/(\gamma+1)$ である。

式 (4.9) と (4.10) を積分し, 定数 B と積分定数がそれぞれ境界条件式 (4.2) を満足するように定めるとつぎの式が得られる。

$$w' = w_1 e^{-cx} \quad (4.15)$$

$$w'' = \frac{w^{*2}}{w_1 - w^{*2} / w_1} (1 - e^{-cx}) \quad (4.16)$$

式 (4.12) を μ について整理すれば

$$\mu = \frac{(w^{*2} / w_1' + w_1') - (w^{*2} / w_1 + w_1)}{(w^{*2} / w_1' + w_1') - (w^{*2} / w_1 + w_1)} \quad (4.17)$$

となる。さらに上式を式 (4.11) に代入すれば, 次式が得られる。

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\left[\frac{(w^{*2} + w_1^2)}{-w_1 (w^{*2} + 1)} \frac{(1 + w_1' w_1'')}{(w_1' + w_1'')} \right]}{(1 - w_1^2) (w^{*2} - w_1' w_1'')} \quad (4.18)$$

式 (4.14) と (4.18) より

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{w^{*2} \{w_1^2 - w_1 (w_1' + w_1'') + w_1' w_1''\}}{(w_1^2 - w^{*2}) (w^{*2} - w_1' w_1'')} \quad (4.19)$$

となる。

式 (4.15) ~ (4.18) の解は, $x=0$ で,

$$w'=w_1, w''=0, \mu=0, p/p_1=1 \quad (4.20)$$

$x=l$ で,

$$\begin{aligned} w_2' = w_2'' = w_2 = w_1 e^{-cl}, \mu_2 = 1 \\ -\frac{w^{*2}}{w_1^2} < 1, \frac{p}{p_1} = \frac{w_1^2 / w^{*2} - w^{*2}}{1 - w_1^2} = \frac{p_2}{p_1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

となり, 境界条件式 (4.2) を満足することが確かめられる。式 (4.21) の μ_2 は擬似衝撃波の後端における

低速領域の流量の全流量に対する割合を示し、それは w_1 の関数で、その数値を後掲の表4.1に示す。

擬似衝撃波の長さは、式 (4.21) より

$$\ell = \frac{1}{c} \ln \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1^2}{w_2^2} \quad (4.22)$$

となる。さらに擬似衝撃波の長さ ℓ と無次元速度差 $\Delta w = w_1 - w_2$ の関係を調べるため、式 (4.13) と (4.22) より得られるつぎの関係式

$$w_1/w_2 = e^{c\ell}, \quad w_2/w_1 = e^{-c\ell} \quad (4.23)$$

を用いると、

$$\ell = \frac{2}{c} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\Delta w}{2w^*} \right) \quad (4.24)$$

となる。上式を展開すれば、

$$\ell = \frac{2}{c} \left\{ \left(\frac{\Delta w}{2w^*} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta w}{2w^*} \right)^3 + \frac{3}{40} \left(\frac{\Delta w}{2w^*} \right)^5 + \dots \right\} \quad (4.25)$$

$\Delta w/2w^*$ の値は表4.1に示すように、 $M_1 = 1$ のとき零で、 M_1 とともに増加し、 $M_1 = \infty$ で1.0207となる。もし M_1 が小さい場合は式 (4.25) の右辺の第2項以下は、第1項に比べて無視することができる。〔たとえば、 $M_1 = 3.0$ の場合は $\Delta w/2w^*$ は0.727で、 $(\frac{1}{6}) (\Delta w/2w^*)^3$ は0.064となり、第1項の1割以下である。〕したがって擬似衝撃波の長さは近似的に次式によって表わされる。

$$\ell = L/D \doteq \frac{\Delta w}{cw^*} \quad (4.26)$$

上式によれば、擬似衝撃波の無次元長さ ℓ は、近似的に無次元速度差 Δw に比例し、高速領域の流速の減衰係数 c に反比例する。 c は実験的に定められるが、式 (4.24) より得られる無次元量 cL/D は M_1 によって一意に定まる量で、その値は表4.1に示す。

ここで本研究による実験式 (4.1) を無次元化すれば、

$$L/D = 21.56 \Delta w \quad (4.27)$$

となるので、これを式 (4.26) に代入すると係数 c の値が得られる。すなわち

$$c = 0.114 \quad (4.28)$$

この場合の L/D を表4.1に示す。

つぎに式 (4.15) と式 (4.16) を式 (4.17) ~ (4.19) に代入すると擬似衝撃波内部における μ , p_1/p , $(p-p_1)/(p_2-p_1)$ の X 軸方向分布を計算することができる。式 (4.19) より擬似衝撃波内部の無次元静圧分布は、つぎのようになる。

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{\{w_1^2(w_1^2-2w_2^2) + w_1^2w_2^2e^{-cx}\} (1-e^{-cx})}{(w_1^2-w_2^2)^2 - w_1^2(w_1^2-w_2^2)e^{-cx}(1-e^{-cx})} \quad (4.29)$$

ここで、 $w_1 \rightarrow 1$ すなわち $M \rightarrow \infty$ の場合は

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{(1-2w_2^2 + w_2^2 e^{-cx}) (1-e^{-cx})}{(1-w_2^2)^2 - (1-w_2^2) e^{-cx} (1-e^{-cx})} \quad (4.30)$$

が得られる。上式は、いま考えているモデルのように、擬似衝撃波の内部で流れが十分に拡散的であるような場合、擬似衝撃波内部の静圧分布の極限值である。

図4.11に、拡散モデルによる $M_1 = 3.0$, $c = 0.114$ の場合の計算例を示す。図より、擬似衝撃波の

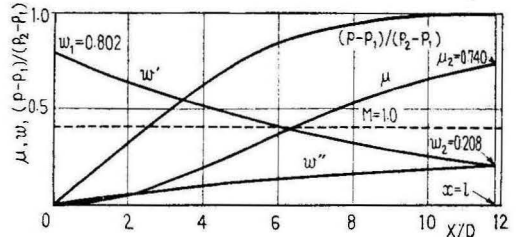


Fig. 4.11 An example of numerical calculation of diffusion model ($M_1 = 3.0$, $c = 0.114$, $\gamma = 1.4$)

内部で高速領域の流速は指数関数的に減少し、 $x = \ell$ で低速領域の流速と一致する。静圧は x とともに上昇し、そのこう配は先端で急で、しだいにゆるやかになり、後端では擬似衝撃波後流の静圧に滑らかに接続する。低速領域の流量比 μ は先端で緩やかに、途中はやや急こう配で上昇し、 $x = \ell$ で約0.74となる。以上

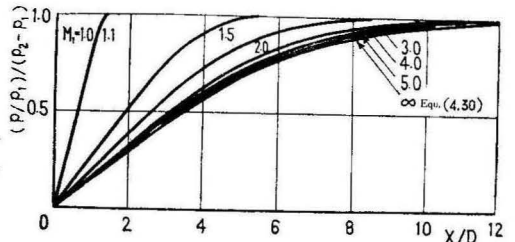


Fig. 4.12 Static pressure distributions calculated by diffusion model ($c = 0.114$, $\gamma = 1.4$)

のことから、本モデルによれば、前述の Shockless modelに関する三つの問題点が解決されることがわかる。

図 4.12 は、 M_1 をパラメータとした静圧分布の計算例である。図より M_1 が 1.0 から次第に増加すると、静圧分布曲線は、 M_1 が小さい範囲では急速に緩やかな曲線へ移行し、 M_1 が大きくなると変化が小さくなり、 $M_1 = 5.0 \sim \infty$ の範囲では、ほぼ極限値すなわち式 (4.30) に一致するといえる。 $M_1 = \infty$ の場合の擬

似衝撃波の長さは管径の約 15.7 倍で、管径の 10 倍で圧力上昇の 95% が得られ残りの 5% を上昇するのに、管径の 5.7 倍を要する。

4.4 拡散モデルの実験的検証 擬似衝撃波の長さに関する本実験の結果を、従来の実験結果とあわせて図 4.13 に示す。図の横軸は無次元速度差 Δw 、縦軸は無次元長さ L/D である。図中の実線①および②は $c = 0.114$ とした場合の拡散モデルの理論式 (4.24)、およびその近似式 (4.26) より計算した値である。図

M_1	M_2	w_1	w_2	Δw	$\Delta w/2w^*$	cL/D	$L/D(c=0.114)$	μ_2
1.00	1.000 0	0.408 2	0.408 2	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0	0.000 0
1.10	0.911 8	0.441 4	0.377 6	0.063 8	0.078 2	0.156 2	1.370 3	0.144 6
1.20	0.842 2	0.472 9	0.352 5	0.120 4	0.147 5	0.293 9	2.577 8	0.254 6
1.30	0.786 0	0.502 6	0.331 6	0.171 0	0.209 4	0.415 9	3.648 0	0.340 2
1.40	0.739 7	0.530 7	0.314 1	0.216 6	0.265 3	0.524 5	4.601 1	0.408 2
1.50	0.701 1	0.557 1	0.299 2	0.257 9	0.315 9	0.621 7	5.453 4	0.463 0
1.60	0.668 4	0.581 9	0.286 4	0.295 5	0.361 9	0.708 9	6.218 4	0.507 8
1.70	0.640 5	0.605 2	0.275 4	0.329 8	0.404 0	0.787 4	6.907 2	0.545 0
1.80	0.616 5	0.627 1	0.265 8	0.361 3	0.442 5	0.858 3	7.529 2	0.576 1
1.90	0.595 6	0.647 5	0.257 4	0.390 1	0.477 8	0.922 5	8.092 5	0.602 5
2.00	0.577 4	0.666 7	0.250 0	0.426 7	0.510 3	0.980 8	8.603 7	0.625 0
2.10	0.561 3	0.684 6	0.243 5	0.441 1	0.540 3	1.033 9	9.068 9	0.644 4
2.20	0.547 1	0.701 3	0.237 6	0.463 7	0.567 9	1.082 2	9.493 1	0.661 2
2.30	0.534 4	0.717 0	0.232 4	0.484 6	0.593 5	1.126 4	9.880 7	0.675 8
2.40	0.523 1	0.731 7	0.227 8	0.503 9	0.617 1	1.166 9	10.235 6	0.688 7
2.50	0.513 0	0.745 4	0.223 6	0.521 7	0.639 0	1.204 0	10.561 1	0.700 0
2.60	0.503 9	0.758 2	0.219 8	0.538 3	0.639 3	1.238 1	10.860 3	0.710 1
2.70	0.495 6	0.770 2	0.216 4	0.553 8	0.678 2	1.269 5	11.135 7	0.719 0
2.80	0.488 2	0.781 4	0.213 3	0.568 1	0.695 8	1.298 4	11.389 7	0.727 0
2.90	0.481 4	0.791 9	0.210 5	0.581 5	0.712 1	1.325 2	11.624 4	0.734 2
3.00	0.475 2	0.801 8	0.207 9	0.593 9	0.727 4	1.349 9	11.841 4	0.740 7
3.10	0.469 5	0.811 0	0.205 5	0.605 5	0.741 6	1.372 9	12.042 6	0.746 6
3.20	0.464 3	0.819 7	0.203 3	0.616 4	0.754 9	1.394 1	12.229 2	0.752 0
3.30	0.459 6	0.827 9	0.201 3	0.626 5	0.767 3	1.413 9	12.402 7	0.756 8
3.40	0.455 2	0.835 5	0.199 5	0.636 0	0.779 0	1.432 3	12.564 2	0.761 2
3.50	0.451 2	0.842 7	0.197 8	0.644 9	0.789 9	1.449 5	12.714 6	0.765 3
3.60	0.447 4	0.849 5	0.196 2	0.653 3	0.800 1	1.465 5	12.855 1	0.769 0
3.70	0.443 9	0.855 8	0.194 7	0.661 1	0.809 7	1.480 4	12.986 3	0.772 5
3.80	0.440 7	0.861 9	0.193 4	0.668 5	0.818 7	1.494 4	13.109 0	0.775 6
3.90	0.437 7	0.867 5	0.192 1	0.675 4	0.827 2	1.507 5	13.224 0	0.778 5
4.00	0.435 0	0.872 9	0.190 9	0.681 9	0.835 2	1.519 8	13.331 8	0.781 2
4.10	0.432 4	0.877 9	0.189 8	0.688 1	0.842 7	1.531 4	13.433 0	0.783 8
4.20	0.429 9	0.882 7	0.188 8	0.693 9	0.849 8	1.542 2	13.528 1	0.786 1
4.30	0.427 7	0.887 2	0.187 9	0.699 4	0.856 5	1.552 4	13.617 6	0.788 3
4.40	0.425 5	0.891 5	0.187 0	0.704 5	0.862 9	1.562 0	13.702 0	0.790 3
4.50	0.423 6	0.895 5	0.186 1	0.709 4	0.868 9	1.571 1	13.781 4	0.792 2
4.60	0.421 7	0.899 4	0.185 3	0.714 1	0.874 5	1.579 6	13.856 5	0.794 0
4.70	0.419 9	0.903 0	0.184 6	0.718 4	0.879 9	1.587 7	13.927 3	0.795 6
4.80	0.418 3	0.906 5	0.183 9	0.722 6	0.885 0	1.595 4	14.994 3	0.797 2
4.90	0.416 7	0.909 8	0.183 2	0.726 5	0.889 8	1.602 6	14.057 8	0.798 6
5.00	0.415 2	0.912 9	0.182 6	0.730 3	0.894 4	1.609 4	14.117 8	0.800 0
5.10	0.413 8	0.915 8	0.182 0	0.733 9	0.898 8	1.615 9	14.174 8	0.801 3
5.20	0.412 5	0.918 7	0.181 4	0.737 2	0.902 9	1.622 1	14.228 8	0.802 5
5.30	0.411 3	0.921 4	0.180 9	0.740 5	0.906 9	1.627 9	14.280 2	0.803 7
5.40	0.410 1	0.923 9	0.180 4	0.743 5	0.910 6	1.633 5	14.328 9	0.804 8
5.50	0.409 0	0.926 4	0.179 9	0.746 5	0.914 2	1.638 8	14.375 3	0.805 8
5.60	0.407 9	0.928 7	0.179 5	0.749 2	0.917 6	1.643 8	14.419 5	0.806 8
5.70	0.406 9	0.930 9	0.179 0	0.751 9	0.920 9	1.648 6	14.461 5	0.807 7
5.80	0.405 9	0.933 1	0.178 6	0.754 4	0.924 0	1.653 2	14.501 6	0.808 6
5.90	0.405 0	0.935 1	0.178 2	0.756 9	0.927 0	1.657 5	14.539 8	0.809 4
6.00	0.404 2	0.937 0	0.177 9	0.759 2	0.929 8	1.661 7	14.576 3	0.810 2
∞	0.378 0	1.000 0	0.166 7	0.833 3	1.020 7	1.791 8	15.717 4	0.833 3

Table 4.1 Flow properties calculated by diffusion model ($\gamma=1.4$)

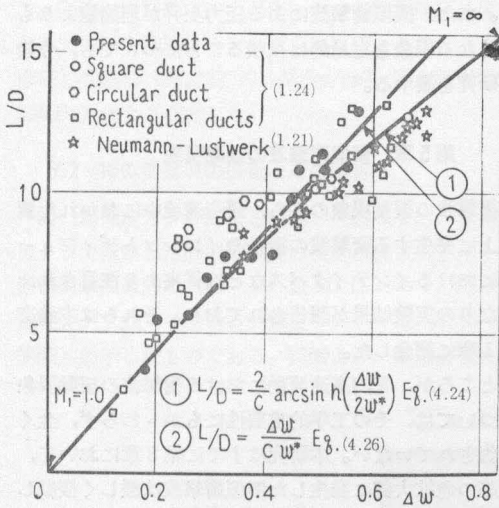


Fig. 4.13 Lengths of pseudo-shocks
($c=0.114, \gamma=1.4$)

より、実験値と理論値が良く一致することは明らかである。

従来、擬似衝撃波の長さ L は気流マッハ数 M_1 によって整理されてきているが、 L と M_1 の関係について理論的には明らかにされていない。また、第1章にのべたように、文献 (1.14) は L/D がほぼ $(1 - 1/M_1)$ に比例するとしているが、その根拠は明らかでない。

図 4.14 は、横軸に M_1 、縦軸に L/D をとったも

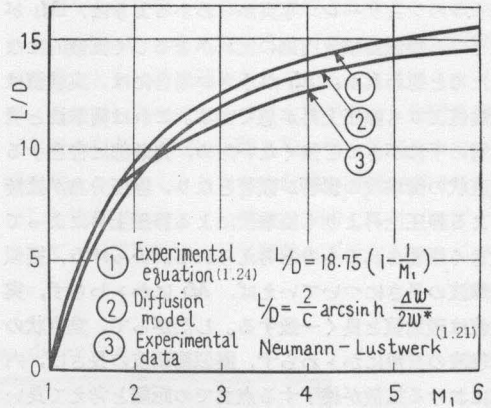


Fig. 4.14 Comparison of lengths of pseudo-shocks calculated by diffusion model with experimental curves

ので、拡散モデルによる理論式と従来の二つの実験式 (実験曲線) による値を示してある。理論値は二つの実験値のほぼ中間にあり、これまでの実験値をも、うまく説明できることがわかる。

つぎに 図 4.15 に、擬似衝撃波内部の管軸方向の壁面静圧分布について、拡散モデルによる理論値と実験

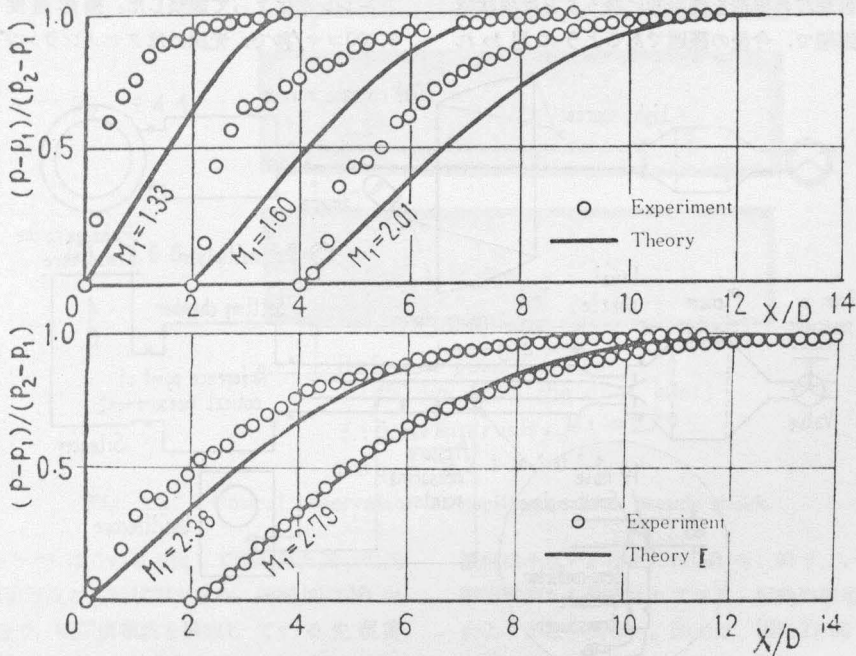


Fig. 4.15 wall static pressure distribution in pseudo-shocks
(Note: Each curve was displaced 2 to right of previous one)

値の比較を示す。実線は理論値で、 M_1 が大きい場合に理論値と実験値の一致はきわめて良い。これは図4.5のシュリーレン写真からわかるように、 M_1 が大きいと擬似衝撃波内部の流れが著しく拡散的になるためと思われる。 M_1 が小さい場合には、実験値は理論値よりも静圧上昇が急である。これは衝撃波と境界層の干渉がさほど強くないため、先頭部に存在する垂直状の衝撃波の影響が顕著となり、静圧分布が拡散による静圧上昇よりも衝撃波による静圧上昇によって大きく影響されるものと考えられる。いっぽう、擬似衝撃波の長さについていえば、 M_1 にかかわらず、実験値は理論値と良く一致する。したがって、垂直状の衝撃波の有無にかかわらず、擬似衝撃波の長さは、内部における拡散が終了する点までの距離と考えて良いようである。

図4.13に示した本実験および従来の実験結果に対しては、式(4.9)に示す高速領域の流速の減衰係数 c は一定 ($c = 0.114$) と考えて実験と理論はよく一致した。しかし、 c は厳密にはレイノルズ数や作動気体の特性などに依存すると考えられる。

提案された拡散モデルは、擬似衝撃波の時間的平均像の巨視的な構造を説明するもので、内部構造を詳細に論ずるものではない。擬似衝撃波の振動現象については、次章で簡単な考察を試みるが、振動現象を加味して、擬似衝撃波の構造を理論的に扱うことは現状ではきわめて困難で、今後の課題であるように思われ

る。また、擬似衝撃波による圧力上昇が理論値よりも低くなる現象を定量的に見積ることについても、今後の研究を要する。

第5章 擬似衝撃波の振動現象

衝撃波の振動現象のうち、遷音速流中におかれた翼面上に発生する衝撃波の振動やインレットディフューザにおけるインテイクパスなどは従来より注目され、かなりの実験結果が報告されており、それらは本論文第1章で紹介した。

ところが、管内高速流動における衝撃波の振動現象については、その工学的重要性にもかかわらず、全く報告されていない。本研究はすでに第3章において、管路の急拡大部に発生した擬似衝撃波は激しく振動しており、それに伴って圧力変動および管壁振動が発生することを明らかにした。

本章では、直管部に発生した擬似衝撃波の振動現象を詳しく観察し、その発生原因および挙動などについて考察を行なう。

5.1 計測方法 図5.1に本実験の計測方法を示す。実験装置および作動条件は前章と全く同様である。

擬似衝撃波の振動状況は高速度カメラを用い、シュリーレン法によって観察した。撮影速度は2,000~8,000コマ/秒で、光源にはクセノンランプを使用し

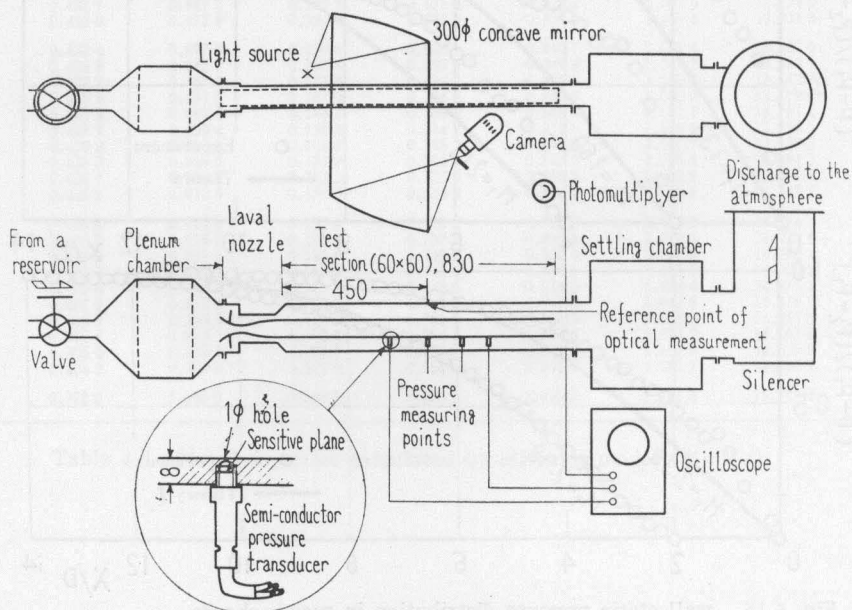


Fig. 5.1 Measuring arrangement

た。同時に擬似衝撃波の近傍における壁面静圧の変動を、図に示す壁面上の2～7点に直接とりつけた半導体圧力変換器（感度約 70 mV/kg/cm^2 ，固有振動数約 20 KHz ）により測定した。

5.2 擬似衝撃波の振動とその解析

(a) 高速度カメラによる観察 図5.2に、高速度カメラで観察した擬似衝撃波の振動の代表例を示す。擬似衝撃波直前の気流マッハ数 M_1 は2.79で、図は高速度カメラのフィルムの一部を24コマ毎（ 3.15 ms 間隔）に示したものである。図(a)より、擬似衝撃波は

多くの斜め衝撃波から構成されているが、いくつかの顕著な衝撃波の交錯により、X形の先頭衝撃波，第2，第3および第4衝撃波が形成されることが認められる。同図(a)～(e)を比較すると、これらのX形衝撃波が時間とともに前後運動をしていることは明らかである。そこで、図中の矢印で示す基準点から先頭衝撃波（X形の交点）までの距離を X_1 ，第2衝撃波までの距離を X_2 ，……とし、これらを管路の等価直径で無次元化した値を縦軸にとり、横軸の時間 t に対してプロットして、擬似衝撃波の前後運動を図示することができる。

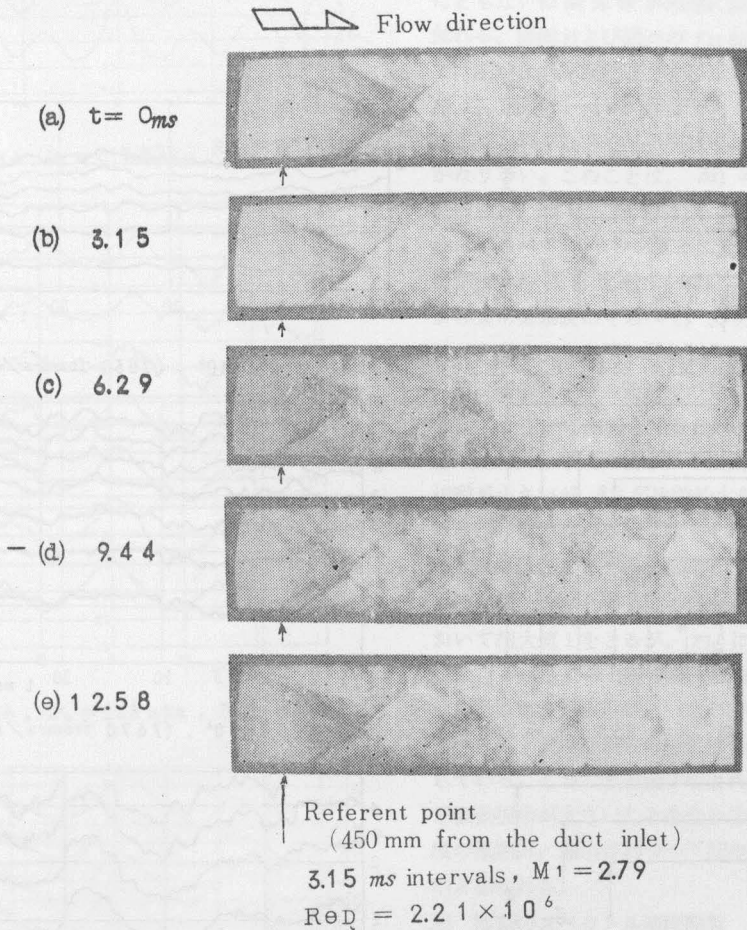


Fig. 5.2 Optical observation of oscillation of a pseudo-shock.

図5.3(a)～(c)はこのようにして得られた三つの代表的な擬似衝撃波の振動状態である。同図(a)は $M_1 = 1.44$ の場合で、擬似衝撃波を構成している先頭衝撃波から第6衝撃波までの各衝撃波は、ほぼ管軸に垂直で、それぞれ時間とともに前後運動をするが、その

振幅は小さい。図(b)では $M_1 = 1.93$ で、いくつかの λ 形衝撃波から構成されており、振動の振幅は図(a)の場合よりかなり大きい。図(c)は、図5.2と同じ $M_1 = 2.79$ の擬似衝撃波の場合で、X形の衝撃波の振動振幅は管径の1倍以上に達し、かなり規則的であることがわか

る。また図(a)~(c)のいずれの M_1 の場合も、先頭衝撃波より下流側の衝撃波ほど振幅が大きい。

(b) 振動の相関々数 一つの擬似衝撃波を構成する各衝撃波間の時間的相関の度合を明らかにするため、 i 番目の衝撃波の位置 x_i の時間的平均位置 \bar{x}_i からの偏差

$$\xi_i = x_i(t) - \bar{x}_i \quad (5.1)$$

を求め、次式によって相関関数 $R_{ij}(\tau)$ を計算した

$$R_{ij}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi_i(t) \xi_j(t+\tau) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_i(n\Delta t) \xi_j(n\Delta t + k\Delta t) \\ &(k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで Δt は高速度撮影のこま間隔、 N は計算に用いたデータ点数で $N = 100 \sim 250$ である。上式は $i=j$ の場合は自己相関々数、 $i \neq j$ の場合には相互相関々数を与える。こうして得られた $R_{ij}(\tau)$ と x_i と x_j の標準偏差の積との比をとり、相関係数 $r_{ij}(\tau)$ を求めた。すなわち

$$r_{ij}(\tau) = \frac{R_{ij}(\tau)}{\sqrt{R_{ii}(0) R_{jj}(0)}} \quad (5.3)$$

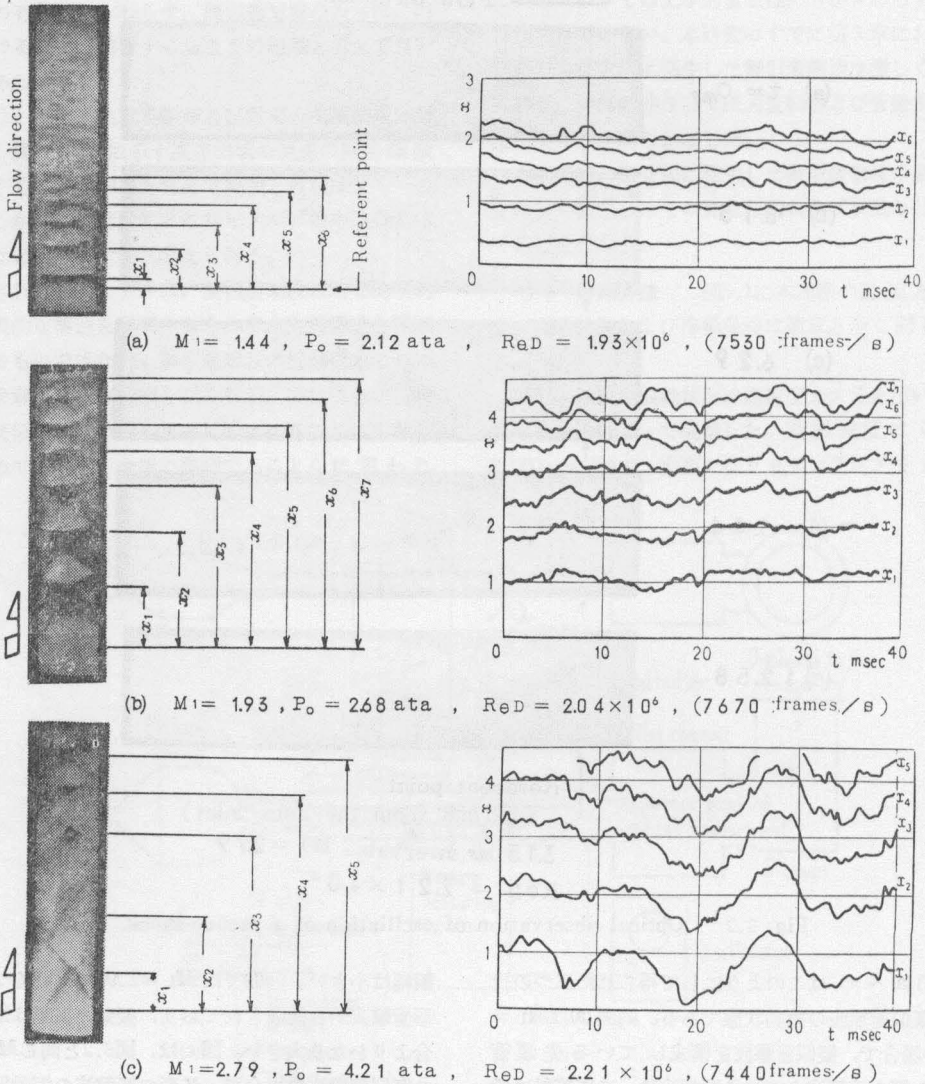


Fig. 5.3 Oscillation of pseudo-shock waves.

図 5.4 は、先頭衝撃波 ($i=1$) を基準とした r_{ij} (τ) の計算結果で、図 5.4 (a)~(c) はそれぞれ図 5.3 (a)~(c) に対応する。計算に用いたこま数 N が有限であ

るため、各 r_{ij} は $\tau=0$ の近傍で精度が高く、 $|\tau|$ が大きくなるほど誤差が大きくなる。例えば、 $N=\infty$ の場合、理論的には $|r_{ij}| \leq 1$ であるが、図 5.4 (a) で $|\tau|$ の大きいところで $|r_{ij}| > 1$ となるのはこのためである。

先頭衝撃の自己相関係数 $r_{11}(\tau)$ をみるといずれの M_1 の場合にも、衝撃波の振動は、規則的な周期振動成分と広範囲の周波数をもつランダム成分からなっていることがわかる。^(5.1) 周期振動成分は、 $\tau=10\sim 20\text{ms}$ 毎にくり返される高い、相関係数によって知ることができ、ランダム成分は、 $\tau=0$ から $|\tau|$ が増加するにともない相関係数が急速に減衰することによって知れる。図(a)および図(c)の r_{11} 曲線は、かなり滑らかで、明瞭な周期振動成分を示しているのに対し、図(b)の r_{11} 曲線は、1ms 程度毎にくり返される凸凹がはげしく、周期性がやゝ不明瞭で、 $\tau=0$ 近傍の減衰はかなり早い。このことは、 $M_1=1.93$ の場合の先頭衝撃波が、 $M=1.44$ および 2.79 の場合の先頭衝撃波にくらべて、よりランダムに変動することを意味し、衝撃波の形状を比較すれば、 λ 形衝撃波が垂直形および X 形衝撃波にくらべて、よりランダムに振動することを意味するように思われる。

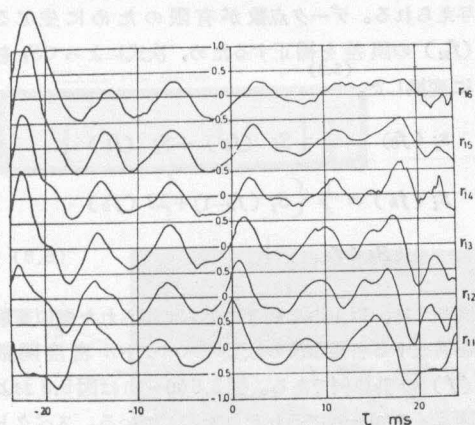
第 2 衝撃波以下の衝撃波の先頭衝撃波に対する相関係数 $r_{12}\sim r_{17}$ の曲線を見ると、 M_1 が比較的小さい場合 (図(a))、下流の衝撃波の振動ほど先頭衝撃波との相関が小さいが、 M_1 が比較的大きい場合 (図(c)) には、下流側の衝撃波の相関係数もその極大値が 1 に近く、各衝撃波はほとんど一様に振動していることがわかる。

つぎに、いずれの M_1 の場合にも、 r_{11} は $\tau=0$ において極大値 1 をとるが、 r_{1j} においてはその極大値は、 j が大きいほど時間軸の正の方向にずれる。これは先頭衝撃波の振動が、一定の時間間隔をおいて、つぎつぎに下流の衝撃波の振動に影響を及ぼすことを示している。このことと図 3 によれば下流側の衝撃波ほど振動振幅が大きいことを合わせ考えると、先頭衝撃波の振動は、増巾されつつ下流の衝撃波に伝播するものと思われる。

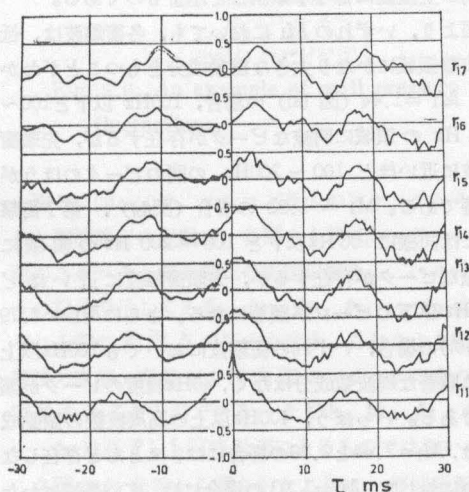
(c) 振動のスペクトル密度関数 振動の自己相関々数の 2 倍をフーリエ変換すると、スペクトル密度関数 $S(f)$ を得る。すなわち、

$$S_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} 2r_{ij}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (5.4)$$

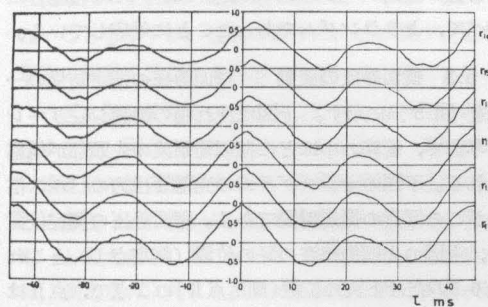
r_{ij} は偶関数であるから



(a) $M_1 = 1.44, P_0 = 2.12 \text{ ata}, ReD = 1.93 \times 10^6$



(b) $M_1 = 1.93, P_0 = 2.68 \text{ ata}, ReD = 2.04 \times 10^6$



(c) $M_1 = 2.79, P_0 = 4.21 \text{ ata}, ReD = 2.21 \times 10^6$

Fig. 5.4 Correlation coefficients of pseudo-shock oscillations

$$S_i(f) = 4 \int_0^{\infty} r_{ij}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (5.5)$$

となり近似的に

$$S_i(f_n) \doteq 4 \sum_{k=0}^N r_{ij}(k\Delta t) \cos(2\pi f_n k\Delta t) \Delta t \quad (5.6)$$

で計算される。ここで周波数 f_n は計算に用いるデータ

点数 N より小さい適当な値 M をとって

$$f_n = \frac{n}{2M\Delta t} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (5.7)$$

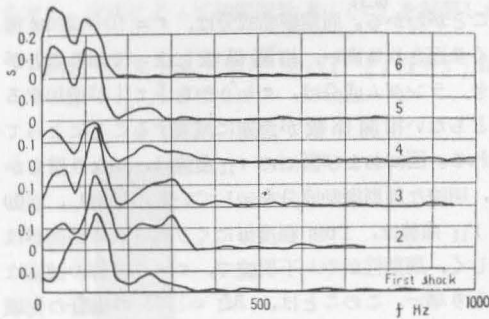
で与えられる。データ点数が有限のために生じる $S_i(f_n)$ の誤差を補正するため、次式によって S_i を S_i に変換した。

$$\begin{aligned} S_i(f_0) &= \frac{1}{2} \{ S_i(f_0) + S_i(f_1) \} \\ S_i(f_k) &= \frac{1}{4} \{ S_i(f_{k-1}) + 2S_i(f_k) \\ &\quad + S_i(f_{k+1}) \} \end{aligned} \quad (5.8)$$

図5.5は、以上の手続きによって得られた擬衝撃波を構成する各衝撃波の振動のスペクトル密度関数 $S_i(f)$ の計算例である。図5.5(a)~(c)は図5.3および図5.4の(a)~(c)にそれぞれ対応している。スペクトル密度関数は、振動現象において、ある周波数成分の振動が全振動に寄与する割合を示すものである。

図より、いずれの M_1 においても、各衝撃波は、低周波数領域にかなり大きな振動成分をもつことがわかる。 $M_1=1.44$ (図(a))の場合、100Hz以下と100~200 Hzの領域に明瞭なピークが存在するが、先頭衝撃波に近いほど100~200Hzの間のピークのほうが顕著である。 $M_1=1.93$ の場合(図(b))、第7衝撃波には同様に100 Hz以下と100~200 Hzの領域に明瞭なピークが存在するが、先頭衝撃波に近いほど100Hz以下のピークが顕著になる。さらに $M_1=2.79$ (図(c))の場合、いずれの衝撃波においても100Hz以上には顕著な周波数成分はなく、40Hz程度のピークが顕著である。いっぽう、400Hz以上の高周波数の振動成分は、 $M_1=1.44$ と2.79の場合には、ほとんど存在しないのに対して、 $M_1=1.93$ の場合には、広い帯域にわたって存在している。これは、図5.4において $M_1=1.93$ の場合の振動が $M_1=1.44$ および $M_1=2.79$ の場合に較べて、よりランダムであったことに対応している。

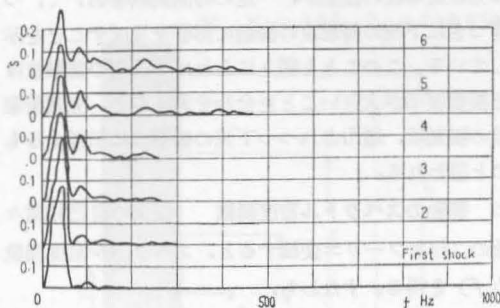
5.3 壁面静圧の変動 壁面静圧の測定結果の一例を図5.6に示す。上図は流れ場の瞬間シュリーレン写真で、管路の中ほどに擬衝撃波の先頭部が観察される。下図のオシログラムの光電管出力のパルス信号がこの写真の撮影瞬間である。壁面静圧の測定位置は、上図の先頭衝撃波の足の位置(測定点I)とこれより5Dだけ下流の位置(測定点II)の2点で、点IIは擬衝撃波の終了部近傍に位置する。オシログラムから、擬衝撃波の内部にかなり強い圧力変動があることが観察され、とくに擬衝撃波先頭部における変動



(a) $M_1 = 1.44$, $P_0 = 2.12 \text{ ata}$, $ReD = 1.93 \times 10^6$



(b) $M_1 = 1.93$, $P_0 = 2.68 \text{ ata}$, $ReD = 2.04 \times 10^6$



(c) $M_1 = 2.79$, $P_0 = 4.21 \text{ ata}$, $ReD = 2.21 \times 10^6$

Fig. 5.5 Spectral densities of pseudo-shock oscillations

は 0.2 kg/cm^2 にも達することがわかる。このような大きな圧力変動が、先頭衝撃波の振動によって生じることは明らかであろう。

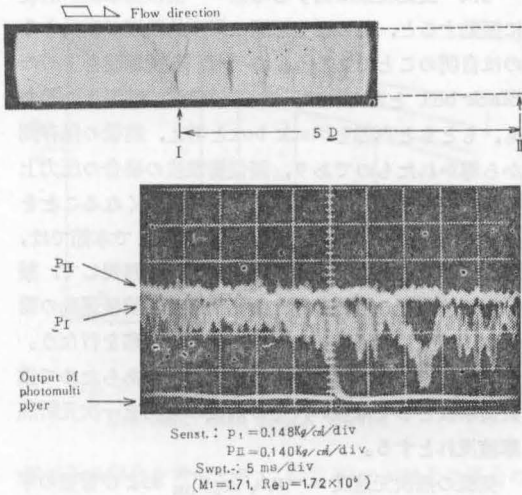
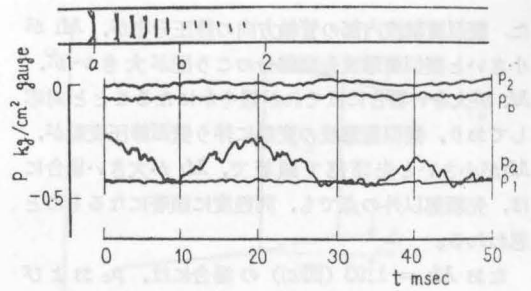


Fig. 5.6 An example of wall pressure fluctuations

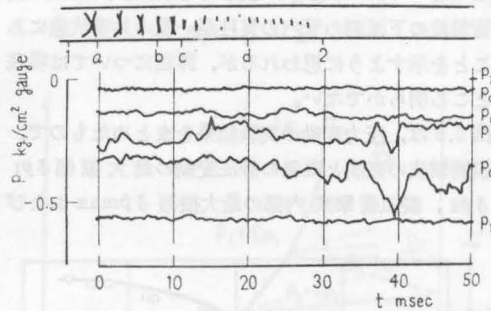
図 5.7 (a)~(d) は、オシログラムのスケッチから得られた壁面静圧の変動で、各図の上部にシュリーレン写真のスケッチと壁面静圧の測定位置を 1, 2, a, …, e の記号で示してある。p1, p2, pa … pe はそれぞれ上記の測定点の圧力を示す。これらより擬似衝撃波の直前、直後および内部のいくつかの点の静圧変動を知ることができる。ただし、p1, p2, pa, …, pe は必ずしも同時計測によるものではない。

各図の p1 曲線から明らかなように、擬似衝撃波の上流には微小な静圧変動が存在する。このことは、擬似衝撃波の上流側の超音速気流が必ずしも一様流ではないことを示すが、後述のように、この微小変動が衝撃波の振動を誘起する原因ではないと思われる。

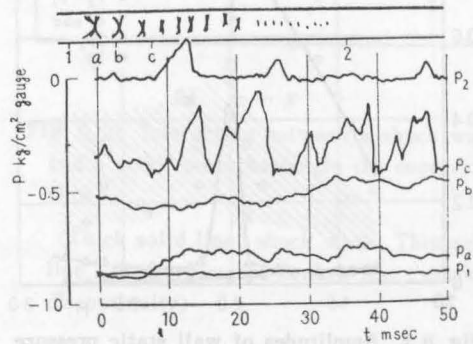
つぎに擬似衝撃波内部の各点における静圧変動を観察すると、図 5.7 (a) から明らかなように、M1 が小さい垂直形の擬似衝撃波では、先頭衝撃波の近傍 a における静圧 pa の変動が、他の測定点の変動にくらべてもっとも大きい。M1 = 1.71 (図(b)) の λ 形衝撃波では、測定点 a 以外に b, c にも顕著な静圧変動が観察される。さらに M1 が大きい X 形擬似衝撃波 (図(d)) では、擬似衝撃波内部の各点で、ほぼ同程度の静圧変動が観察される。以上のことは、前章で明らかになっ



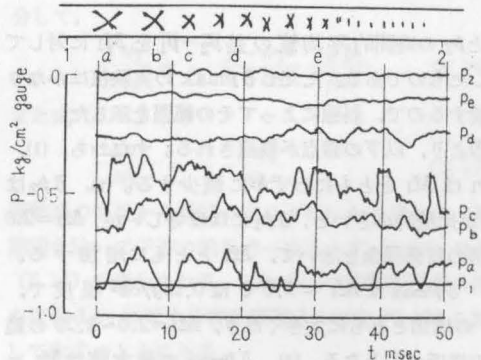
(a) $M_1=1.44, P_o=2.12 \text{ ata}, ReD=1.93 \times 10^6$



(b) $M_1=1.71, P_o=2.06 \text{ ata}, ReD=1.72 \times 10^6$



(c) $M_1=1.93, P_o=2.68 \text{ ata}, ReD=2.04 \times 10^6$



(d) $M_1=2.60, P_o=3.75 \text{ ata}, ReD=1.97 \times 10^6$

Fig. 5.7 Wall pressure fluctuations in regions of pseudo-shock waves

た、擬似衝撃波内部の管軸方向の静圧分布が、 M_1 が小さいと擬似衝撃波先頭部分のこう配が大きい、 M_1 が大きい場合にはそれが緩やかになることと対応しており、擬似衝撃波の変動に伴う壁面静圧変動が、 M_1 が小さいと先頭部で顕著で、 M_1 が大きい場合には、先頭部以外の点でも、同程度に顕著になるものと思われる。

なお $M_1 = 1.93$ (図(c)) の場合には、 p_c および p_2 に特異な大振幅の変動が観察される。(同様の現象は $M_1 = 2.01$ の場合にも認められた。) これは擬似衝撃波の下流側の管内の気柱が一種の共鳴状態にあることを示すように思われるが、詳細については現在のところ明らかでない。

図 5.8 は、圧力変動の実験結果をまとめたもので、擬似衝撃波の直前と直後の静圧変動の最大振幅 δp_1 と δp_2 、擬似衝撃波内部の最大振幅 δp_{max} および

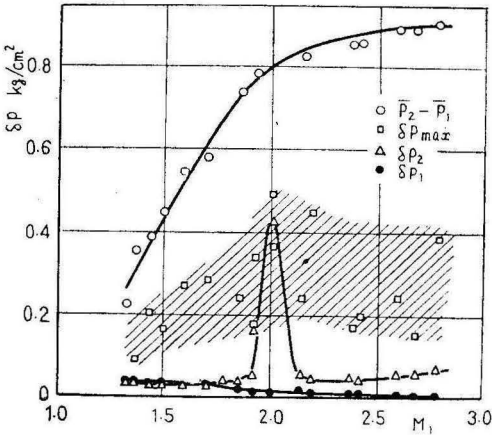


Fig. 5.8 Amplitudes of wall static pressure fluctuations

p_1 と p_2 の時間的平均値の差 $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$ を M_1 に対して示したものである。ただし δp_{max} の実験値はかなり分散するので、斜線によってその範囲を示した。

図より、以下の諸点が観察される。すなわち、(1), δp_1 は M_1 とともにわずかに減少する。(2), δp_2 は M_1 が比較的小さいと、 δp_1 にほぼ等しいが、 $M_1 = 2.0$ 近傍の特異現象を除いて、 M_1 とともに増加する。(3), δp_{max} は $M_1 = 1.5$ では 0.2 kg/cm^2 程度で、 M_1 の増加とともに大きくなり、 $M_1 = 2.0 \sim 2.79$ の範囲でほぼ一定となる。(4), δp_{max} の最大値は $M_1 = 2.01$ において 0.5 kg/cm^2 となるが、これは擬似衝撃波前後の静圧差 $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$ の 60% 程度になる。

このことは、第 3 章にのべた管路の急拡大部に発

生する擬似衝撃波の振動現象の場合と全く同様に、直管の一部が擬似衝撃波の振動によって局所的に大きな圧力変動を受けることを意味し、管路設計に際して無視できない現象である。

5.4 振動現象に関する考察 擬似衝撃波が前後に振動すると、その発生区間の局所的静圧が変動するのは自明のことであろう。また擬似衝撃波を 1 つの Black box と考えれば、垂直衝撃波の理論そのものも、もともと内部を Black box と考え、前後の保存則から導かれたものであり、擬似衝撃波の場合の圧力上昇が垂直衝撃波のそれよりいくらか小さくなることを除けば、両者に基本的な差異はない。そこで本節では、擬似衝撃波内部の静圧変動はとりあえず無視して、擬似衝撃波前後の静圧変動と擬似衝撃波の前後運動の関係および振動の周波数について簡単な考察を行なう。すなわち以下の考察では、擬似衝撃波をあらためて垂直衝撃波として取扱い、その前後の気流を一次元断熱摩擦流れとする。

気流の無次元速度 $w = u/\sqrt{2c_p T_{0n}}$ および管壁の平均摩擦係数 f を用いれば、管路の入口 i から衝撃波の直前 1 に至る流れに対して、以下の各式が成立する。

運動量の式

$$\frac{\gamma+1}{\gamma} \ln \frac{w}{w_i} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w_i^2} \right) = -4f(x-x_i) \quad (5.9)$$

連続の式

$$\frac{p \cdot w}{1-w^2} = \frac{p_i w_i}{1-w_i^2} \quad (5.10)$$

衝撃波の前後では

Prandtl の式

$$w_1 w_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (5.11)$$

連続の式

$$\frac{p_2 w_2}{1-w_2^2} = \frac{p_1 w_1}{1-w_1^2} \quad (5.12)$$

さらに衝撃波の直後 2 から管路の出口 e にいたる流れについては、(5.9), (5.10) と同様に

$$\frac{\gamma}{\gamma+1} \ln \frac{w}{w_2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w_2^2} \right) = -4f(x-x_2) \quad (5.13)$$

$$\frac{p \cdot w}{1-w^2} = \frac{p_2 w_2}{1-w_2^2} \quad (5.14)$$

がそれぞれ成立する。

以上の式を用いれば、管路の入口における p_i , w_i と出口の圧力 p_e を与えて、流れの場は決定される。

図 5.9 はその計算結果である。第 2 章に示したように、入口条件を固定し、出口圧力 p_e を減少させると、衝撃波は下流側へ移動し、それに伴って衝撃波前後の圧力比は減少する。つぎに、本実験をもとにして、管路の出口圧 p_e が一定で衝撃波の上流に微小な静圧変

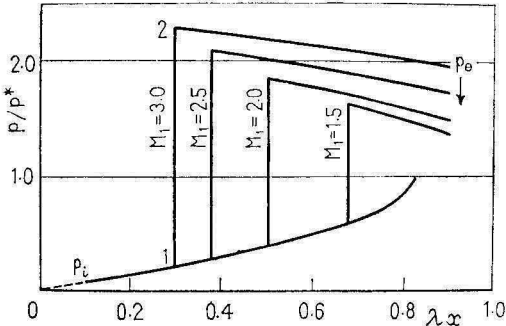


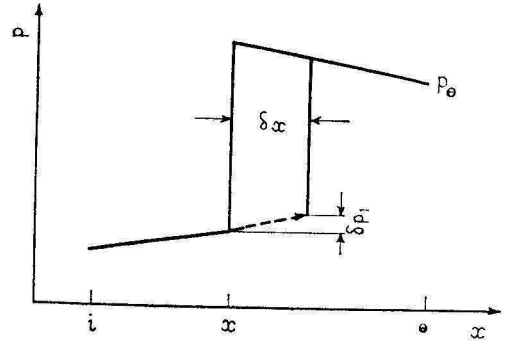
Fig. 5.9 Pressure distributions along the duct with shock waves

動がある場合を考えよう。図 5.10 の(a)はその場合の $p-x$ 線図、(b)は $t-x$ 線図である。衝撃波直前の静圧 p_1 が、何らかのじょう乱によって変動し $p_1 + \delta p_1$ になると、図 (b) に示すように、衝撃波はその強さを変化させ静止座標系に対して運動を始める。その際、衝撃波の下流側に、圧力波とエントロピ不連続波が伝播するが、圧力波の強さ δp_2 と δp_1 の比は、

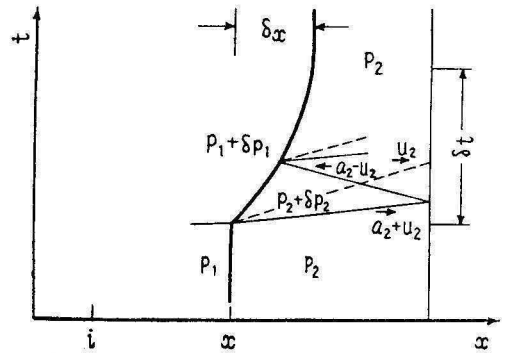
$$\frac{\delta p_2}{\delta p_1} = \frac{M_1 + 1}{M_2 + 1} \times \left\{ \frac{2(\gamma - 1)M_1 M_2^2 (M_1^2 - 1)}{-(M_1 + 1)[(\gamma - 1)M_1^2 + 2]} \right\} \quad (5.15)$$

で与えられる。^(5.3)この圧力波は気流に対して相対的に音速 a_2 で伝播し、管出口端で等圧反射して上流へ伝播し、再び衝撃波と干渉する。反射波が下流側から衝撃波と干渉した場合、衝撃波の強さが変化するとともに、ふたたび下流側へ圧力波とエントロピ不連続波が反射される。衝撃波の上流側は、常に超音速であるから、反射波による影響は全く受けない。一方、図 5.9 から明らかなように、衝撃波は移動するにともないその強さを変化させる。かゝる相互干渉が一定期間繰返された後、衝撃波は前後の静圧比に適合する安定な位置にあらたに静止すると思われる。この位置と干渉前の衝撃波の静止位置 x_1 との差を、図 5.10 (a) に示すように δx とし、 δp_1 との関係をもとめてみよう。

干渉の前後で流量は変化しないものとするれば、式



(a) $p-x$



(b) $t-x$

Fig. 5.10 Interaction between a shock wave and a small perturbation in the supersonic flow

(Thick solid line: shock wave, Thin solid line: pressure wave, Broken line: entropy discontinuity)

(5.10) より $p_1 w_1 / (1 - w_1^2) = \text{const}$ でこれを微分して、

$$\frac{\delta w_1}{w_1} = - \frac{1 - w_1^2}{1 + w_1^2} \frac{\delta p_1}{p_1} \quad (5.16)$$

また式 (5.11) より

$$\frac{\delta w_2}{w_2} = - \frac{\delta w_1}{w_1} \quad (5.17)$$

衝撃波の直後から管路の出口 e にいたる流れは、遷移期間を除いて干渉の前後で一致し、式 (5.13) および (5.14) で表わされる。したがって衝撃波直後の速度の変化 δw_2 に対する移動距離 δx は式 (5.13) を微分して次式のようになる。

$$\delta x = - \frac{1}{2f} \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(1 + \frac{1}{w_2^2} \right) \right\} \frac{\delta w_2}{w_2} \quad (5.18)$$

式 (5.16) と (5.17) を上式に代入すれば、

$$\delta x = -\frac{1}{2f} \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(1 + \frac{1}{w_2^2} \right) \right\} \times \frac{1-w_1^2}{1+w_1^2} \frac{\delta p_1}{p_1} \quad (5.19)$$

上式は、衝撃波を含む一定流量の断熱摩擦流れにおいて、衝撃波直前の圧力がわずかに変化した場合の衝撃波の移動距離を与えるものである。

図 5.11 は、図 5.8 から得られる擬似衝撃波前後の静圧変動の振幅比 $\delta p_2 / \delta p_1$ を、式 (5.15) による理

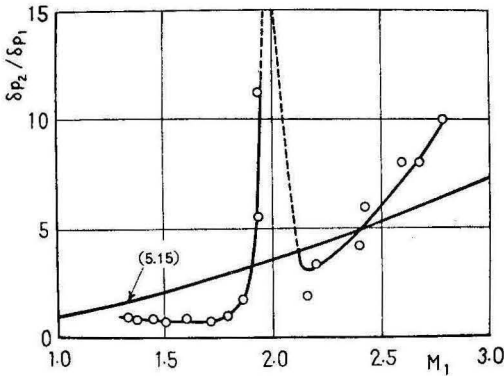


Fig. 5.11 Ratios of pressure fluctuations across pseudo-shocks.

論値と比較したものである。理論値は、 $M_1 = 2.0$ 近傍の特異現象を除いて、定性的に実験結果の傾向を説明しているように思われる。

図 5.12 は、擬似衝撃波を構成する各衝撃波の最大振幅 δx を M_1 について示したもので、実線は、仮に

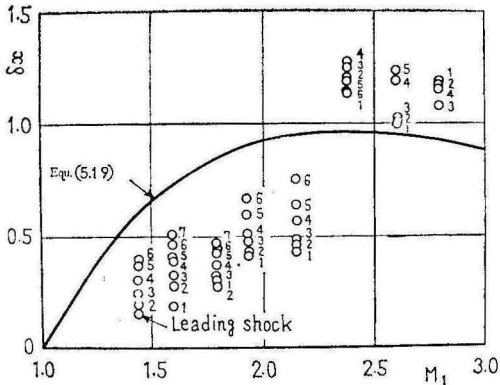


Fig. 5.12 Amplitudes of pseudo-shock oscillations (Equ. (5.19) : $f=0.003$, $\delta p/p_1=0.01$)

$f=0.003$, $\delta p_1/p_1=0.01$ として、式 (5.19) より計算した値である。式 (5.19) は、多くの仮定を含んでいるにも拘わらず、実験結果と傾向的に一致する。

以上のことから、擬似衝撃波を含む管内流の振動現象は、衝撃波とその上流の超音速流に含まれる微小擾乱との干渉によるものとして説明できるように思われる。

本考察では、簡単に一次元流れの垂直衝撃波に微小擾乱が入射すると仮定してあるが、流れの二次元性、擬似衝撃波の詳細構造、 δp_1 の時間的变化が明らかになれば、管内の各点における刻々の状態変化を求め、計算精度を改善できるであろう。

つぎに、振動の周波数について考えよう。擬似衝撃波の上流の微小擾乱は白色擾乱に近いと思われるが、図 5.5 から明らかのように、擬似衝撃波の振動にはいくつかの顕著な周波数成分が観察される。これらの周波数は、つぎに述べるように、管路の形状によるものと思われる。本実験では、図 5.1 に示したように直管部の後方に大容量の後部集合胴があり、この管路形状から、Helmholtz の共鳴が考えられる。先頭衝撃波の下流側の直管部の長さを L 、断面積を S 、後部集合胴の容積を V とすれば、共鳴周波数は次式で与えられる。(5.4), (5.5)

$$f_H = \frac{a_2}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{LV}} \quad (5.20)$$

ここに a_2 は 衝撃波下流の音速である。

つぎに、図 5.10 で示したように、衝撃波と直管出口端の間を $a_2 + u_2$, $a_2 - u_2$ の速度で伝播する二つの特性曲線から、直管内気柱の固有振動数が決定され、基本周波数は次式で与えられる。

$$f_0 = \frac{a_2^2 - u_2^2}{2a_2 L} \quad (5.21)$$

いま集合胴温度を 283°K とし、垂直衝撃波の理論から、 a_2 と u_2 をもとめ、 $S = (0.06)^2 \text{ m}^2$, $L = 0.5 \text{ m}$, $V = 0.19 \text{ m}^3$ の値を式 (5.20) および (5.21) に代入して f_H および f_0 を計算すれば、図 5.3 が得られる。図より、 f_H は M_1 に対しほぼ一定で約 10 Hz であり、 f_0 は M_1 の増加関数であるが、本実験の範囲 ($M_1 = 1.44 \sim 2.79$) ではほぼ 200 Hz 程度であることがわかる。実際の流れでは先頭衝撃波の後方に多数の衝撃波が存在し、 L が明確には定められないこと、および、軸方向に u_2 および a_2 が変化すること、などを考慮にいれば、図 5.5 で観察された

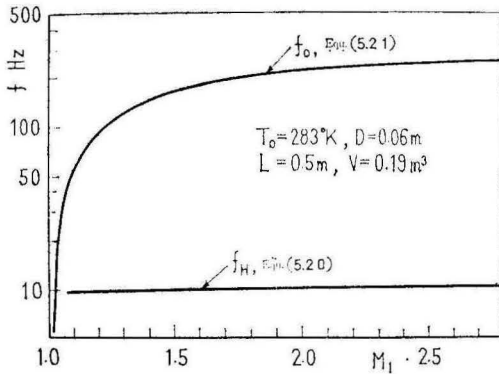


Fig. 5.13 Characteristic frequencies of the duct geometry

数10 Hz および 100~200 Hz の顕著な周波数成分は、それぞれ上記の f_H と f_0 に相当すると考えてよいように思われる。白色擾乱に近い δp_1 の周波数成分のうち、管路系状によって定まる固有振動数に一致する成分が、擬似衝撃波の振動現象にもっとも大きな影響を与えると考えられる。

なお、上記のほかにも、分枝した衝撃波の足と境界層との干渉によって生じる自励振動の周波数も存在するが、その周波数はかなり高い。第3章の実験結果からも明らかのように、擬似衝撃波の発生によって生じる高周波数の振動成分は、騒音問題を除けば、工学的に低周波数の振動成分ほど重要ではないように思われる。高周波数成分を含む擬似衝撃波の振動現象の詳細な解明あるいはその制御は今後の課題である。

第6章 結 論

本研究によって、下記の事項が明らかにされた。

(1) 32mm 正方形断面を有し、長さが最高1,600mm の長い管路中に、3種類のラバル管によって超音速気流を流入させ、管路前後の圧力比を変化させることによって、内部に発生する衝撃波の挙動を調べ、つぎの結論を得た。

(i) 衝撃波は、境界層との干渉によって複雑な形状をもった擬似衝撃波となるが、その挙動は断熱一次元摩擦流れによって、ほぼ説明できる。

(ii) 直管の長さが、流入気流の最大チョーク長さよりも短い場合、集合胴圧力の増加とともに直管内に進行した擬似衝撃波は、さらに集合胴圧力を上げることによって下流へ移動するが、その挙動はすみやかに、わずかの圧力上昇によって直管部を通過して、直管部

の気流は超音速流状態にスタートする。

(i) 直管の長さが、流入気流の最大チョーク長さよりも長い場合には、集合胴圧力を増加して、管路出口の圧力が摩擦流れによるチョーク圧力に等しくなると、流れはこの部分とラバル管のスロート部で二重にチョークする。

(ii) 二重チョークの後、さらに集合胴圧力を増加させると、流量の増大に伴うレイノルズ数の増加によって、壁面摩擦係数が減少し、擬似衝撃波はなお下流へ進行する。ただしその挙動は緩慢である。実験結果にもとづいた壁面摩擦係数の計算値およびそのレイノルズ数による変化の傾向は、従来の実験結果とほぼ一致した。

(2) 32mm 正方形断面管から32×96mm² 断面管に急拡大する部分に発生した擬似衝撃波について、種々の計測を行なった結果、つぎの事柄が明らかにされた。

(i) 直管部を通過し、あるいは直管部出口のチョークによって発生した擬似衝撃波は、最初、直管部からの自由噴流中に存在するが、集合胴圧力 P_0 の増加とともに噴流の幅を広げ、ついに管壁に到達して、数個の強い垂直衝撃波よりなる擬似衝撃波を形成する。

(ii) P_0 を増加させて擬似衝撃波が壁面に到着する瞬間の P_0 に比して、 P_0 を減少させて擬似衝撃波が壁面から離れる瞬間の P_0 はかなり低く、急拡大部における擬似衝撃波の挙動には履歴現象が認められる。

(iii) 高速度シュリーレン写真撮影によれば、急拡大部に発生した擬似衝撃波は、約100 Hz の低周波数大振幅成分と約1 KHz の高周波数小振幅成分よりなる複雑な前後運動を行ない、急拡大部近傍の圧力変動、管壁振動および騒音を誘起している。

(iv) 諸変動量の最大値を整理すれば、擬似衝撃波の振動振幅は 0.42 D 、壁面静圧、管路中心部に挿入したピトー管の静圧および全圧はそれぞれ 0.12, 0.15 および 2.5kg/cm² ($P_0 = 5.94$ ata の場合)、管壁の加速度は 1G、騒音の全音圧レベルは 115dB を記録した。

(v) 急拡大部の流れの模擬試験として浅底水槽による実験を行なったところ、水路の急拡大部に発生する跳ね水は、擬似衝撃波にきわめて類似した構造を示した。

(3) マツハ数可変形小形超音速風胴を用いて、直管部に発生した擬似衝撃波の構造と振動現象について詳細な実験を行ない、つぎの結論を得た。

(i) 擬似衝撃波前後の圧力比は、垂直衝撃波前

後のそれよりも低く、その差は M_1 とともに増加する。

(四) 擬似衝撃波の長さおよび擬似衝撃波内部の軸方向平均静圧分布は 本論文で提案した擬似衝撃波の拡散モデルによる計算とかなり良く一致した。Crocco の Shockless model を改良して得られた拡散モデルによれば、擬似衝撃波の長さはその前後の速度差によって整理され、式 (4.24) で与えられる。また擬似衝撃波内部の静圧分布は式 (4.29) で与えられる。

(五) 直管内に発生した擬似衝撃波の振動振幅は、擬似衝撃波直前の気流マッハ数 M_1 の増加関数で、 M_1 が 3 に近くなると管径の 1 倍以上になる。また擬似衝撃波の振動に伴う壁面静圧変動の最大振幅は、擬似衝撃波前後の静圧差の 60% 程度に達する。

(六) 擬似衝撃波の振動現象は、その上流の超音速気流中に存在する微少な静圧変動に主な原因があるように思われる。すなわち、擬似衝撃波上流の静圧変動の振幅と、擬似衝撃波下流の静圧変動の振幅との比は、式 (5.15) とほぼ一致し、擬似衝撃波の最大振幅 δx は、一定流量の断熱摩擦流れの理論にもとづいて誘導した式 (5.19) による計算値と定性的に一致した。

(七) 擬似衝撃波の振動現象の中で、工学的に重要と思われる低周波数大振幅振動の周波数は、管路の形状によって定まる固有振動数に支配されることがほぼ明らかになった。

本研究によって、管内高速流動における擬似衝撃波の挙動、および構造の基本的な性格は解明されたように思われる。ただし、(1)、擬似衝撃波を含む管内高速流動における壁面摩擦係数の系統的な調査、(2)、擬似衝撃波前後の静圧比が垂直衝撃波前後のそれよりも低くなることについての定量的な説明、(3)、擬似衝撃波の拡散モデルにおける高速流の減衰係数 c に及ぼす諸因子の効果、(4) 衝撃波の振動現象の動的な計算による解明、などは未解決で、今後より精密な実験と計測が望まれる。

また、擬似衝撃波の構造および振動現象を人為的に制御することは、理論的にも工学的にも、興味ある課題である。さらに、擬似衝撃波の概念を拡張して、一般的に、衝撃波と剪断流の干渉現象として把握すれば、研究対象はさらに広がりをもってくるように思われる。

謝 辞

本研究は、九州大学工学部動力機械工学教室におい

て行なわれたものである。

本研究の企画、遂行を指導され、最大限の援助を賜わった九州大学 生井武文教授、および研究の遂行と討論に常時参加していただき、貴重な助言と激励を下された松尾一泰助教授に衷心より感謝の意を表明する。

また実験の遂行にあたっては種々御協力いただいた流体力学研究室と実験室の方がたおよび本城正信、鹿毛一之、長友繁美、北島光比古、南正晴の諸氏に感謝の意を表する。

最後に、本研究のまとめにあたって種々御便宜をおかりいただいた琉球大学理工学部機械工学科の諸先生に感謝申し上げる。

昭和49年10月30日

永 井 実

参 考 文 献

- (1.1) Fage, A. and Sargent, R.F., Proc. Roy. Soc., 190 (1947), 1.
- (1.2) Barry, F.W. et al., J. Aeronautical Sciences, 18—4 (1951), 229.
- (1.3) Gadd, G.E., J. Aeronautical Sciences, 20—11 (1953), 729.
- (1.4) Tyler, R.D. and Shapiro, A.H., Aeronautical Sciences, 20—12 (1953), 858
- (1.5) Mager, A., J. Aeronautical Sciences, 23—2 (1956), 181.
- (1.6) Lees, L. and Reeves, B.L., AIAA J., 2—11 (1964), 1907.
- (1.7) Gai, S., Z. Flugwiss, 18—1 (1970), 8
- (1.8) Gadd, G.E., A.R.C. R & M, No. 3262 (1962).
- (1.9) Seddon, T., A.R.C. R & M, No. 3502 (1967).
- (1.10) Coles, D., J. Fluid Mechanics, 1 (1956), 191.
- (1.11) Liepmann, H.W. and Ashkenas, H., J. Aeronautical Sciences, 14—5 (1947), 295.
- (1.12) Hilton, W.F., A.R.C. R & M, No. 2692 (1947).
- (1.13) Holder, D.W., A.R.C. R & M, No. 2901 (1949).
- (1.14) Moulden, T.H. et al., A.R.C. c.p. No. 964 (1966).

(1.15) Lambourne, N. C., A. R. C. c.p. No.473 (1958).
 (1.16) Kuo, Y. H., J. Aeronautical Sciences, 18 (1951).
 (1.17) Trilling, L., J. Aeronautical Sciences, 25—5 (1958), 301.
 (1.18) Stodola, A., Steam and Gas turbines, (1945), Peter Smith, New York.
 (1.19) Weise, A., Tech. Berichte, 10 (1943), 59.
 (1.20) Moeller, J.H., et al., Princeton Univ. Aeronaut. Eng. Dept. Rept., 298 (1956).
 (1.21) Neumann, E.P. and Lustwerk, F., J. applied Mechanics, 16—2 (1949), 195.
 (1.22) Lukasiewicz, J., J. aeronautical Sciences, 20—9 (1953). 617.
 (1.23) McLafferty, G., J. aeronautical Sciences, 20—3 (1953), 169.
 (1.24) NAVWEPS, Handbook of Supersonic Aerodynamics, 6—17 (1959), 271.
 (1.25) Waltrup, P.J. and Billig, F.S., AIAA J., 11—10 (1973) 1404.
 (1.26) Crocco, L., Fundamentals of Gas Dynamics, B (1958), 120, Princeton.
 (1.27) 玉木他 2 名, 機論, 36—292 (昭45—12), 2056.
 (2.1) Moody, L.F., Trans. ASME, Nov. 1944. 671.
 (3.1) 白木, 機誌, 75—639 (昭47—4), 507.
 (3.2) 長友, 九州大学修士論文 (昭44—3).
 (3.3) 富田, 流体力学序説, [(昭46), 360.養賢堂
 (5.1) 堀川, ランダム変動の解析, (昭44), 131, 共立出版
 (5.2) Blackman, R.B. and Tukey T. W., The Measurement of Power Spectra, (1958), 171. Dover.
 (5.3) Landau, L.D. and Lifshiz, E.M., Fluid Mechanics, (1954), 332, Addison-Wesley.
 (5.4) 小橋, 音と音波, (昭44), 107, 裳華房
 (5.5) Sterbentz, W.H. and Evvard, J. C., NACA TN 3506 (1952).

補 遺 管内高速流動の基礎理論

本論文の基礎および必要な数式を提供するため、以下に管内高速流動の基礎理論を展開し、衝撃波発生 of 必然性および衝撃波前後の関係についてのべる。

A.1 断熱流れの基礎式 気体が完全ガスの場合、管内の断熱流れについてつぎの三つの方程式が成立する。

エネルギー保存則

$$h + \frac{1}{2}u^2 = c_p T + \frac{1}{2}u^2 = c_p T_0 = h_0 \quad (A.1)$$

質量保存則

$$m = \rho u A = \text{const} \quad (A.2)$$

状態方程式

$$p = \rho R T \quad (A.3)$$

ここで h はエンタルピ、 u は流速、 c_p は定圧比熱、 T は絶対温度、 m は質量流量、 ρ は密度、 A は流路断面積、 R は気体定数であり、 T_0 および h_0 はそれぞれよどみ点温度およびよどみ点エンタルピである。式 (A.1) より、速度 u は気体温度が絶対零度になるとき最大値をとり、その値は

$$u_{\max} = \sqrt{2 c_p T_0} \quad (A.4)$$

となるので、同式を u_{\max} で無次元化すれば

$$\frac{T}{T_0} = 1 - w^2 \quad (A.5)$$

となる。無次元速度 $w = u / \sqrt{2 c_p T_0}$ はクロッコ数と呼ばれる。

気流中の音速 a は比熱比 γ を用い

$$a = \sqrt{\gamma R T} \quad (A.6)$$

上式と式 (A.1) から

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{u_{\max}^2}{2} \quad (A.7)$$

流速と音速がちょうど等しい状態の流れに添字 * をつけることにすれば $u = u^* = a^*$ として式 (A.7) は、

$$\left(\frac{2}{\gamma - 1} + 1 \right) \frac{u^{*2}}{2} = \frac{u_{\max}^2}{2}$$

となり、そのときのクロッコ数は

$$w^* = \frac{u^*}{u_{\max}} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (A.8)$$

流速を無次元化する方法として、一般にはその点の音速を基準としたマッハ数 $M = u/a$ がよく用いられるが、 M と w の関係は式 (A.5) より

$$M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \frac{w^2}{1-w^2} \tag{A.9}$$

断熱流れでは、 M および w は u の単調増加関数で、 u の変化に対し次のように変化する。

$$\left. \begin{aligned} u=0 \text{ のとき } M=0, w=0 \\ u=a \text{ のとき } M=1, w=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \\ u=u_{\max} \text{ のとき } M=\infty, w=1 \end{aligned} \right\} \tag{A.10}$$

マッハ数は流れの性格を表わすのに適しているが、管内流動を取扱う場合には、流れ方向に温度が変化するため、 $M = u / \sqrt{\gamma RT}$ の分母は一定でなく、さらに $u = u_{\max}$ の近傍では T が零に近づき M の値は発散する。これに対しクロソコ数 w は分母が一定でありその値も 0 から 1 の範囲内にあるので、演算を進める場合に M よりも有用である。図 A.1 に M と w の関係を示す。

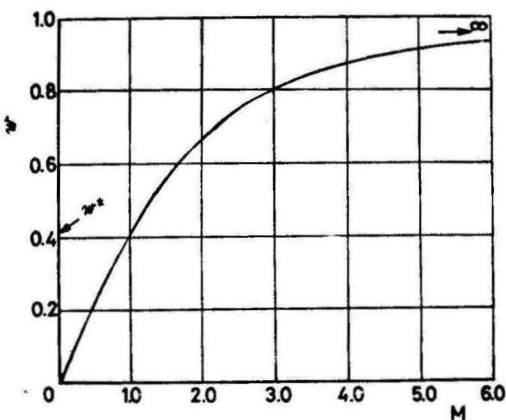


Fig. A.1 Relation between M and w ($\gamma=1.4$)

式 (A.3) および (A.5) の関係を用い、式 (A.2) より質量流束密度 m/A を w の関数として表わすと

$$\frac{m}{A} = \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)RT_0}} \frac{p \cdot w}{1-w^2} \tag{A.11}$$

つぎに衝撃関数 $J = pA + (\rho uA) \cdot u$ を w の関数として表示すると、

$$J = \rho A p \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w^2}{1-w^2} \right) \tag{A.12}$$

あるいは質量流量 m を用いると

$$J = m \sqrt{2c_p T_0} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} w + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{w} \right) \tag{A.13}$$

式 (A.5), (A.11) および式 (A.12) あるいは (A.

13) は完全ガスの断熱流れの基礎方程式として、以下に直接利用される。

A.2 等エントロピ流れ 断熱可逆流れではエントロピ保存則が成立する。

$$S = S_0 = \text{const.} \tag{A.14}$$

上式を用いれば、式 (A.5) より流線にそり圧力および密度の変化が w の関数として得られる。

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = (1-w^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{A.15}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = (1-w^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{A.16}$$

p_0 および ρ_0 はそれぞれ よどみ点圧力およびよどみ点密度で、等エントロピ流れにおいては T_0 と同様一定である。質量流束密度は式 (A.11) に式 (A.15) を代入することにより、

$$\frac{m}{A} = \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} w(1-w^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{A.17}$$

図 A.2 は、 $\gamma=1.4$ とした場合の温度、圧力、密度および質量流束密度を w の関数として示したものであ

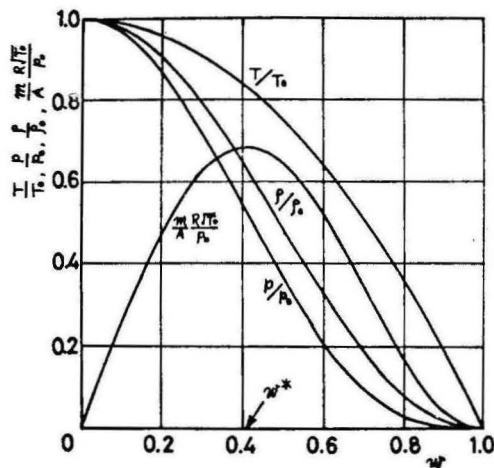


Fig. A.2 Isentropic flow ($\gamma=1.4$)

る。 T/T_0 , p/p_0 , ρ/ρ_0 はともに w の減少関数であるのに対し、 m/A には最大値が存在する。 m/A が最大になるときの w の値は式 (A.17) の微分を零とおくことで求められる。すなわち、

$$\left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} w^2 \right) (1-w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} = 0$$

$0 < w < 1$ を考慮すれば求める値は

$$w = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

上式の右辺は、式 (A.8) の w^* にちょうど等しい。すなわち質量流束密度が最大になるのは流速がちょうどその点の音速に等しい点である。いま T_0, ρ_0 が一定の先細管中の流れを考えれば、流れ方向に m/A は増加するが、管出口端における流速がいったん音速に等しくなると、 m/A は最大値に達し、それ以上いかに断面積を縮小させても最少面積部の m/A は常に一定である。この現象は流れのチョークと呼ばれる。

等エントロピ流れのチョーク状態における諸量は、式 (A.5), (A.15), (A.16) および (A.17) に $w = w^*$ を代入することにより、

$$\frac{T^*}{T_0} = 1 - w^{*2} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (A.18)$$

$$\frac{p^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (A.19)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (A.20)$$

$$\frac{m}{A^*} = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \quad (A.21)$$

式 (A.21) より最大流束密度を与える最少断面積 A^* は m, p_0 および T_0 によって一意的に定まる。

そこで、流路断面積 A を A^* で無次元化すれば式 (A.17) および (A.21) より A/A^* は w のみの関数となる。

$$\frac{A}{A^*} = \frac{m/A^*}{m/A} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \times \frac{1}{w(1 - w^2)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \quad (A.22)$$

上式のと対数微分を整理すると

$$\frac{dw}{w} = \frac{w^{*2}(1 - w^2)}{w^2 - w^{*2}} \frac{dA}{A} \quad (A.23)$$

式 (A.23) の右辺の dA/A の係数は $w \geq w^*$ によって符号を異にし、 A の増減に対する w の増減の関係は逆になる。すなわち亜音速流に対しては先細管が増速を意味するが、超音速流に対しては、先細管は減速を意味する。一方 T, ρ は w の減少関数であるから $dT, dp, d\rho$ の dA に対する関係は dw とは反対である。また衝撃関数 J の変分については、式 (A.13) を微分し式 (A.23) を代入して

$$\frac{dJ}{J} = \frac{w^{*2}(1 - w^2)}{w^2 + w^{*2}} \frac{dA}{A} \quad (A.24)$$

となり A の増加関数であることが確められる。

表 A.1 に流路断面積の増減に対する諸量の増減の関係を整理した。気体をよどみ点状態から定常的に加速して超音速流を実現することは、先細末広管 (ラバルノズル) によってのみ可能である。

	Converging duct $dA < 0$		Diverging duct $dA > 0$	
	Subsonic $w < w^*$	Supersonic $w > w^*$	Subsonic $w < w^*$	Supersonic $w > w^*$
dw	+	-	-	+
dT	-	+	+	-
dp	-	+	+	-
$d\rho$	-	+	+	-
dJ	-	-	+	+

Table A.1 Variations of flow properties with variations of duct area in the isentropic flow

A.3 断熱摩擦流れ つぎに一定断面積の比較の長い管路における断熱流れを考える。この場合、壁面摩擦力によって、エネルギー散逸が生じ、各点のよどみ点圧力は一定ではない。

基礎式は式 (A.1) ~ (A.3) に運動方程式が加わり微分形で表せばつぎのようになる。

$$\text{エネルギー保存則 } c_p dT + u du = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\text{質量保存則 } \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\text{状態方程式 } \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{A.27})$$

$$\text{運動方程式 } dJ = -\tau_w dA_w \quad (\text{A.28})$$

τ_w は壁面摩擦力、 A_w はぬれ線面積で、それぞれ壁面摩擦係数 f 、管の等価直径 D 、軸方向路離 X を用いて次式のように表わす。

$$\tau_w = f \cdot \frac{\rho w^2}{2} \quad (\text{A.29})$$

$$dA_w = \frac{4A}{D} dX \quad (\text{A.30})$$

また

$$dX/D = dx \quad (\text{A.31})$$

$$du/u = dw/w \quad (\text{A.32})$$

を用い、式 (A.25)、(A.26) を無次元表示すると

$$\frac{dT}{T} = \frac{-2w^2}{1-w^2} \frac{dw}{w} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w} \quad (\text{A.34})$$

式 (A.33) および (A.34) を式 (A.27) に代入すると

$$\frac{dp}{p} = -\left(\frac{1+w^2}{1-w^2}\right) \frac{dw}{w} \quad (\text{A.35})$$

式 (A.29) ~ (A.35) を運動方程式 (A.28) に代入し、整理すると

$$\frac{\gamma+1}{\gamma} \left(1 - \frac{w^{*2}}{w^2}\right) \frac{dw}{w} = -4f dx \quad (\text{A.36})$$

上式によれば壁面摩擦力が流速の変化に及ぼす効果が直接計算できる。式 (A.36) の左辺の係数は、 $w \geq w^*$ によって付号が異なり、 $w < w^*$ の場合は $dw/dx > 0$ 、 $w > w^*$ の場合は $dw/dx < 0$ となる。

式 (A.36) を式 (A.33) ~ (A.35) に代入すると

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{2w^4}{(1-w^2)(w^2-w^{*2})} 4f dx \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{w^2}{(w^2-w^{*2})} 4f dx \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{(1+w^2)w^2}{(1-w^2)(w^2-w^{*2})} 4f dx \quad (\text{A.39})$$

局所よどみ点圧力は式 (A.15)、(A.39) より

$$\frac{dp_0}{p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{w}{1-w^2} 4f dx \quad (\text{A.40})$$

したがってエントロピの増加量は

$$dS = -\frac{\gamma-1}{\gamma} c_p \frac{dp_0}{p_0} = c_p \frac{w^2}{1-w^2} 4f dx \quad (\text{A.41})$$

衝撃関数は式 (A.13)、(A.36) より

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{w^2}{w^2+w^{*2}} 4f dx \quad (\text{A.42})$$

以上の結果より、断熱摩擦流れにおける諸量の流れ方向の増減を $w > w^*$ と $w < w^*$ の場合において整理すると、表 A.2 が得られる。同表を表 A.1 と比較すれば、 p_0 および S の変化を除いて、この場合の T 、 p 、 ρ および J の変化は、ちょうど先細管内の等エントロピ流れに対応することがわかる。

したがって、この場合、質量流束密度 m/A は流れ方向に変化しないが、局所よどみ点圧力が減少することによって、先細管内の等エントロピ流れと同様に、チョーク現象を生ずることが明らかである。すなわち、亜音速（あるいは超音速）の流入気流が、摩擦力によって流れ方向に加速（減速）される場合、 w は音速状態 w^* を超えてさらに加速（減速）されることはあり得ず、管出口端がいったん音速状態に到達すると、管内の w および p/p_0 の分布は固定される。この現象は管摩擦力による流れのチョークと呼ばれる。また、このことより、流入気流の無次元流速 w に対して、これを摩擦力により加速（あるいは減速）しうる最大チョーク長さ ℓ_{\max} が存在する。

任意の w に対する ℓ_{\max} は式 (A.36) をつぎのように積分することによって得られる。

$$\int_0^{\ell_{\max}} 4f dx = -\int_w^{w^*} \frac{\gamma+1}{\gamma} \times \left(\frac{1}{w} - \frac{w^{*2}}{w^3}\right) dw$$

$$\text{ゆえに } 4\bar{f} \ell_{\max} = \frac{\gamma+1}{\gamma} \ln \frac{w}{w^*} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^{*2}}\right) \quad (\text{A.43})$$

	Friction flow $4 f dx > 0$	
	Subsonic $w < w^*$	Supersonic $w > w^*$
$d w$	+	-
$d T$	-	+
$d p$	-	+
$d \rho$	-	+
$d p_0$	-	-
$d S$	+	+
$d J$	-	-

Table A.2 Variations of flow properties in the adiabatic friction flow

ここで \bar{f} は管壁の平均摩擦係数である。 $\bar{f} = 0.0025$ として l_{max} を M および w に対して計算すれば表 A.3 が得られる。

表 A.3 によれば、亜音速流に対する l_{max} はかなり長く、 $M=w=0$ の場合 $l_{max} = \infty$ になるの

に対し、超音速流に対する l_{max} はかなり短く $M = \infty, w = 1$ の場合にも有限である。これより、壁面摩擦力は超音速流に対して、より大きな影響を与えることがわかる。

M	0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	2	3	∞
w	0	0.111	0.218	0.318	0.408	0.557	0.667	0.802	1.0
$l_{max} = \frac{L_{max}}{D}$	∞	850	110	12	0	14	31	52	82

Table A.3 Maximum choking lengths ($\gamma = 1.4, f = 0.0025$)

次に、連続の式 (A.11) より

$$\frac{\rho \cdot w}{1-w^2} = \frac{\rho^* \cdot w^*}{1-w^{*2}}$$

が成立するので、 w は無次元量 ρ/ρ^* によって次式のように表わされる。

$$w = \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho}{\rho^*}\right)^2 + 1} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho}{\rho^*} \quad (A.44)$$

ρ/ρ^* は測定可能な量であり、断熱摩擦流れの諸量は ρ/ρ^* を知ることによって、一意的に決定される。

最後に、レイノルズ数は

$$Re/D = \frac{\rho u}{\mu} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \frac{\rho_0}{\sqrt{RT_0}} \times \frac{1}{(1-w^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \cdot w \quad (A.45)$$

となる。ここで、空気の場合について、 $\gamma = 1.4, R = 29.27 (kg \cdot m / kg^* \cdot ^\circ k)$ とし、粘性係数は

$$\mu = 0.0171 \left(\frac{T}{273}\right)^{0.76} \quad (\text{センチポアズ})$$

に従って変化すると仮定すれば、つぎのように表わされる。

$$Re/D = 6.3597 \times 10^8 \frac{\rho_0}{T_0^{1.26}} \times (1-w^2)^{1.74} w \left(\frac{1}{cm}\right) \quad (A.46)$$

同式はマッハ数で表わすと

$$Re/D = 2.8442 \times 10^8 \frac{\rho_0}{T_0^{1.26}} \times \frac{M}{(1+0.2 M^2)^{2.24}} \left(\frac{1}{cm}\right) \quad (A.47)$$

A.4 衝撃波の発生 以上の議論では、流れの諸量が連続的に変化することを前提としてきたが、流れの場に超音速流の部分が生じると、擾乱がその上流へは伝播できないという超音速流の性格と結びついて以下のように流れの中に不連続が発生する。

(a) 断面積変化部における不連続の発生 図 A.3 にラバル管内の気流の軸方向静圧分布を示す。いま、

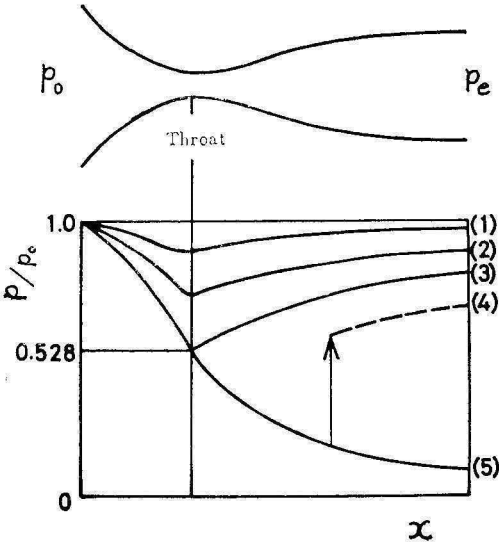


Fig. A.3 Appearance of shock wave in D'Laval nozzle

流入気流のよどみ点圧力 p_0 を一定に保ち、ノズルの背圧 p_e を徐々に下げる場合を考えれば、背圧が p_0 よりもわずかに低いときは、流れ方向の圧力分布は図の曲線(1)や(2)で表わされるようにスロート部に対して左右対称で、流れはいたる所亜音速である。 p_e をさらに減少させ、図の(3)になると、スロート部で流れがチョークし、その点の流れは音速となるので、それ以後 p_e をいかに減少させても、スロート部上流の流れには影響を及ぼさない。スロートより下流の流れを考えると、式 (A. 22) より計算される解は次の二つしか存在しない。一つはスロートより再び減速され、背圧 (3) にいたる流れであり、他の一つは超音速側への加速をつづけ、ついに背圧(5)にいたる流れである。そこで背圧を図に示すように(3)よりはいくらか低い(4)に設定した場合を考える。この場合、出口近傍の流れは亜音速であるので、背圧の影響は上流へ伝播し、断面積の変化に応じて、この圧力分布は、図中に破線で示す曲線になると考えられる。この曲線は、背圧(3)にいたる曲線より低い静圧分布を与えるので、この部分の局所よどみ点圧力は、ノズル入口部のよどみ点圧力よりも

低くなければならない。等エントロピー流れでは流線にそってよどみ点圧力は一定であるので、この場合の条件を満足しうる一つの可能性は、図に矢印で示すように、超音速流の曲線より亜音速流の曲線への“飛び”が生じ、その過程で局所よどみ点圧力を減少せしめることである。超音速風洞の始動過程においては、実際そのような“飛び”すなわち衝撃波が観察される。

以上は、管路の末広がり部に発生する衝撃波の例であるが、管路の先細部に発生する衝撃波についてのべると、例えば超音速風洞の第2スロートの先細部に発生する衝撃波はきわめて不安定で、必ず第1スロートあるいは第2スロートの広がり部へ移動することが知られている。

(b) 長い管路に超音速気流が流入する場合 つぎに、ラバル管で超音速に加速された流れが、長い管路に流入する場合を考える。図 A.4 はその場合の軸方

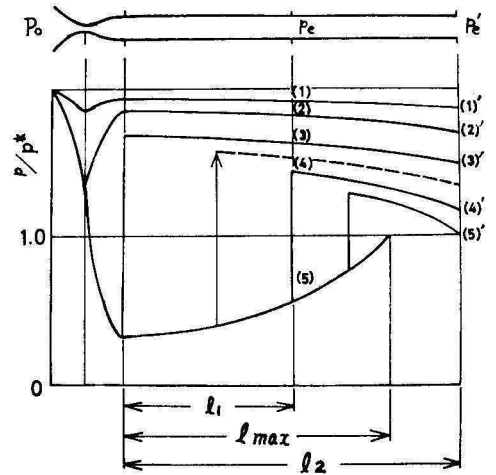


Fig. A.4 Appearance of shock wave in the friction flow in duct.

向静圧分布を示したものである。流入気流に対しては式 (A. 43) に示す最大チョーク長さ l_{max} が存在するので、管長 l が l_{max} より短い場合と長い場合において考える。 l が短い場合 ($l_1 < l_{max}$)、背圧が(1)から(2)の間では流れはいたるところ亜音速であり、(2)から(3)の間では前述したようにラバル管の末広がり部に衝撃波が生じる。

背圧が(3)になると、衝撃波はラバル管を通過して、ラバル管は設計マッハ数の超音速流を管路に供給する。このとき、管路内の連続的な解は、衝撃波を通過し、亜音速流で背圧(3)に到る解と、衝撃波の発生なしに、

超音速のままかなり低い背圧(4)に到る解の二つしか存在しえない。そこで背圧が(3)よりわずかに低い場合には、先の場合と全く同様で、図中の矢印で示すように、超音速の解から新しい亜音速の解(破線で示す)への“飛び”が発生する。超音速の解は常に固定されているので、衝撃波は、種々の背圧に対応する亜音速流の条件を満足するように、その強さと発生位置を決定する。計算によれば、一定断面の断熱摩擦流れにおいては、管内に発生する衝撃波の位置は、背圧の減少によって常に下流側へ移動することが確かめられる。

l が長い場合 ($l_2 > l_{max}$)、図より明らかのように、背圧を(1)' から次第に下げて(4)' にいたる過程では状況は l が短い場合と全く同様である。ただし、背圧をさらに減少させて、(5)' に達すると、管路の出口端で流れがチョークし、 $w = w^*$ 、 $p = p^*$ となるので、これ以降いかに背圧を下げて管内の流れに影響を与えない。それまで、背圧の減少とともに、管内を下流へ進行してきた衝撃波は、出口端がチョークした瞬間の位置にとどまり、管内の圧力分布は固定することになる。(ただし、本論文第2章では管摩擦係数 f の変化によって圧力分布がさらに変化することをのべた。)

ラバル管の広がり部に発生する衝撃波と一定断面の管路中に発生する衝撃波とを比較すると、衝撃波前後の圧力分布が両者の場合互いに逆であることに気付く。すなわちラバル管の場合、衝撃波の前方で dp/dx は負、後方では正であるのに対し、管内摩擦流れにおいては、衝撃波前方で dp/dx は正、後方では負である。このことは、管内に発生する衝撃波の安定性に対し重要な影響をもつように思われる。すなわち先にのべたように超音速風洞の先細部に発生する衝撃波は絶対的に不安定であるが、このときの衝撃波前後の dp/dx の符号は摩擦流れの場合と一致している。(衝撃波の安定性については、本論文第5章で考察した。)

A.5 衝撃波前後の関係 衝撃波の内部は物理量の急勾配によって、エネルギー散逸のある領域であるが、いまこの内部の散逸過程を詳論することは避け、衝撃波前後の一樣流の関係を考えよう。

衝撃波の上流側および下流側の諸量にそれぞれ添字 1 および 2 をつければ、次の保存則が成立する。

エネルギー 保存則

$$c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{w_2^2}{2} = c_p T_0 \quad (A.48)$$

質量 保存則 $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = \frac{m}{A}$ (A.49)

運動量 保存則

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 = \frac{J}{A} \quad (A.50)$$

また完全ガスの仮定より

$$p_1 = \rho_1 R T_1, \quad p_2 = \rho_2 R T_2 \quad (A.51)$$

流速 u をこれまでと同様に $u_{max} = \sqrt{2c_p T_0}$ で無次元化すると、式(A.48), (A.49) および (A.51) はそれぞれつぎのように無次元化される。

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 - w_2^2}{1 - w_1^2} \quad (A.52)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{w_1}{w_2} \quad (A.53)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{w_1}{1 - w_1^2} \cdot \frac{1 - w_2^2}{w_2} \quad (A.54)$$

式 (A.50) は式 (A.12) を利用して

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w_1^2}{1-w_1^2}}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{w_2^2}{1-w_2^2}} \quad (A.55)$$

となる。以上の四式より衝撃波前後の関係はつぎのように求められる。

式 (A.54) および (A.55) より p_2/p_1 を消去し整理すると

$$(w_1 - w_2) \{(\gamma - 1) - w_1 w_2 (\gamma + 1)\} = 0$$

ゆえに、不連続をもたらす意味のある解は $w_1 \neq w_2$ より

$$w_1 w_2 = w^{*2} \quad (A.56)$$

ただし $w^{*2} = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ なる関係を用いた。上式はすべての超音速流 ($w^* \leq w_1 \leq 1.0$) を一定範囲の亜音速流 ($w^{*2} \leq w_2 \leq w^*$) と 1 対 1 の関係で結びつけるもので、Prandtl の関係式と呼ばれる。

式 (A.56) で得られた w_2 を式 (A.52) ~ (A.54) に代入するとそれぞれつぎようになる。

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{w_1^2 - w^{*4}}{w_1^2 (1 - w_1^2)} \quad (A.57)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{w_1^2}{w^{*2}} \quad (A.58)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_1^2 - w^{*4}}{w^{*2} (1 - w_1^2)} \quad (A.59)$$

衝撃波の強さをその前後の圧力比 $f_{21} = p_2/p_1$ で示し、諸量の変化を f_{21} を基準として表示することも行われるので、式 (A.56) ~ (A.59) を書きあらためるとそれぞれつぎのようになる。

$$w_1^2 = \frac{w^{*2} (w^{*2} + f_{21})}{1 + w^{*2} f_{21}} \quad (\text{A.60})$$

$$w_2^2 = \frac{w^{*2} (1 + w^{*2} f_{21})}{w^{*2} + f_{21}} \quad (\text{A.61})$$

$$T_{21} = \frac{f_{21} (1 + w^{*2} f_{21})}{w^{*2} + f_{21}} \quad (\text{A.62})$$

$$\rho_{21} = \frac{w^{*2} + f_{21}}{1 + w^{*2} f_{21}} \quad (\text{A.63})$$

式 (A.63) は Rankine-Hugoniot の式として知られている。つぎに衝撃波前後の局所よみ点圧力は式 (A.15), (A.59) および (A.56) より

$$\frac{f_{02}}{p_{01}} = \frac{f_{02}}{f_2} \frac{p_1}{p_{01}} \frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} w_1 \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \times \left(\frac{1 - w_1^2}{w_1^2 - w^{*4}} \right) \frac{1}{\gamma - 1} \quad (\text{A.64})$$

また衝撃波前後のエントロピー変化は

$$(S_2 - S_1) = -R \ln (p_{02}/p_{01}) = 2R \ln w^{*2} - 2c_p \ln w_1 + c_v \ln \frac{w_1^2 - w^{*4}}{1 - w_1^2} \quad (\text{A.65})$$

式 (A.64) および (A.65) は

$$w_1 \geq w^* \text{ で } f_{02}/f_{01} \leq 1, \quad S_2 - S_1 \geq 0$$

$$w_1 < w^* \text{ で } f_{02}/f_{01} > 1, \quad S_2 - S_1 < 0$$

となる。これより、前節で希望したように、衝撃波は、超音速流より亜音速流への“飛び”を与えるものであり、その過程で局所よみ点圧力を減少せしめるものであることがわかる。 $w_1 < w^*$ なる“飛び” (膨脹衝撃波) は存在しえない。

(補遺終り)

参考文献

- (A.1) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Fluid Mechanics, (1954), 310, Addison-Wesley.
- (A.2) Crocco, L., Fundamentals of gas Dynamics, B (1958), 64, Princeton.
- (A.3) Shapiro, A. H., The Dynamics and Thermo-dynamics of Compressible Fluid Flow, (1953), 171, Ronald P.
- (A.4) Liepmann, H.W. and Roshko, A., Elements of Gasdynamics, (1958), 127, John Wiley & Sons.