

琉球大学学術リポジトリ

カップリング状モデルの接合面の機械インピーダンス

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学工学部 公開日: 2013-10-01 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 久米, 靖文, Kume, Yasufumi メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/26601

カップリング状モデルの接合面の機械インピーダンス

久米 靖文*

Mechanical Impedance of Contact Surface in Coupling Model

Yasufumi KUME

SUMMARY

To predict the dynamics of machine tool structures and to accomplish the method of measurement and calculation, the transfer characteristics of coupling model with conical contact surface was analyzed and made an experiment in terms of mechanical impedance method. The principle of mechanical impedance method was reduced from electrical network theory. When this approach was applied to a practical mechanical system, there are little data in reference to this compatibility and usefulness.

In this paper, it is tried to express the mechanical impedance of contact surface by means of mechanical impedance method.

1. カップリング状モデルの挙動と機械インピーダンス法

カップリング状モデルは一要素的な挙動と二要素的な挙動をしていることが確かめられた。矩形波状応答領域では全体すべりを発生していると考えられるので、応答波形を観察すると接合面に明らかに非線形性があると考えられる。

2. 線形摩擦を考えた場合の基礎運動方程式

カップリング状モデルを Fig. 1 に示すような等価振動系を考えると、その運動方程式はつぎのようになる。

$$J_u \ddot{\theta}_1 + c_o (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_o (\theta_1 - \theta_2) = T_o e^{j\omega t} \quad (1)$$

$$J_s \ddot{\theta}_2 + c_i \dot{\theta}_2 - k_o (\theta_1 - \theta_2) + k_i \theta_2 + c_o (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = 0 \quad (2)$$

機械インピーダンス法を適用する場合は系が線形であるという制約をうける。したがって、カップリング状モデル系を解析する場合は入力および接合面を介しての出力が正弦波状になる場合のみに限定した。接合面にすべりを生じていると考えられる場合でも、この系が線形であると考えられる範囲にかぎって機械インピーダンス法を適用した。

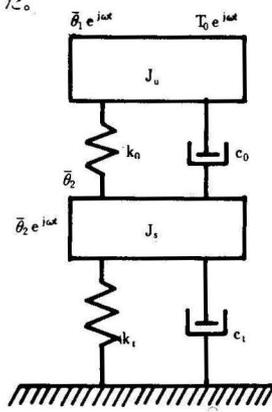


Fig. 1 Vibrational model

受付：1975年4月30日

* 琉球大学理工学部機械工学科

ここで、 c_0 、 k_0 は接合面の特性を表わす集中定数であり、 c_t 、 k_t は下部カップリングの定数である。複素角振幅 $\bar{\theta}_1$ 、 $\bar{\theta}_2$ を用いると、応答は

$$\theta_1 = \bar{\theta}_1 e^{j\omega t}, \quad \theta_2 = \bar{\theta}_2 e^{j\omega t} \quad (3)$$

となる。(3)式を(1)、(2)式に代入すると

$$(-\omega^2 J_u + j\omega c_0 + k_0) \bar{\theta}_1 - (j\omega c_0 + k_0) \bar{\theta}_2 = T_0 \quad (4)$$

$$[-\omega^2 J_u + j\omega(c_t + c_0) + (k_0 + k_t)] \bar{\theta}_2 = (j\omega c_0 + k_0) \bar{\theta}_1 \quad (5)$$

となる。したがって

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1} = \frac{k_0 + j\omega c_0}{[\omega^2 J_s - j\omega(c_t + c_0) - (k_0 + k_t)]} \quad (6)$$

となる。また

$$\frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1} = \sqrt{\frac{k_0^2 + \omega^2 c_0^2}{[\omega^2 J_s - (k_0 + k_t)]^2 + \omega^2 (c_t + c_0)^2}} \quad (7)$$

$$\angle \frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1} = \tan^{-1} \frac{\omega \{c_0 (\omega^2 J_s - k_t) + c_t k_0\}}{\omega^2 \{k_0 J_s - c_0 (c_0 + c_t)\} - k_0 (k_0 + k_t)}$$

となる。

3. インピーダンスとモビリティの定義

機械インピーダンス法に用いられる物理量にはインピーダンスとモビリティがある。一般にこれらの値はいろいろ定義されるが、この報告ではつぎのように定義する。

3.1 駆動点メカニカルインピーダンス 系に作用する駆動力とその結果系に生じる速度との比をメカニカルインピーダンスと定義し、速度が駆動力の作用点で測定される場合、その比を z で表わして駆動点メカニカルインピーダンスと定義する。

$$z = \frac{F}{v} \quad (8)$$

ここで F は作用力であり、 v はその結果、力の方向に生じた速度である。また F 、 v は

$$F = F_0 [\cos \omega t + j \sin \omega t] = F_0 e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$v = v_0 [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] = v_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

である。力と速度は正弦波状であり、 F_0 、 v_0 はその大きさ、 ω は角速度、 ϕ は F と v の間の位相角である。

3.2 伝達メカニカルインピーダンス 駆動力と振動系の別の点(あるいは作用力の方向と異なる方向の他の点)に生じた速度との比もメカニカルインピーダンスとして表わすことができ、それを伝達メカニカルインピーダンスと定義する。

$$z_{12} = \frac{F_1}{v_2} \quad (10)$$

ここで F_1 は系の1の点に作用した力であり、 v_2 はその結果系の2の点に生じた速度である。 F_1 、 v_2 はともに

複素量である。

3.3 メカニカルモビリティ モビリティはインピーダンスの逆数でつぎのように定義される。

$$M = \frac{v}{F} \quad (11)$$

Fとvは(9)式と同様な値である。

4. 理想的な三要素のインピーダンスとモビリティ

理想的な三要素とは減衰、ばね、質量のことであり、機械系の要素をそれぞれ集中定数として理想化している。この三要素によって線形な物理系を構成することができる。まず三要素のメカニカルインピーダンスとメカニカルモビリティを示す。

4.1 減衰 減衰は両端の間の相対速度が作用力に比例するような場合を考え、具体的にはFig. 2のダッシュポットについて考える。

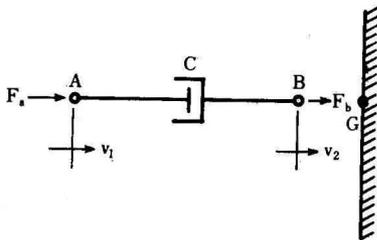


Fig. 2 Ideal mechanical resistance

ダッシュポットについて考える。ダッシュポットの伸縮に低抗して発生する力は粘性摩擦によって生じる。理想的な減衰は質量をもたず、非常に剛体的な要素であると仮定される。Fig. 2で、B点に対するA点の相対速度は

$$v = (v_1 - v_2) = \frac{F_a}{c}$$

である。ここでcは粘性減衰定数とよばれる比例定数である。A点に力が作用した結果、相対速度が生じるので、B点にもそれと等しい反力が発生しなければならない。したがって

$$F_b = F_a$$

となる。(9)式で表わされるA点に作用している力とB点が固定点であることを考えなければ、速度v1は(11)式から

$$v_1 = \frac{F_o e^{j\omega t}}{c} = v_o e^{j\omega t} \quad (13)$$

となる。したがって、(8)、(9)、(13)式よりダッシュポットのメカニカルインピーダンスzcは

$$z_c = \frac{F}{v} = \frac{F_o e^{j\omega t}}{\frac{F_o e^{j\omega t}}{c}} = c \quad (14)$$

となる。(13)式に示すように力と速度は同位相である。

4.2 ばね 線形ばねはその両端の相対変位が作用力に比例する。それをFig. 3に示す。

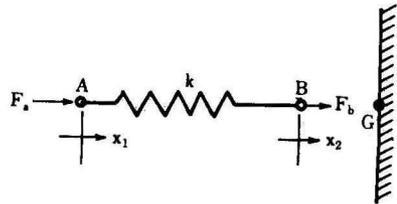


Fig. 3 Ideal spring

数学的にはつぎのように表わすことができる。

$$dx = x_1 - x_2 = \frac{F_a}{k} \quad (15)$$

ここでkはばねの剛性を表わすばね定数であり、x1、x2は基準点Gからの変位である。ばねは作用力をFa = Fbになるように伝達し、(9)式の力をA点に作用させ、B点を固定すれば、A点の変位は式(15)から

$$x_1 = \frac{F_o e^{j\omega t}}{k} = x_o e^{j\omega t} \quad (16)$$

となる。相対速度は

$$v = \dot{x} = \frac{j\omega F_o e^{j\omega t}}{k} = jv_o e^{j\omega t} \quad (17)$$

となり、(9)と(17)式より、ばねのメカニカルインピーダンスは

$$z_k = \frac{F_o e^{j\omega t}}{j\omega F_o e^{j\omega t} / k} = \frac{k_o}{j\omega} = -\frac{jk}{\omega} \quad (18)$$

でありvは

$$v = \frac{F_o}{k} (-\omega \sin\omega t + j\omega \cos\omega t) = \frac{\omega}{k} F_o e^{j(\omega t + 90^\circ)}$$

である。速度は作用力よりつねに90°位相が進んでいる。

4.3 質量 Fig. 4-A に示されるように、理想的な質量は剛体であり、その加速度 \ddot{x} は作用した力 F に比例する。

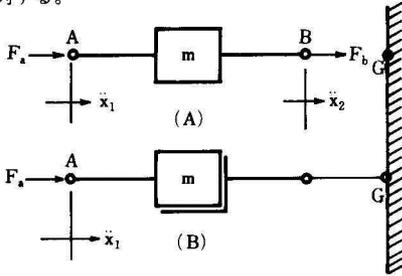


Fig. 4 Ideal mass

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_a}{m} \tag{19}$$

m は要素の質量であり、剛体であることから、 $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ である。Fig. 4-B は質量の一端が慣性基準点に対して剛体的に連結され、他端だけが自由に運動できることを示しており、(9) 式の力が作用すれば、(19) 式は

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_o e^{j\omega t}}{m} \tag{20}$$

となる。(20) 式から加速度も正弦波状で作用力と同位相である事がわかるけれども、速度を知るために積分すれば

$$\dot{x} = v = \frac{F_o e^{j\omega t}}{j\omega m} = -jv_o e^{j\omega t} \tag{21}$$

となる。したがって、質量のメカニカルインピーダンス z_m は

$$z_m = \frac{F_o e^{j\omega t}}{F_o e^{j\omega t} / j\omega m} = j\omega m \tag{22}$$

となる。(21) 式より

$$v = \frac{F_o}{\omega m} e^{j(\omega t - 90^\circ)} \tag{23}$$

となり、質量の速度は作用力より位相が 90° 遅れている。

4.3 三要素のモビリティ (8) 式によって定義したように、モビリティはインピーダンスの逆数であり、それぞれのインピーダンスの式からつぎのように導くことができる。

$$\text{減衰} \quad M_c = 1/c \tag{24}$$

$$\text{ばね} \quad M_k = j\omega/k \tag{25}$$

$$\text{質量} \quad M_m = 1/j\omega m \tag{26}$$

ねじり振動系でも同様に考えることができる。トルクとしては $T = T_o e^{j\omega t}$ 、角変位速度として $\dot{\theta} = \dot{\theta}_o e^{j(\omega t + \phi)}$ を考えれば、 c のかわりに c_t 、 k のかわりに k_t 、 m のかわりに J とすることによってメカニカルインピーダンスとメカニカルモビリティが求まる。ただし、 c_t 、 k_t 、 J はそれぞれねじりの粘性減衰定数、ねじりのばね定数、質量慣性モーメントである。

5. 実験系のインピーダンス表示

5.1 実験モデルと理想的な要素 実験に用いられたカップリング状モデルは Fig. 5 に示されるようなものであり、このモデルの振動源となる励振器も含め

1. 励振器
2. ジョイント
3. 鋼球、てこ、重錘
4. 励振レバー、上部カップリング
5. カップリング接合面
6. 下部カップリング

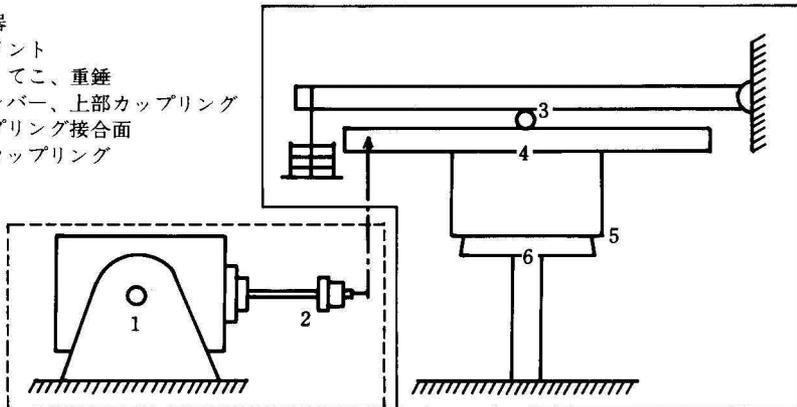


Fig. 5 Outline of experimental system

て、大きくわけて、5個の物理的な要素に分けることができる。接合面も一つの要素として考えると、全体としてこの系は6個の物理的な要素からなると考えられる。実際の要素は理想的な要素とはつぎの点で異なる。

1) ばねは力と変位の関係が非線形である。質量は運動にともなって、弾塑性変形をうける。減衰力で表わされる力は正確には速度に比例しない。

2) すべての物質は質量をもっているので、完全なばねや減衰が存在しない。

3) 高い振動数では物質中の応力波の波長が要素の長さと同じくらいになるので、実際の要素を理想的な要素で置き換えることができない。

以上のことより、系が低振動数で振動している場合（30～200cps）で線形と認められる範囲において、このカップリング状モデルにメカニカルインピーダンス法を適用して解析した。そのために、前述したカップリング状モデルの6個の物理的な要素を理想的な要素で表示した。

5.2 カップリング状モデルのテブナンの等価系表示

Fig. 5 に示された系において、振動源である励振器から発生した正弦波状の力は一部は振動源に残りの力は励振のために導入される。励振力として作用する力はジョイント、インピーダンスヘッドを介して励振レバーを加振し、そこでトルクに変換する。このトルクは鋼球を介して一部は軸荷重に抗するために使用されるが、大部分は上部カップリングと下部カップリングに与えられると考えることができる。このような系での力は流れはジョイント励振レバーの連結点で最も重要になる。この点を境にして系を2個に分けて考えることが解析をより簡単にする。Fig. 5の破線でかこまれた部分はこの系の振動源を表わし、実線でかこまれた部分は負荷部を表わしている。

以上のことからカップリング状モデルの全体系にテブナンの等価系を用い、それぞれの要素を理想的な要素で表わしたものを Fig. 6 に示してある。なお励振器に関してはその内部構造の概略を Fig. 7 に示した。実際にはかなり複雑なために理想的な要素に置きかえる

ⓕ：振動源

c_s, k_s, m_r ：励振器の減衰，ばね定数，質量

c_j, k_j, m_j ：ジョイントの " " "

c_b, k_b, m_b ：鋼球部の " " "

m_u ：上部カップリング部の質量

c_o, k_o ：カップリング接合部の減衰，ばね定数

c_t, k_t, m_s ：下部カップリングの減衰，ばね定数，質量

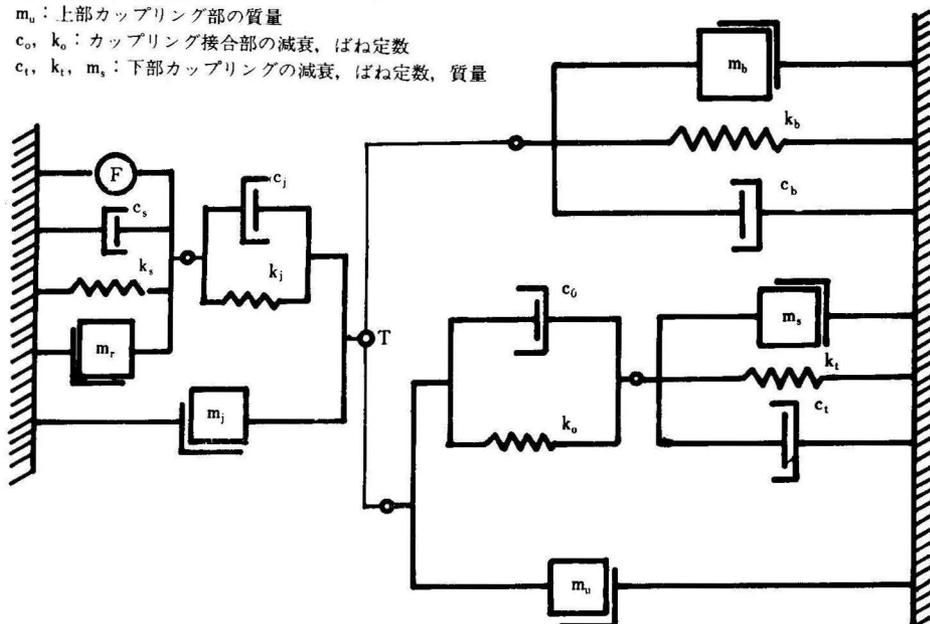


Fig. 6 Thevenin equivalent system representation of experimental system

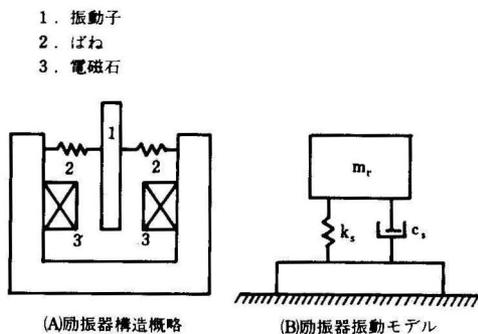


Fig. 7 Structural outline of electrodynamic exciter

ことが困難であるが、 c_s 、 k_s 、 m_r の集中定数で代用して表示した。また鋼球、てこ、重錘の作る系も完全に表示する事は困難であるので、 c_b 、 k_b 、 m_b の定数を用いて表示した。

6. 等価表示インピーダンスの計算

Fig. 6 に示した等価系の2要素等価表示インピーダンスを求めるために、Fig. 6 を Fig. 8 のごとく振動源部と負荷部にかけて、それぞれの場合のインピーダンスを求めた。

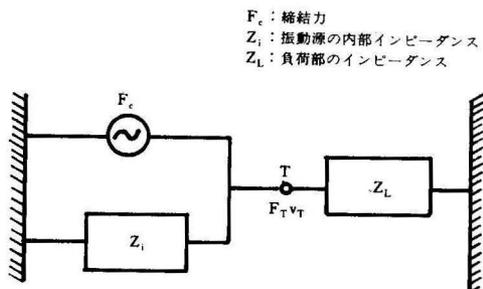


Fig. 8 Equivalent system representation of model connected to load

6.1 振動源部の内部インピーダンス ここで述べている振動源はジョイントも含めた振動源部のことを言う。したがって内部インピーダンスは振動源部の内部インピーダンスである。Fig. 6 において励振器のインピーダンス z_r は

$$z_r = c_s + j(\omega m_r - k_s/\omega) \tag{27}$$

である。ジョイントの c_j 、 k_j によるインピーダンス z_{j1} は

$$z_{j1} = c_j - jk_j/\omega \tag{28}$$

となり、ジョイントの質量 m_j によるインピーダンス z_{j2} は

$$z_{j2} = j\omega m_j \tag{29}$$

となる。 z_r と z_{j1} は直列に連結されているので (27) 式と (28) 式よりこれらの要素のモビリティ M_s は

$$M_s = R(M) + jI(M) \tag{30}$$

となり、ただし

$$R(M) = \frac{c_s}{c_s^2 + (\omega m_r - k_s/\omega)^2} + \frac{c_j}{c_j^2 + (k_j/\omega)^2}$$

$$I(M) = \frac{(\omega m_r - k_s/\omega)}{c_s^2 + (\omega m_r - k_s/\omega)^2} - \frac{k_j/\omega}{c_j^2 + (k_j/\omega)^2} \tag{31}$$

である。(30) 式をインピーダンスで表わし、 z_{rj} とすると、

$$z_{rj} = \frac{R(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + j \frac{I(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} \tag{32}$$

となる。(32) 式と (29) 式から、内部インピーダンス z_i は

$$z_i = \frac{R(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + j \left\{ \frac{I(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + \omega m_j \right\} \tag{33}$$

となる。

6.2 負荷部のインピーダンス 下部カップリングのインピーダンス z_s は

$$z_s = c_t + j(\omega m_s - k_t/\omega) \tag{34}$$

となり、カップリング接合部のインピーダンス z_x は

$$z_x = c_o - jk_o/\omega \tag{35}$$

となる。上部カップリングの質量のインピーダンス z_m は

$$z_m = j \omega m_u \tag{36}$$

となる。鋼球部のインピーダンス z_b は

$$z_b = c_b + j (\omega m_b - k_b / \omega)$$

となるので、負荷部のインピーダンス z_L を上式より求めると

$$z_L = \left\{ \frac{R(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + c_b \right\} - j \left\{ \frac{I(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + \omega(m_b + m_u) - \frac{k_b}{\omega} \right\} \tag{37}$$

となる。ここで

$$R(M) = \frac{c_o}{c_o^2 + (k_o/\omega)^2} + \frac{c_t}{c_t^2 + (\omega m_s - k_t/\omega)^2}$$

$$I(M) = \frac{(\omega m_o - k_t/\omega)}{c_t^2 + (\omega m_s - k_t/\omega)^2} - \frac{k_o/\omega}{c_o^2 + (k_o/\omega)^2} \tag{38}$$

である。

7. 接合面のインピーダンス

7.1 負荷部と接合面のインピーダンス インピーダンス法を用いてカップリング状のモデルを解析し、接合面の特性を調べる。そのために、接合面を要素として考えたもののインピーダンスを計算する。Fig. 6 に示したように、接合部は c_o, k_o なる定数で表わした。そして、Fig. 8 の負荷部に含まれている。負荷部の各要素のインピーダンスは接合面のインピーダンスも含めて、インピーダンス計算のための集中定数の評価が困難であるため、直接解析はむずかしい。この報告においては負荷部のインピーダンスを実験によって求め、この値から負荷部の各要素のインピーダンスを差し引いて接合部のインピーダンスを求めた。

6.3 負荷部の駆動点インピーダンス Fig. 8 に示されたテブナンの等価系において、負荷部を取付けたために連結点Tに速度 v_T が発生する。連結点をクランプしたときに発生する力を F_c とすれば次式が成立する。

$$F_c = (z_i + z_L) v_T \tag{39}$$

連結点Tで検出される力すなわち負荷部に導入される力 F_T は F_c が負荷部と内部インピーダンス部に分けられることから

$$F_T = \frac{F_c z_L}{z_v + z_L} \tag{40}$$

になる。また負荷部の駆動点インピーダンスは

$$z_L = v_T / F_T \tag{41}$$

である。

7.3 接合部のインピーダンス 前述したように、負荷部に導入された力は連結点Tでトルクに変換されるので、Fig. 1 に示したねじり振動系として考えなければならない。Fig. 9 は接合面のインピーダンスを計算するため、各要素をインピーダンスで表示したもの

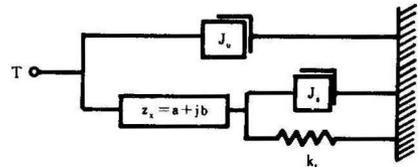


Fig. 9 Elements in load

である。この場合、Fig. 6 の下部カップリングの減衰定数 c_t は内部減衰であるので、小さいと考えて無視する。慣性モーメント J_s とねじりばね定数 k_t で代表する。また励振レバーと上部カップリングは一体と考え、質量慣性モーメントを J_u とする。未知の接合部のインピーダンスを複素量 $a + jb$ で表わす。さらに鋼球部に導入される力は小さいとしてこの部分のインピーダンスは評価しない。

Fig. 9 において、下部カップリングのインピーダンスを z_s 、上部カップリングのインピーダンスを z_u 、接合部インピーダンスを z_x とすると

$$z_s = j (\omega J_s - k_t / \omega) \tag{42}$$

$$z_x = a + jb \tag{43}$$

$$z_u = j \omega J_u \tag{44}$$

となる。接合面と下部カップリングによるモビリティ
Mは

$$M = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \left\{ \frac{1}{(\omega J_s - k_t / \omega)} + \frac{b}{a^2 + b^2} \right\} \quad (45)$$

となる。ここで

$$R(M) = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$I(M) = \frac{1}{\omega J_s - k_t / \omega} + \frac{b}{a^2 + b^2}$$

とすると

$$z = \frac{R(M) + jI(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} \quad (46)$$

となる。したがって負荷部のインピーダンス z_L は

$$z = \frac{R(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + j \left\{ \frac{I(M)}{R(M)^2 + I(M)^2} + \omega J_u \right\} \quad (47)$$

である。ここで実験によって得られる負荷部の駆動点インピーダンス z_L の絶対値を励振レバ一加振点を中心から半径 $r = 250\text{mm}$ であることを考慮してねじり振動系に変換し、そのインピーダンスを $|z_L| \times 625 = |z_L^*|$ とおき、同時に読みとった位相角を θ とすれば、 z_L^* の実部 $R(z_L^*)$ 、虚部 $I(z_L^*)$ は

$$R(z_L^*) = |z_L^*| \cos \theta$$

$$I(z_L^*) = |z_L^*| \sin \theta \quad (48)$$

となる。さらに $\omega J_s - k_t / \omega = \alpha$ 、 $a^2 + b^2 = \beta$ とおくと (47)、(48) から

$$R(z_L^*) = \frac{\alpha^2 a}{\alpha^2 + \beta + 2\alpha b} \quad (49)$$

$$I(z_L^*) - \omega J_u = \frac{\alpha(\beta + \alpha b)}{\alpha^2 + \beta + 2\alpha b} \quad (50)$$

となる。ここで $\beta + \alpha b = Q$ とすると

$$R(z_L^*) = \frac{\alpha^2 a}{\alpha^2 + Q + 2\alpha b} \quad (51)$$

$$I(z_L^*) - \omega J_u = \frac{\alpha(\beta + \alpha b)}{\alpha^2 + \beta + 2\alpha b} = \frac{\alpha Q}{\alpha^2 + Q + 2\alpha b} \quad (52)$$

となる。(51) 式から Q を求めて、(52) 式に代入すれば

$$(I(z_L^*) - \omega J_u - \alpha) a = -R(z_L^*)(\alpha + b) \quad (53)$$

となり、(53) と (51) 式から b に関する 2 次方程式が得られる。この式において $I(z_L^*) - \omega J_u - \alpha = A$ 、 $C = A^2 + R^2(z_L^*)$ とおけば

$$Cb^2 + \alpha(2C + A\alpha)b + \alpha^2(C + A\alpha) = 0 \quad (54)$$

となる。この式より 2 根が求まり、 a 、 b 、位相角が決定される。

$$a = 0, \quad b = -\alpha$$

$$a = \alpha^2 R/C, \quad b = -\alpha(C + A\alpha)/C \quad (55)$$

$a = 0$ 、 $b = -\alpha$ は位相がねに $\theta = \tan^{-1} \infty$ となり、系の減衰がまったくないことから解として不適当であるので、接合部のインピーダンス $|z_x|$ と位相角 θ_x は

$$|z_x| = \frac{|\alpha|}{C} \sqrt{C(\alpha^2 + 2A\alpha + C)} \quad (56)$$

$$\theta_x = \tan^{-1} \left(-\frac{C + A\alpha}{\alpha R} \right) \quad (57)$$

となる。ただし、 $\alpha = \omega J_s - k_t / \omega$ 、 $A = I(z_L^*) - \omega(J_u + J_s) + k_t / \omega$ 、 $C = A^2 + R(z_L^*)^2$ 、 $R(z_L^*) = |z_L^*| \cos \theta$ 、 $I(z_L^*) = |z_L^*| \sin \theta$ である。(56)、(57) 式より負荷部の駆動点インピーダンスと位相角が実験で求めれば、接合部のインピーダンス、位相角が評価できる。

8. 系のパラメータ表示

8.1 インピーダンスパラメータ これまでのカップリング状モデル系の要素は集中定数を用いて等価系表示をして解析を行なったが、別の手法として要素を慣性基準点にとりつけられ、入力および出力連結点をもつ Fig. 10 のようなブラックボックスによって 2 連結点の受動的な系で表わす。それらの要素を連結して系を誘導し解析することができる。

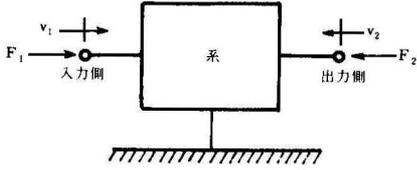


Fig. 10 Black box system representation of two connection mechanical system

系の要素が線形で、力がその連結点を通してどちらの方向からも十分に等しく伝達され、励振器がその連結点に取付けられている場合、速度と力の関係は

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

となる。ここでインピーダンスパラメータ z_{ij} はつぎのように定義される。 z_{11} は出力端を剛体に連結した場合 ($v_2 = 0$) の入力インピーダンスで

$$z_{11} = \left. \frac{F_1}{v_1} \right|_{v_2 = 0} \quad (59)$$

となる。 z_{22} は入力端がクランプされた場合の出力インピーダンスで

$$z_{22} = \left. \frac{F_2}{v_2} \right|_{v_1 = 0} \quad (60)$$

である。 z_{12} は入力端がクランプされ、力 F_1 によって入力端速度が $v_1 = 0$ に維持された場合のリバース伝達インピーダンスで

$$z_{12} = \left. \frac{F_1}{v_2} \right|_{v_1 = 0} \quad (61)$$

となる。 z_{21} は出力端がクランプされ、 F_2 によって $v_2 = 0$ に維持されている場合のフォワード伝達インピーダンスで

$$z_{21} = \left. \frac{F_2}{v_1} \right|_{v_2 = 0} \quad (62)$$

である。

以上のようにインピーダンスパラメータでカップリング状モデル系の負荷部の各要素のインピーダンスを実験的に決定、それらを合成すれば最終的には角荷部の系をインピーダンスパラメータで表示できる。

8.2 4極パラメータ Fig. 10 で表わされるブラックボックスの特性は入力、出力、速度の関係を違った形で表わすことができ、4 極パラメータ α_{ij} を導入して表示する。

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

ここで α_{ij} はつぎの式で定義される。

$$\alpha_{11} = \left. \frac{F_1}{F_2} \right|_{v_2 = 0} \quad (64)$$

$$\alpha_{12} = \left. \frac{F_1}{v_2} \right|_{F_2 = 0} \quad (65)$$

$$\alpha_{21} = \left. \frac{v_1}{F_2} \right|_{v_2 = 0} \quad (66)$$

$$\alpha_{22} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{F_2 = 0} \quad (67)$$

8.3 両パラメータの関係 (58) 式より

$$F_1 = z_{11} v_1 + z_{12} v_2 \quad (68)$$

$$F_2 = z_{21} v_1 + z_{22} v_2 \quad (69)$$

となる。(58)式より

$$F_1 = \alpha_{11} F_2 + \alpha_{12} v_2 \quad (70)$$

$$v_1 = \alpha_{21} F_2 + \alpha_{22} v_2 \quad (71)$$

となる。(68)、(69) 式より

$$v_1 = \frac{1}{z_{21}} F_2 - \frac{z_{22}}{z_{21}} v_2$$

$$F_1 = \frac{z_{11}}{z_{21}} F_2 + \left(z_{12} - \frac{z_{11} z_{22}}{z_{21}} \right) v_2$$

となる。この2式と(65)、(66)を比較すれば両パラメータの関係が得られ

$$\alpha_{11} = z_{11} / z_{21} \quad (72)$$

$$\alpha_{12} = z_{12} - z_{11} z_{22} / z_{21} \quad (73)$$

$$\alpha_{21} = 1 / z_{21} \quad (74)$$

$$\alpha_{22} = -z_{22} / z_{21} \quad (75)$$

となる。

8.4 ジョイントのパラメータ表示 Fig. 11の(A)に表わしたジョイントのインピーダンスは実験でインピーダンスパラメータとして表わすことができる。

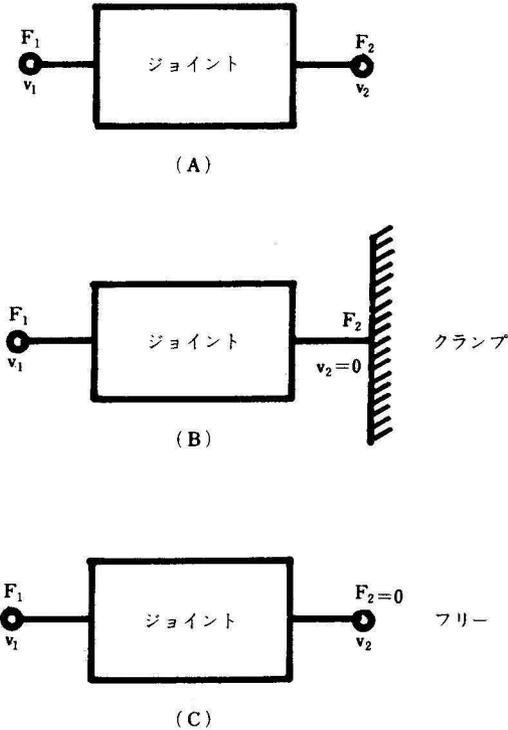


Fig. 11 Impedance parameters of joint

Fig. 11の(B)のように出力端をクランプすれば、(68)式において

$$v_2 = 0, \quad z_{11} = F_1/v_2 \quad (76)$$

となる。また相反性が成り立つとすれば (69) 式より

$$z_{21} = F_2/v_1 = z_{12} \quad (77)$$

となる。つぎに Fig. 11の(C)に示すように出力端をフリーにして実験を行えば $F_2 = 0$ であるので、(69) 式より

$$z_{22} = -z_{21} v_1/v_2 \quad (78)$$

となる。このようにして F_1, v_1, F_2 を、またフリーの実験より v_1/v_2 を求めるとジョイントのインピーダンスパラメータは

$$\begin{bmatrix} F_1/v_1 & F_2/v_2 \\ F_2/v_1 & -z_{21} v_1/v_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

となる。4極パラメータは (71) 式～(75) 式を用いて容易に計算できる。

8.5 負荷部の4極パラメータ表示 ジョイントのパラメータを求めたようにして、各要素の4極パラメータを実験で求める。そしてそれらを合成して、角荷部の4極パラメータを求めるのであるが、実際には非常に困難である。ここでは Fig. 6の負荷部の集中定数を用い、求めた。

Fig. 6において鋼球部の4極パラメータ表示は

$$\begin{bmatrix} 3 & 6A + j(\omega m_b - 6B) \\ A - jB & 3 \end{bmatrix} \quad (80)$$

であり、ここで

$$A = \frac{k_b^2 c_b}{k_b^2 + \omega^2 c_b^2}, \quad B = \frac{\omega k_b c_b^2}{k_b^2 + \omega^2 c_b^2} \quad (81)$$

である。下部カップリング部の4極パラメータ表示は

$$\begin{bmatrix} 3 & 6C + j(\omega m_t - 6D) \\ C - jD & 3 \end{bmatrix} \quad (82)$$

になる。ここで

$$C = \frac{k_t^2 c_t}{k_t^2 + \omega^2 c_t^2}, \quad D = \frac{\omega k_t c_t^2}{k_t^2 + \omega^2 c_t^2} \quad (83)$$

である。つぎに接合部の4極パラメータ表示は

$$\begin{bmatrix} 2 & 2(E - jF) \\ E - jF & 2 \end{bmatrix} \quad (84)$$

で、

$$E = \frac{k_o^2 c_o}{k_o^2 + \omega^2 c_o^2}, \quad F = \frac{\omega k_o c_o^2}{k_o^2 + \omega^2 c_o^2} \quad (85)$$

である。上部カップリング部の4極パラメータ表示は

$$\begin{bmatrix} 1 & j\omega m_u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{86}$$

となる。接合部と下部カップリングが直列に結合していることから、これらの4極パラメータ表示は(82)、(84)式から

$$\begin{bmatrix} \{2(CE-DF)+6\} - j2(CF-DE) & 6(2C+E) + j\{2(\omega m_s - 6D) - 6F\} \\ 2C+3E-j(2D+3F) & 6(CE-DF+1) + j\{E(\omega m_s - 6D) - 6CF\} \end{bmatrix} \tag{87}$$

となる。鋼球部、接合部および下部カップリング部、上部カップリング部が並列に結合しているの、負荷部の4極パラメータ表示は(80)、(86)、(87)より

$$\begin{bmatrix} I-jJ & \left(K + \frac{MP-NQ}{M^2+N^2}\right) + j\left(L + \frac{NP+MQ}{M^2+N^2}\right) \\ M-jN & R+jS \end{bmatrix} \tag{88}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} I &= 2(CE-DF+5), & J &= 2(CF-DE) \\ K &= 6(A+2C+E), & L &= \omega(m_b + 2m_s + m_u) - 6(B+2D+F) \\ P &= \{3+6(CE-DF+1)\} \{2(CE-DF)+9\} + 2(CF-DE)\{\omega Em_s - 6(CF+DE)\} \\ Q &= \{\omega Em_s - 6(CF+DE)\} \{2(CE-DF)+9\} + 2(CF-DE)\{3+6(CE-DF+1)\} \\ M &= A+2C+3E, & N &= B+2D+3F \\ R &= 2(3CE-3DF+5), & S &= \omega Em_s - 6(CF+DE) \\ A &= \frac{k_b^2 c_b}{k_b^2 + \omega^2 c_b^2}, & B &= \frac{\omega k_b c_b^2}{k_b^2 + \omega^2 c_b^2} \\ C &= \frac{k_t^2 c_t}{k_t^2 + \omega^2 c_t^2}, & D &= \frac{\omega k_t c_t^2}{k_t^2 + \omega^2 c_t^2} \\ E &= \frac{k_o^2 c_o}{k_o^2 + \omega^2 c_o^2}, & F &= \frac{\omega k_o c_o^2}{k_o^2 + \omega^2 c_o^2} \end{aligned} \tag{89}$$

である。

9. 実験装置および方法

9.1 実験装置 実験装置はFig. 12に示すように軟鋼で作られた円錐接合面をもつ上部カップリング、下部カップリング、上部カップリングにボルト(M10)6本で結合された励振レバー、そして励振レバー中心より250mmの位置に励振のため取付けられるジョイントおよびクラップ実験用バイスである。Fig. 13に両カップリング組立て状態をFig. 14にジョイントとクラップ用バイスを示す。接合面は#600ラップ剤で仕上げてある。

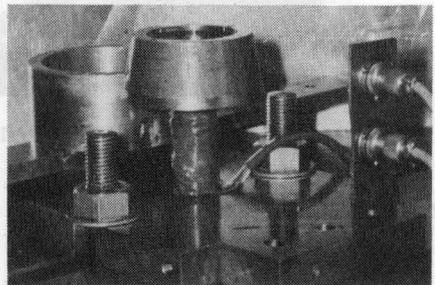


Fig. 12 Coupling model

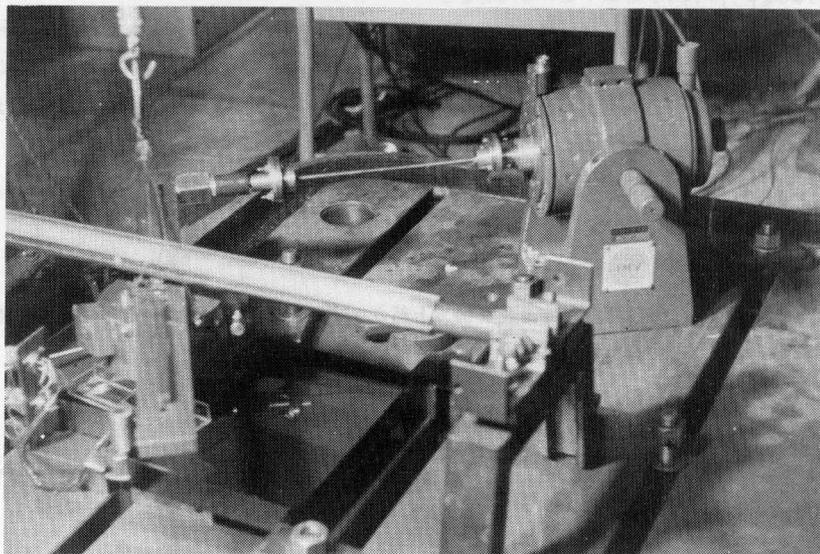


Fig. 13 Experimental apparatus

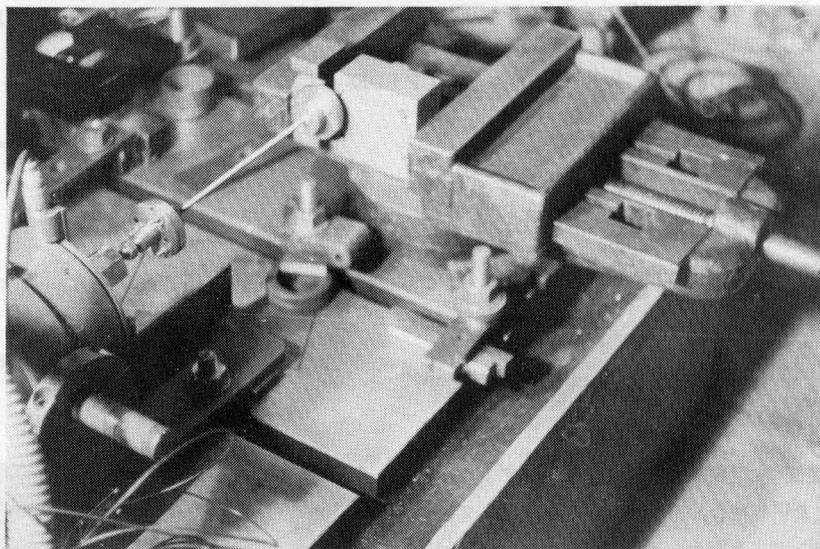


Fig. 14 Joint and vice

9.2 実験方法 インピーダンス法を適用するにあたって、系の線形性を調べる実験を予備実験として行い、本実験としてはインピーダンスを求めるための一連のタイプの実験を行った。

本実験としていくつかのタイプの実験を行ったが、インピーダンスを求めるための実験を代表させ、以下その実験方法を示す。

実験系の運動 Fig. 15の実験測定系に示されるよ
 に発振器より発振された正弦波を増幅器を通じて励振
 器に導びき、力に変換して直線往復運動に換える。こ
 の運動にジョイントを挿入することで、より理想的な
 振動を得るように配慮している。励振レバーの中心（カ
 ップリング軸中心）から250mm離れた点に運動を伝え、

ここで励振レバーおよび上部カップリングを一体とし
 ての回転運動にかえる。上部カップリングに導入され
 た回転往復運動は接合面を介して下部カップリングに
 導入され、下部カップリングの中空を含めてねじり振
 動に変換される。

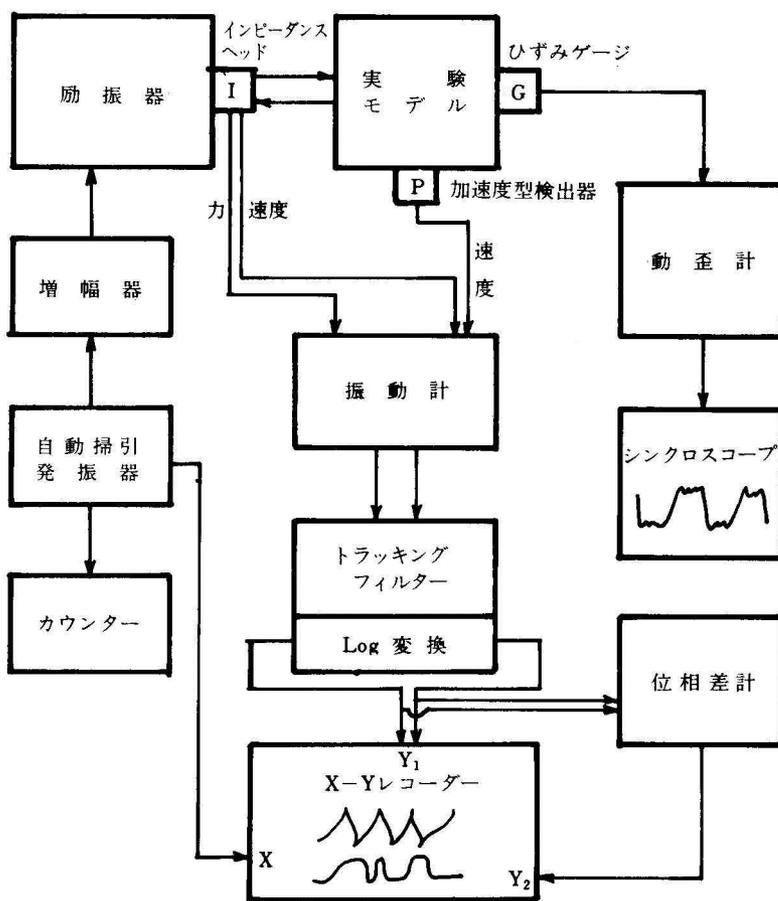


Fig. 15 Block diagram of experimental system

伝達特性の検出および解析 系に導入される力および速度はジョイント先端（振動源部、負荷部連結点）に取付けられたインピーダンスヘッドと上部カップリングに軸対称に取付けられた2個の加速度検出器により検出する。インピーダンスヘッドの力出力端子より力を、加速度出力端子より速度を検出して振動計に導入し、力、速度を読み取りさらにトラッキングフィルターを通してデシベル値、位相を読んだ。さらにX-Yレコーダーでメカニカルインピーダンスおよび位相を描かせた。速度だけを求める場合やモードを調べる実験においては加速度型検出器を用いて検出した。加速度型検出器は加速度計取付け台の上、軸中心より76mmのところ貼付け、振動方向と直角になるように工夫した。

軸荷重 負荷部のメカニカル駆動点インピーダンスを求める一連のタイプの実験においては、カップリング接合面圧を変化させるため、鋼球（1/2"）を介し、てこを用いて2~32kgの軸荷重をかけた。軸荷重はてこ先端に重錘をつるして与え、てこ比を2:1にとって重錘の2倍とした。また上部カップリングはばねばかりによってつられており、あらかじめ2kgの軸荷重が与えられている。

接合面の潤滑 潤滑油として、粘度がSWARUBE RO 400 とほぼ同じの油を用い、この油を上部カップリングの一方の穴より注入し、他方の穴から、あふれできるようにした。油を注入せず、接合面をアセトンでふき、乾燥状態でも実験を行った。

短形波の観察 線形性を調べるための実験およびカップリング接合部のインピーダンス計算をするため、負荷部の駆動点インピーダンスを求める実験を行なった。線形性を考慮するため下部カップリング中空軸に貼付けられたひずみゲージを用い、その出力を動ひずみ計を通してシンクロスコープに導き波形を観察した。これによって短形波が発生しない範囲の出力で実験を行った。

クランプおよびフリー 出力端をクランプして実験を行なう場合、インピーダンスヘッドの先端にアタッチメントをとりつけ、バイスでアタッチメントをクラ

ンプして測定した。出力端をフリーにして実験を行う場合は先端にアタッチメントを取付け、定盤の上に潤滑油 SWARUBE RO 150 を流してその上でアタッチメントをすべらせるか、先端を糸でつるして測定を行った。

線形性を調べるための実験 この実験のブロック線図を Fig. 15 に示した。軸荷重は2、6、10、14、16、20、24kgのものに対して行い、30~200cpsの各周波数に対してインピーダンス一定となる力の範囲をプロットした。同時にシンクロスコープを観察しながら、短形波が発生しない出力に保った。

負荷部の駆動点インピーダンスの測定 負荷部の駆動点インピーダンスはいろいろの型の実験を行って求めた。

実験モデルのモード 軸荷重20kgの場合に、モデルの励振レバーを負荷部の共振振動数（62、73cps）で加振し、モデルの各位置の変位を加速度型検出器で検出した。またひずみゲージにより検出した変位をシンクロスコープに通し、この出力と加速度型検出器より得た応答を伝達特性測定装置に入力として導びき、その比をとる。位相差計からは位相を、またデシベル計からデシベルをさらにX-Yレコーダーにてその絶対値の比をプロットして読んだ。

10. 実験結果および考察

10.1 実験結果

系の線形性 インピーダンスが一定となる力の範囲軸荷重10、16、20kg（接合面インピーダンス計算のためのデータ）についてのみ Fig. 16~ Fig. 18 に示した。グラフには力の範囲だけでなく、一定となるインピーダンスの絶対値も示した。100cpsで線形な力の範囲に入るような出力でボード線図を描かせた場合だけでなく、同じ力の範囲では他の振動数に対しても力が線形な範囲に入ることがわかった。しかし共振振動数付近ではインピーダンスが一定となる力の範囲が求まらなかった。

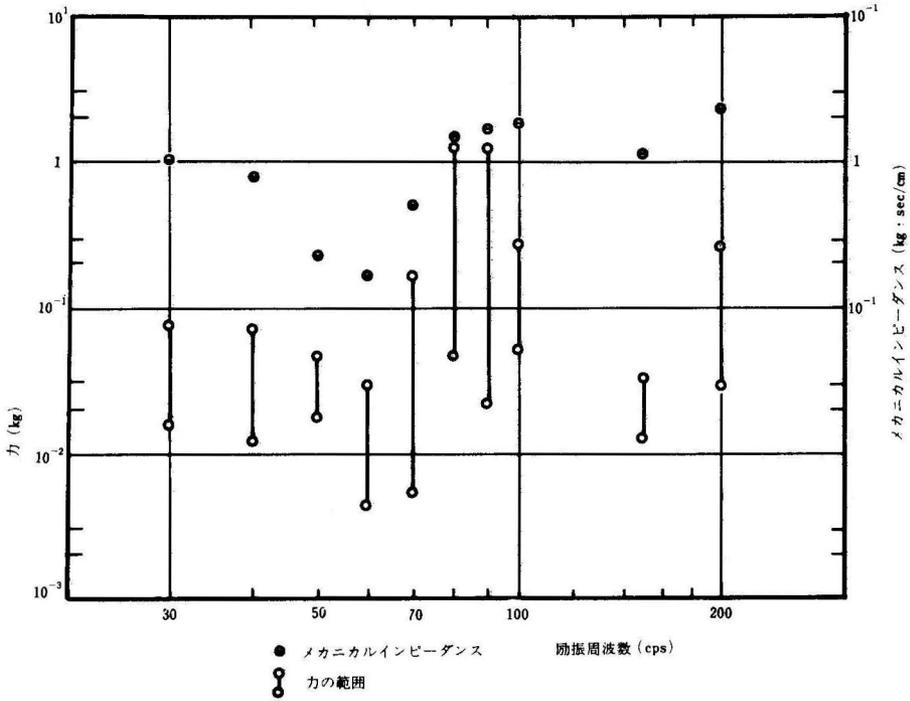


Fig. 16 Limit force to linear system (axial load 10kg)

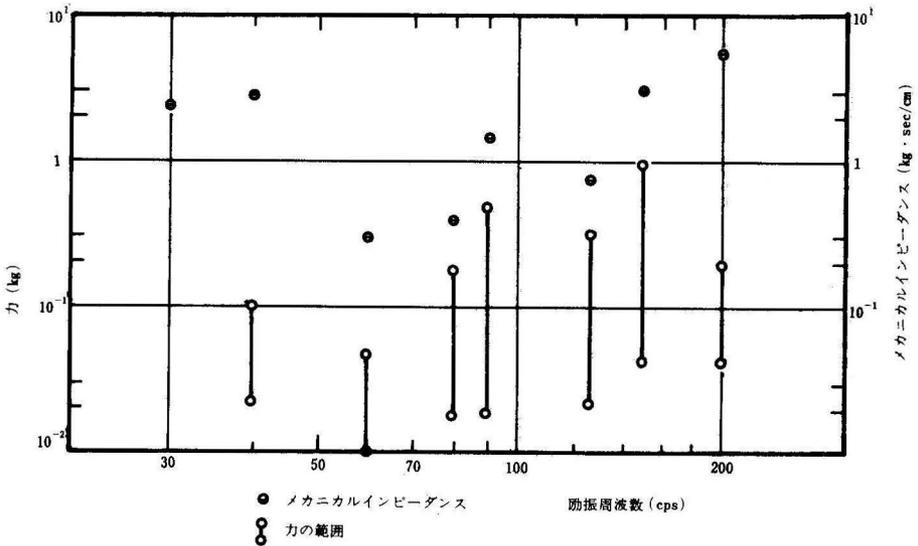


Fig. 17 Limit force to linear system (axial load 16kg)

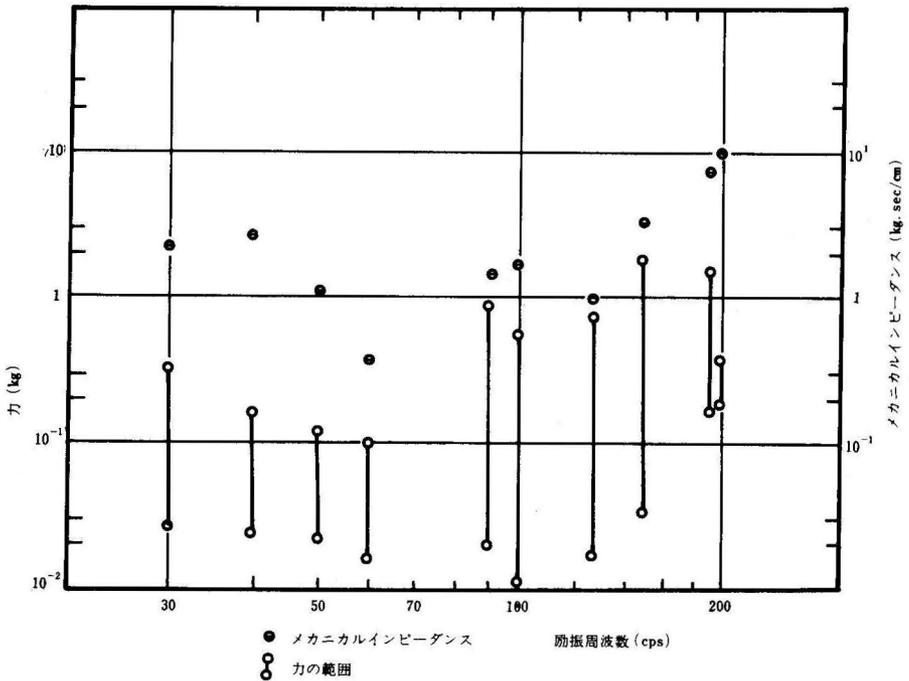


Fig. 18 Limit force to linear system (axial load 20 kg)

代表的なボード線図 いくつかの実験タイプについて Fig. 19～Fig. 27 に示した。
てその代表的なボード線図ならびに free velocity を

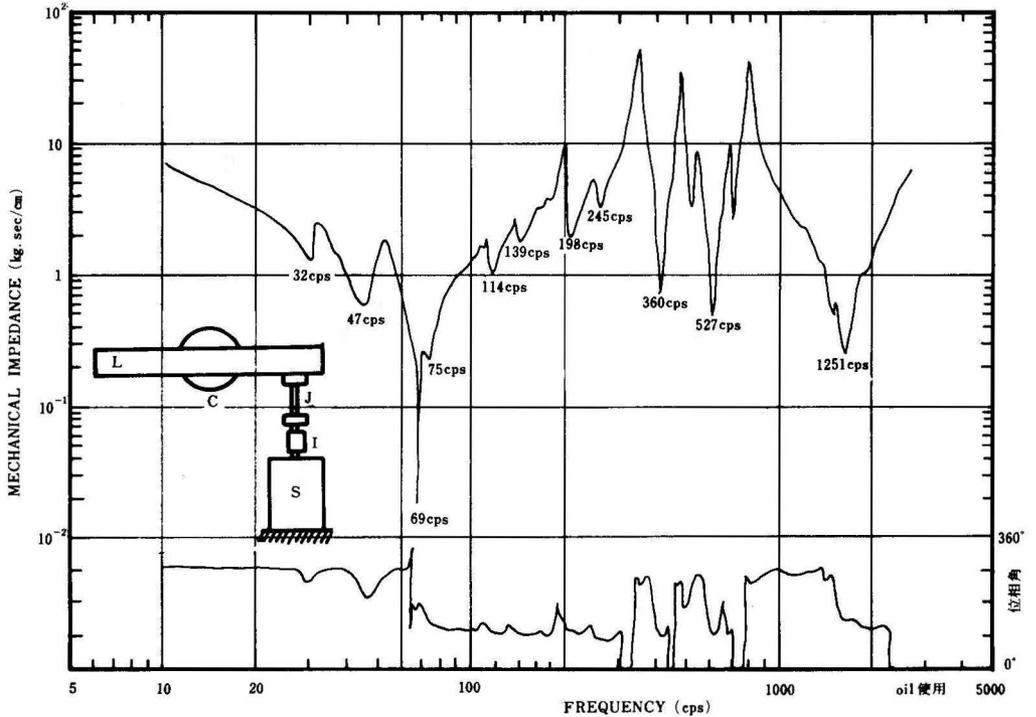


Fig. 19 Driving point impedance of load (Type O, axial load 20 kg)

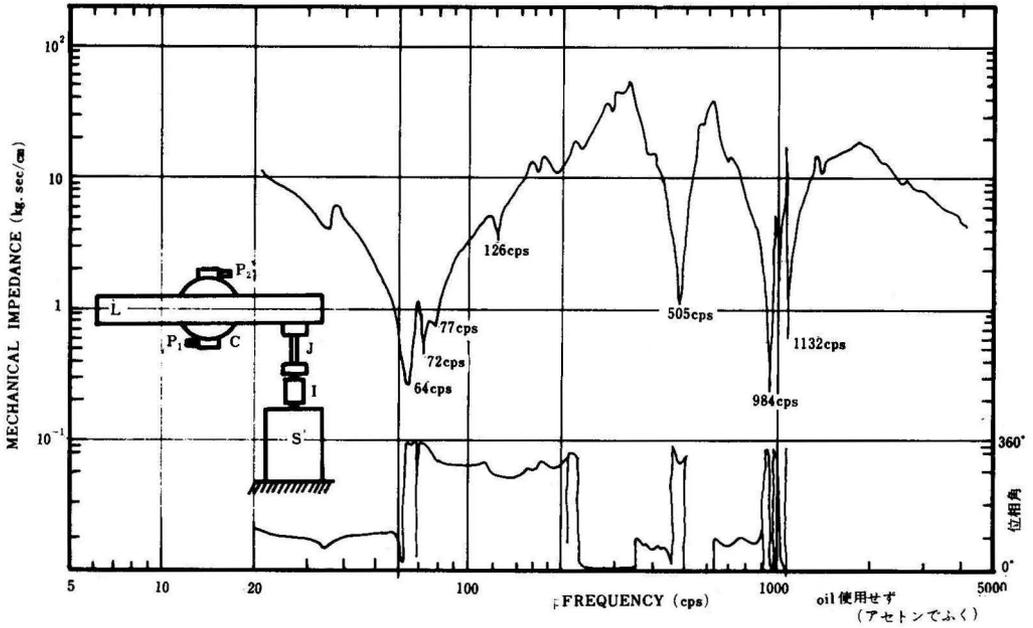


Fig. 20 Driving point impedance of load (Type Ga, axial load 8 kg)

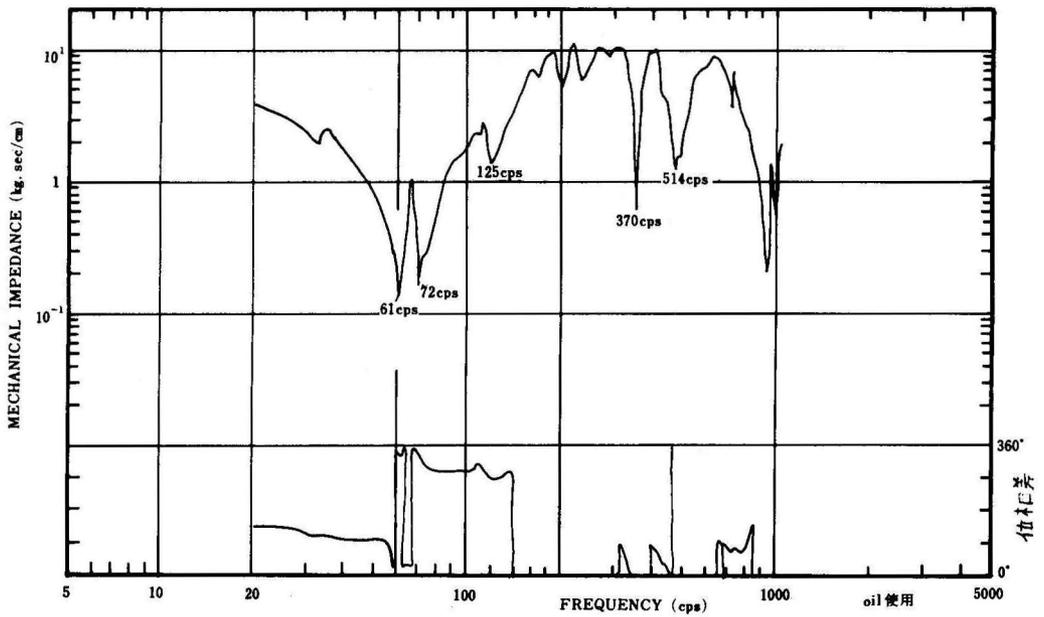
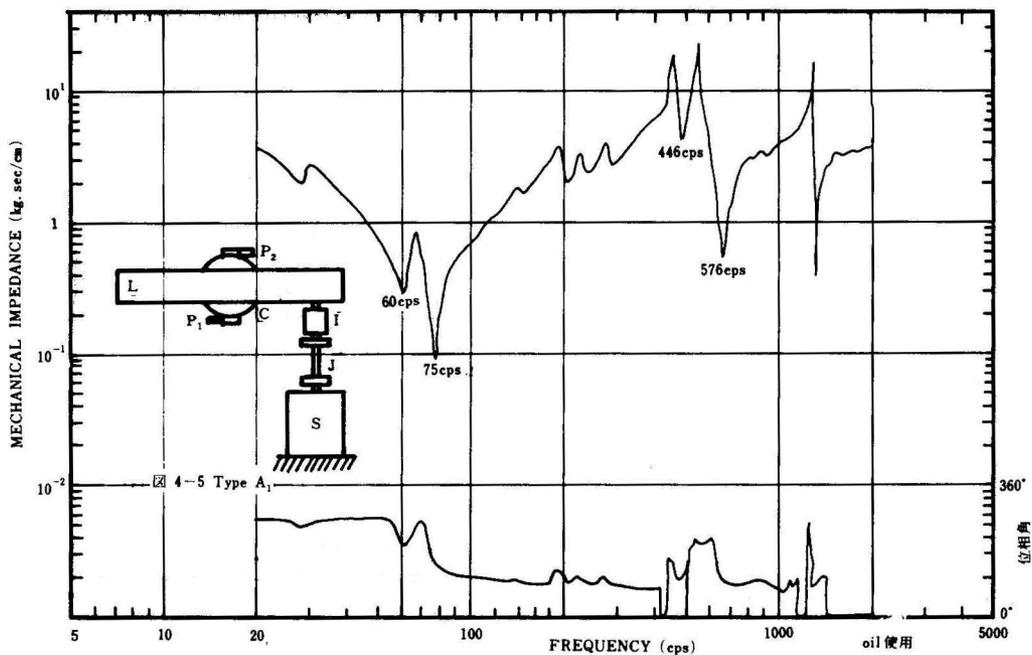
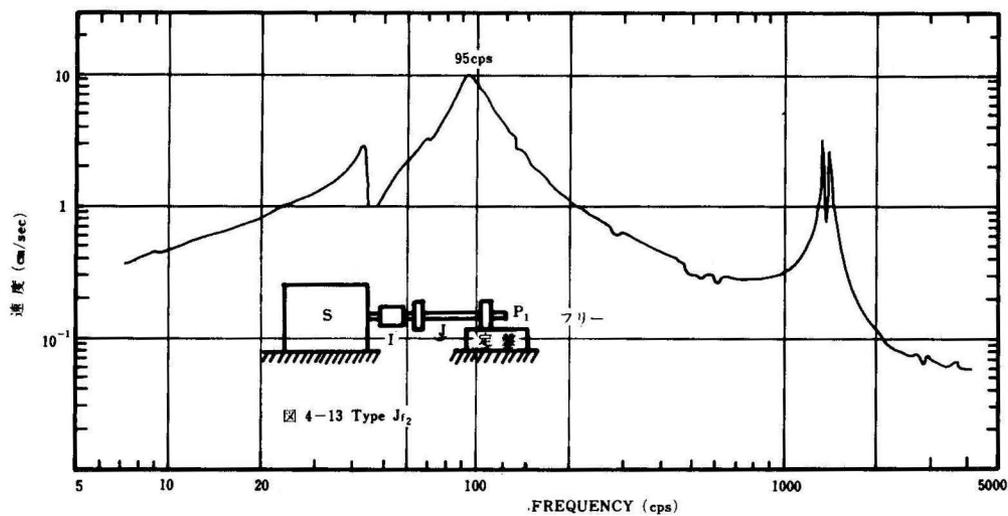


Fig. 21 Driving point impedance of load (Type Os, axial load 9 kg)

Fig. 22 Driving point impedance of load (Type A₁, axial load 12kg)Fig. 23 Free velocity (Type J₁₂)

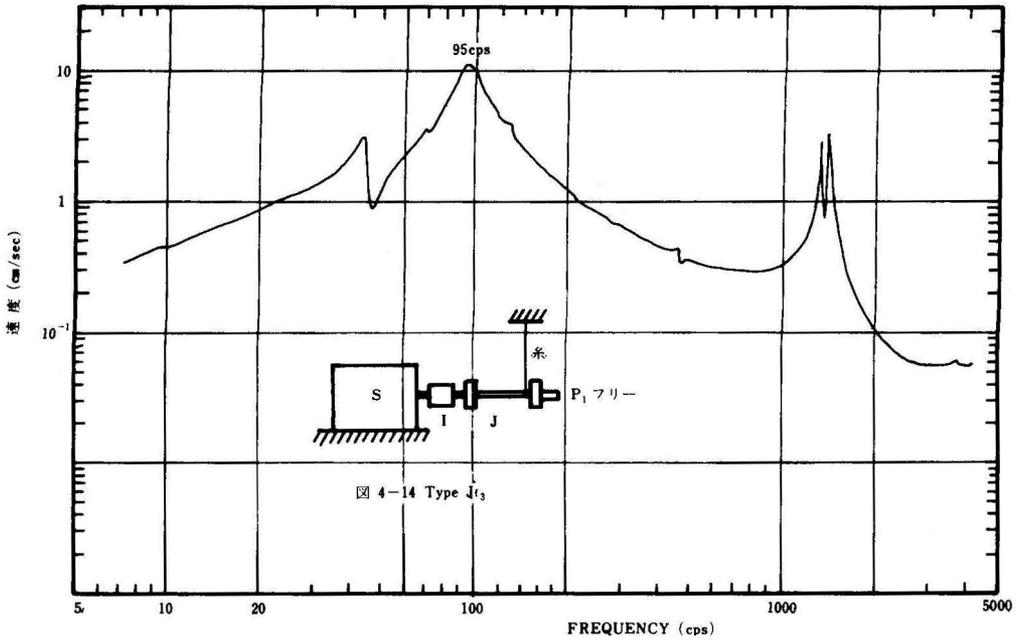


Fig. 24 Free velocity (Type J_{t3})

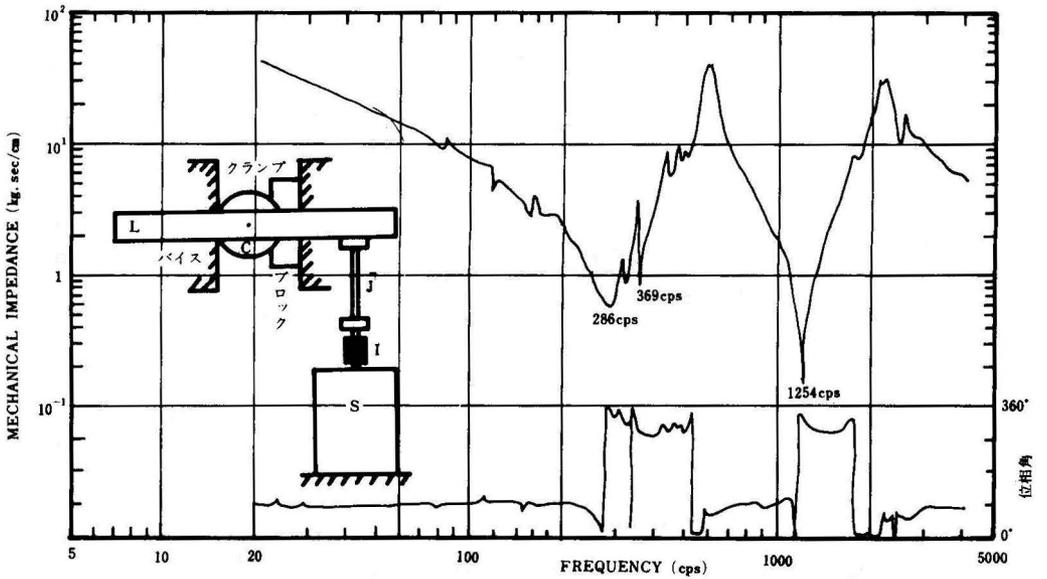
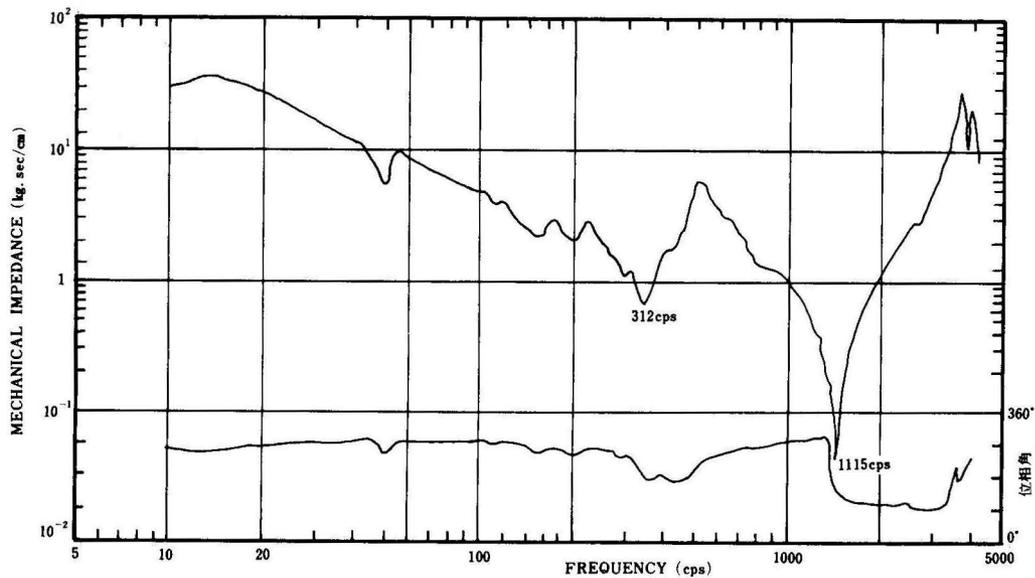
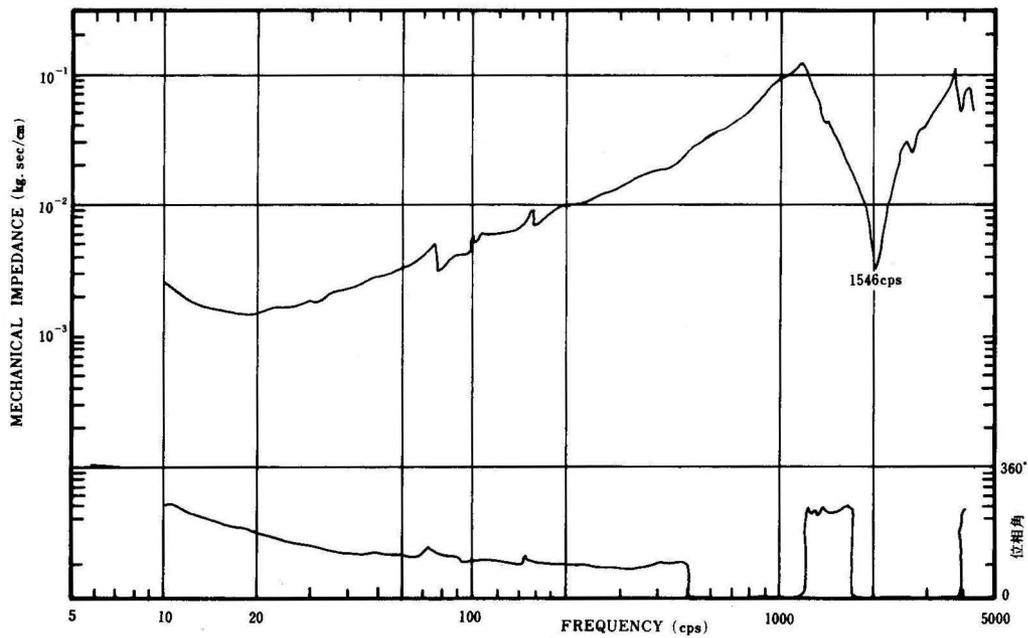


Fig. 25 Driving point impedance of exciting lever (Type f)

Fig. 26-B Driving point impedance of joint (Type J_c)Fig. 27 Driving point impedance (Type J_{f1})

ボード線図による推定共振振動数 実験で得たボード線図からピークの励振振動数で特に顕著なものをひろって、Table にまとめた。明らかに共振振動数であるとわかる場合もあったが、ここではデータとして推定の範囲にとどめておいた。

負荷部インピーダンス値一軸荷重の関係 負荷部の駆動点インピーダンスを求めた一連の実験に関して、その70 cps 付近のピーク値一軸荷重をプロットしたものを Fig. 28 に示す。

Table 1 Estimated resonance frequency from Bode diagram

実験タイプ	1次 (cps)	2次 (cps)
Type O	(50), 76	520
Type Ga	(63), 76	510
Type Os	60, 72	370, 520
Type A ₁	(60), 76	(450), 580

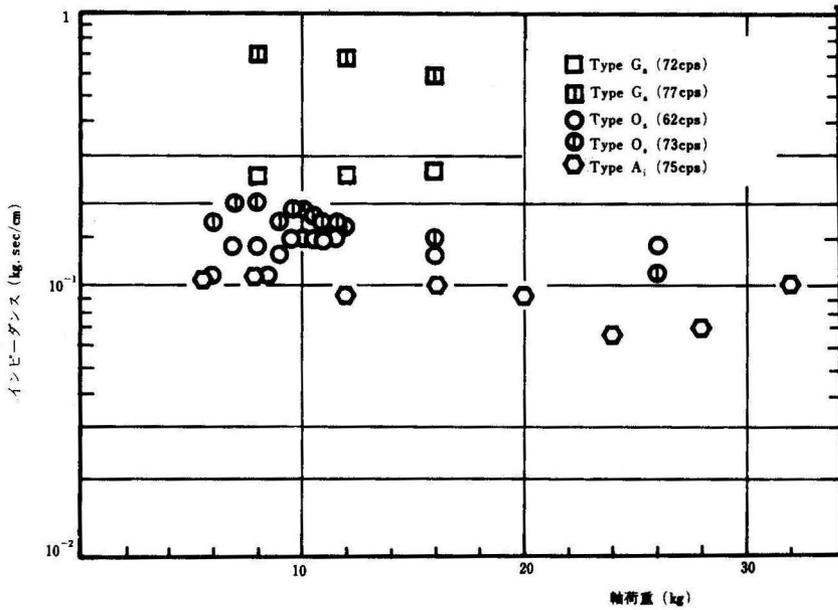


Fig. 28A Relationship between peak point and axial load (about resonance point 70 cps,)

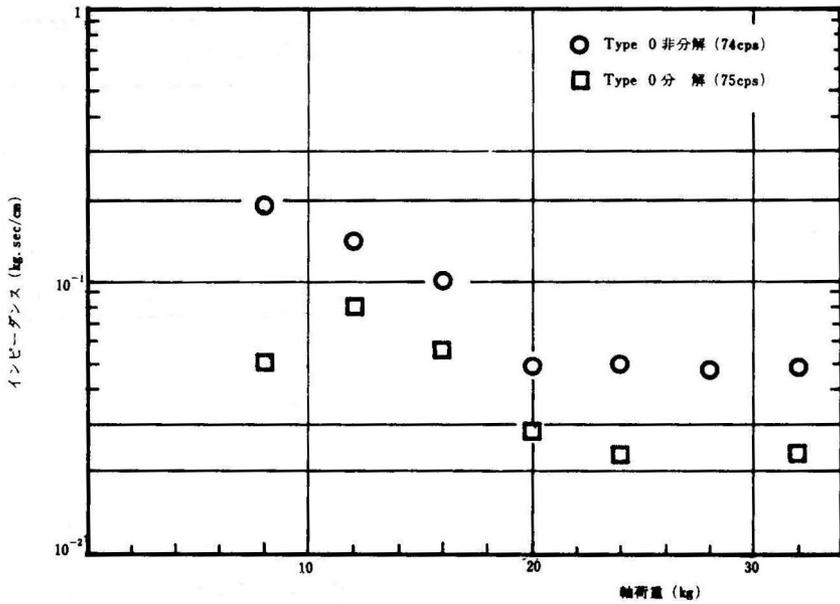
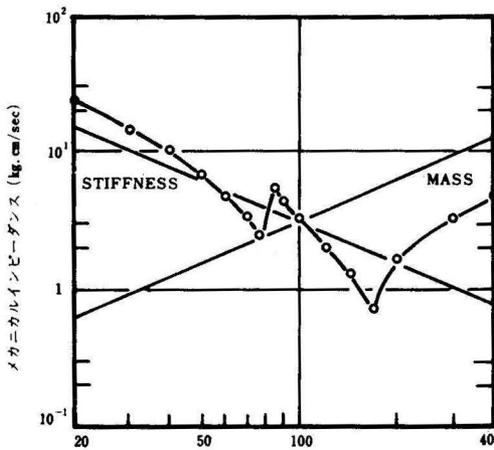


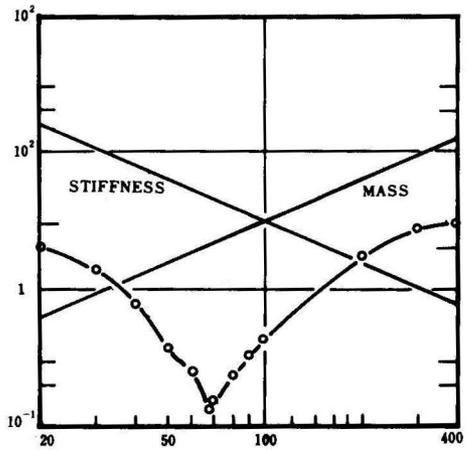
Fig. 28-B Relationship between peak point and axial load (about resonance point 70 cps,)

振動源部の内部インピーダンス テアナンの等価系の振動源部の内部インピーダンスを実際の場合について求めてみた。クランプ力と free velocity とから、ジョイントを振動源部を含めていない場合の振動源部

の内部インピーダンスを Fig 29-A に示し、同様にして、ジョイントを振動源部を含めた場合の振動源部の内部インピーダンスを Fig. 29-B に示した。



(A) Type Hc, Hf



(B) Type A₂, A₃

Fig. 29 Internal impedance of source

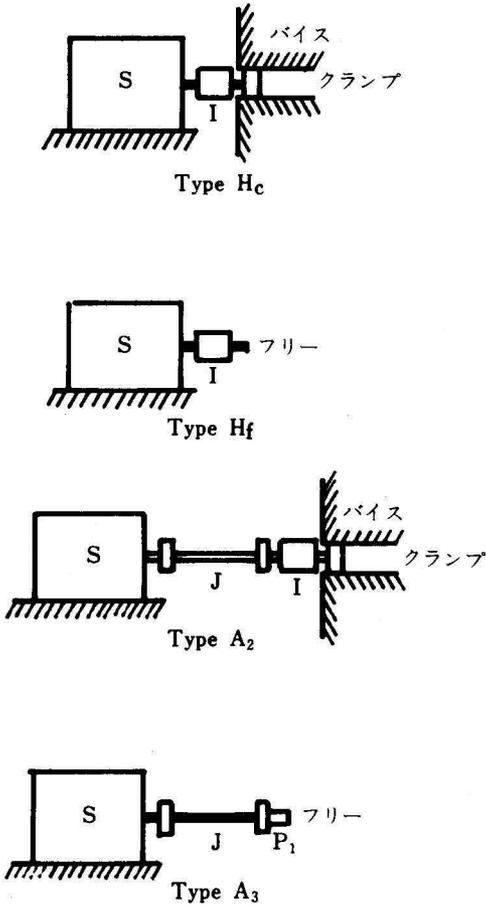


Fig. 29-C Experimental method for internal impedance of source

ジョイントのインピーダンス ジョイントの線形性に関しては出力を変化させた場合インピーダンスが安定しなかったため、ここでは具体的な計算例として励振振動数100cpsの場合についてのみ Fig. 26-A に示されるような実際のデータを使用して示した。Type B₁ のデータより

$$|F_1/v_1| = 55 \text{ kg-sec/cm} = z_{11}$$

となる。Type B₂ のデータより

$$|F_2/v_1| = 37 \text{ kg-sec/cm} = z_{21} = z_{12}$$

となり、Type B₃ のデータから

$$|v_1/v_2| = 0.54$$

となる。したがって

$$-z_{21} \times v_1/v_2 = -20 \text{ kg-sec/cm}$$

のようにもとまる。式 (79) よりジョイントのインピーダンスパラメータは

$$\begin{bmatrix} 55 & 37 \\ 37 & -20 \end{bmatrix}$$

となる。式 (72) ~ 式 (75) を用いるとジョイントの4極パラメータは

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 67 \\ 0.027 & 0.54 \end{bmatrix}$$

となる。

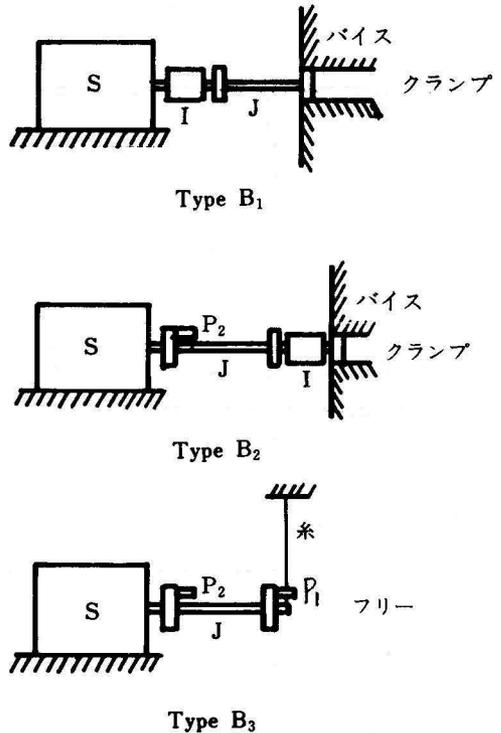


Fig. 26-A Experimental method of joint for impedance parameters

接合面のインピーダンス 負荷部の駆動点インピーダンスを用い、式 (56)、式 (57) とから接合面のインピーダンスと位相角を求めることができる。軸荷重10、

16、20kgの接合面のインピーダンスをそれぞれ Fig. 30、Fig. 31、Fig. 32 に示した。軸荷重20kgのインピーダンスについてはベクトル線図を Fig. 33 に示した。

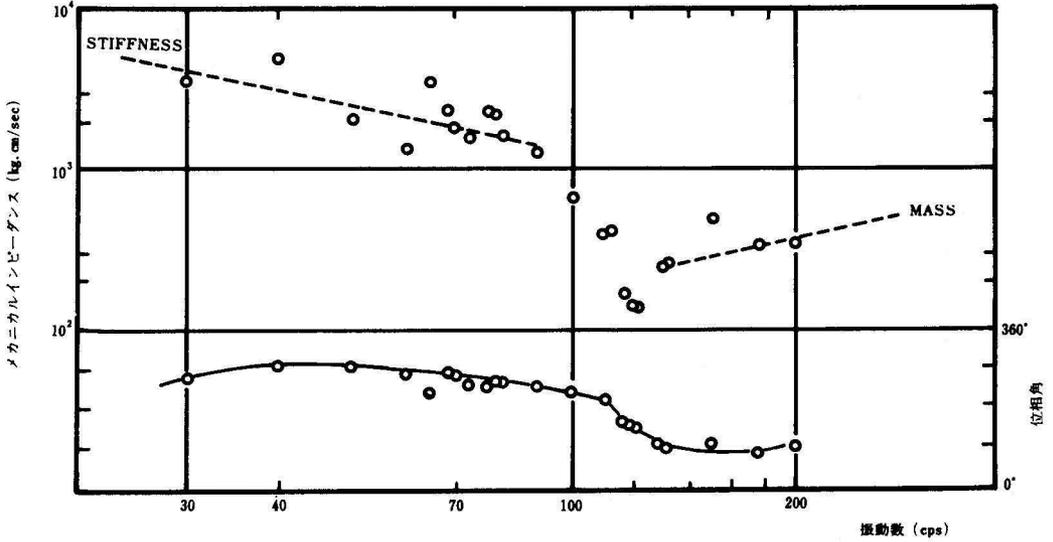


Fig. 30 Mechanical impedance of contact surface (axial load 10kg)

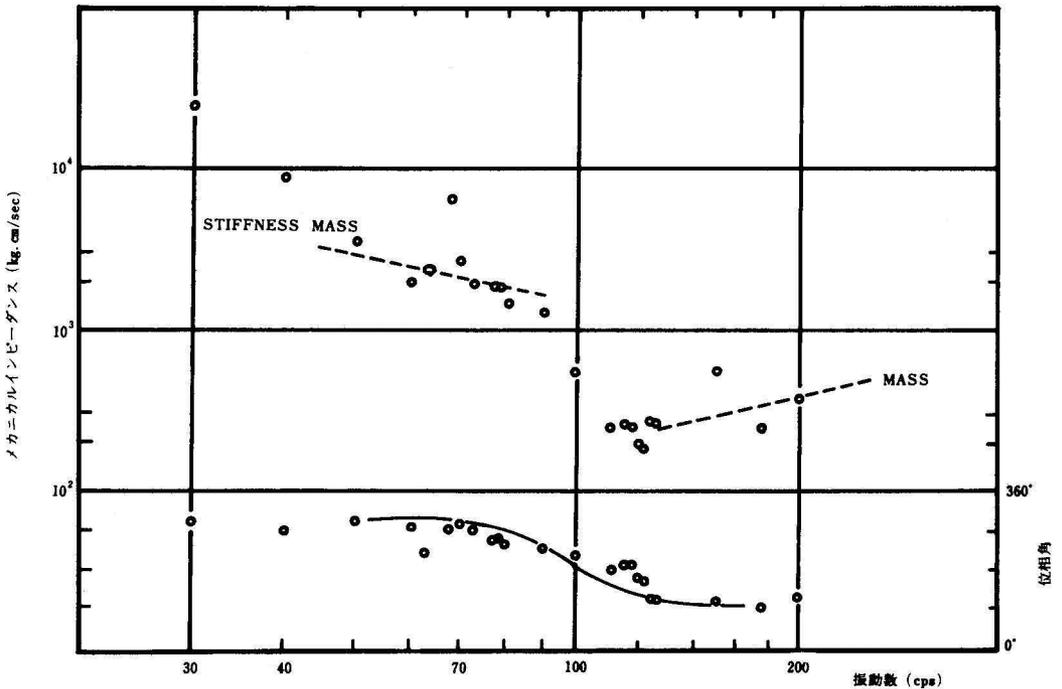


Fig. 31 Mechanical impedance of contact surface (axial load 16kg)

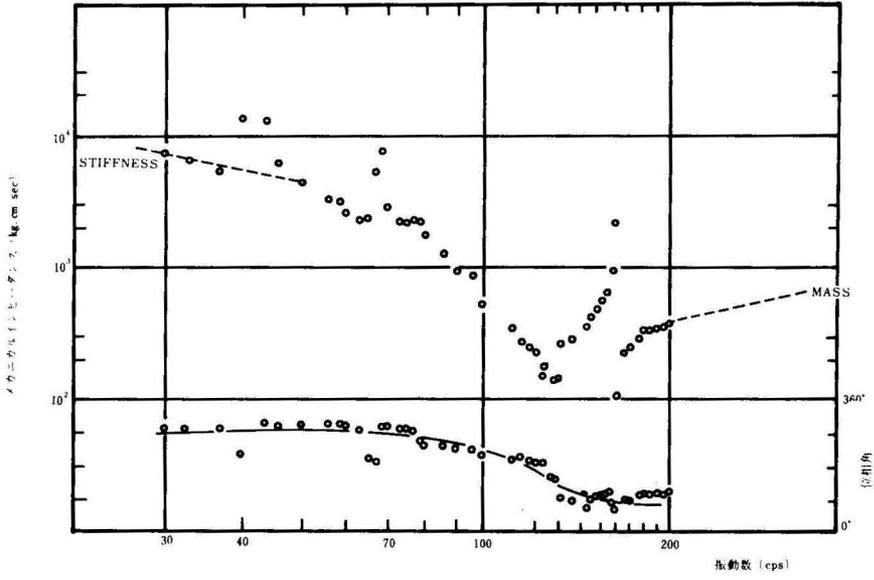


Fig. 32 Mechanical impedance of contact surface (axial load 20 kg)

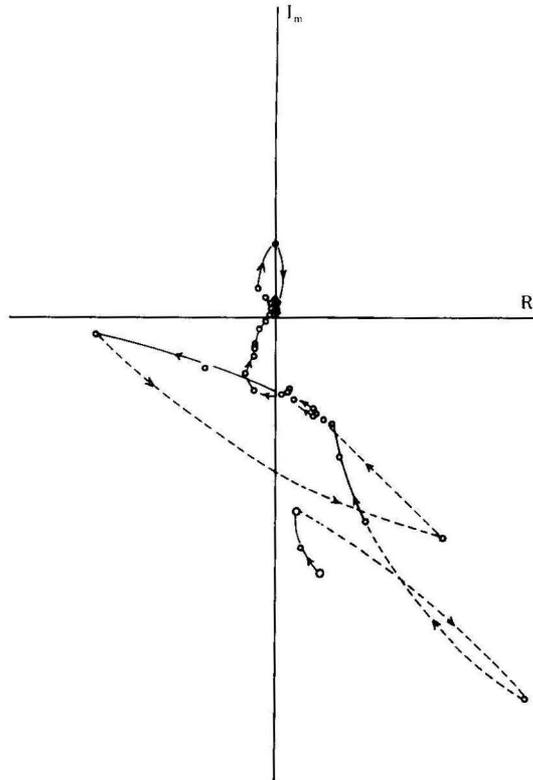
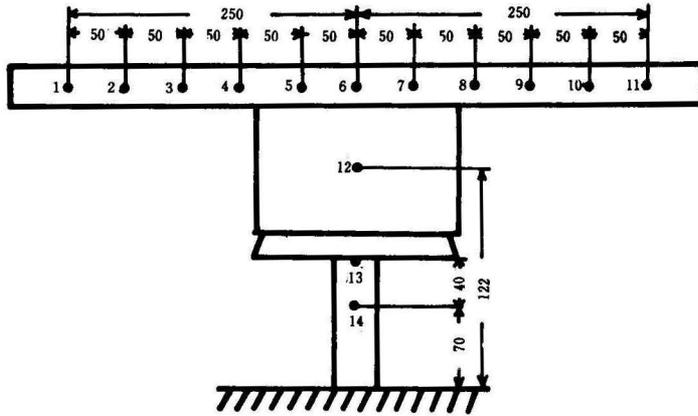


Fig. 33 Complex plane representation for mechanical impedance (axial load 20 kg)



単位はmm

Fig. 34-O Measurement points of mode

実験モデルのモード 前述した方法で得たデータをつぎの方法で処理する。Fig. 34-O に示されるような測定位置番号14のモードを基準とし、番号1～13のモードは変位の絶対値をMで表わせば

$$M_x = \frac{\theta_x}{T} = \frac{d_x}{T r_x}$$

$$M_{14} = \frac{\theta_{14}}{T} = \frac{d_{14}}{T r_{14}}$$

$$M_x / M_{14}$$

$$\frac{M_x}{M_{14}} = (d_x / r_x) / (d_{14} / r_{14}) = (d_x / d_{14}) / (r_x / r_{14})$$

である。ここでdを変位、θをねじり角変位、rを回転半径、Tをトルクとすれば

になる。このようにして計算した結果をFig. 34 AとBに示した。

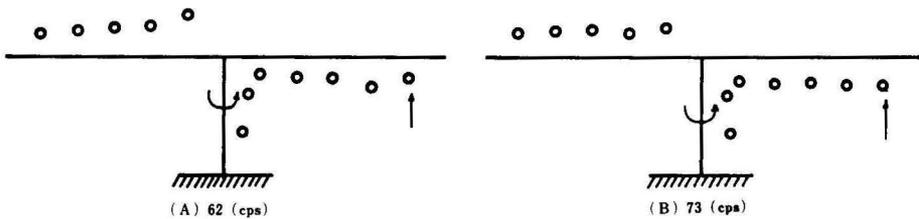


Fig. 34 Mode of experimental model

10.2 考察 本報告においては、いくつかのタイプの実験を行ってその結果を得たが、主に接合面の特性について考察した。

負荷部の共振振動数について Type A₁に関しては、その共振振動数 f_r は $J_u + J_s = 1.3363 \text{ kg m sec}^2 / \text{rad}$, $k_t = 4.871 \times 10^5 \text{ kg cm} / \text{rad}$ であるので、

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_t}{J_u + J_s}} = \frac{1}{6.28318} \sqrt{\frac{487100}{1.3363}} = 96.1 \text{ cps}$$

である。実験から得た共振周波数は 76cps である。計算の場合には接合面、鋼球部の質量慣性モーメントが省かれている。 $f_r = 76 \text{ cps}$ を用いて系全体の質量慣性モーメントを求めると、 $2.35 \text{ kg m sec}^2 / \text{rad}$ となる。したがって、鋼球部の慣性モーメントと接合面の慣性モーメントとの和は $1.014 \text{ kg m sec}^2 / \text{rad}$ と評価できるが、ばね定数についての考慮をしていないため、実際はさらに小さいと考えられる。

潤滑油を用いた場合とアセトンでふいた場合 Type O_s と Type G_s は装置の組立て方が同じである。そのためこの二つの実験結果を比較することで、接合面間介在物の接合面伝達特性に与える影響を軸荷重 8 kg のものについて調べてみた。二つの型の実験結果で、負荷部の共振点が 63cps と 73cps に分れておる。また 120 cps、160cps 付近にピークがみられる。これらは接合

面の共振点であると思われ、これらを二つのタイプについて比較すれば、120cps のピークに関しては油の存在する場合の方が減衰が小さいように思われる。このことに関しては比較する材料が少ないので、詳しいことはわからない。

接合面のインピーダンス Fig. 30～Fig. 32 に関して観察すると、120cps、160cps 付近に共振点が現われておる。したがって、いくつかの仮定をおいて計算した接合面のインピーダンスは質量を含んでおり、しかもばねと並列に質量を含んでいることがわかる。Fig. 30～Fig. 32 のマスラインから、質量慣性モーメントは、 $0.636 \text{ kg cm sec}^2 / \text{rad}$ と計算できる。もしも接合面に質量が存在するならば、考えられるのは接合面介在物としての潤滑油である。この質量慣性モーメントは油が円錐殻形状に均一になっていると考える。その厚みを 0.1mm とし、また油の比重量は $\gamma = 0.85 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ として求める。油の質量慣性モーメントを J_x とすれば、

$$J_x = 1.4 \times 10^{-5} \text{ kg cm sec}^2 / \text{rad}$$

となる。実際には J_x はさらに小さな値であると思われる。接合面に質量を考えると Fig. 30～Fig. 32 に現われているようなものでないと考えられる。接合面のインピーダンスを計算するときいくつかの仮定を導入したが、その仮定の一つで鋼球部の質量を省いた。質量として省かれたものは鋼球部の質量だけであ

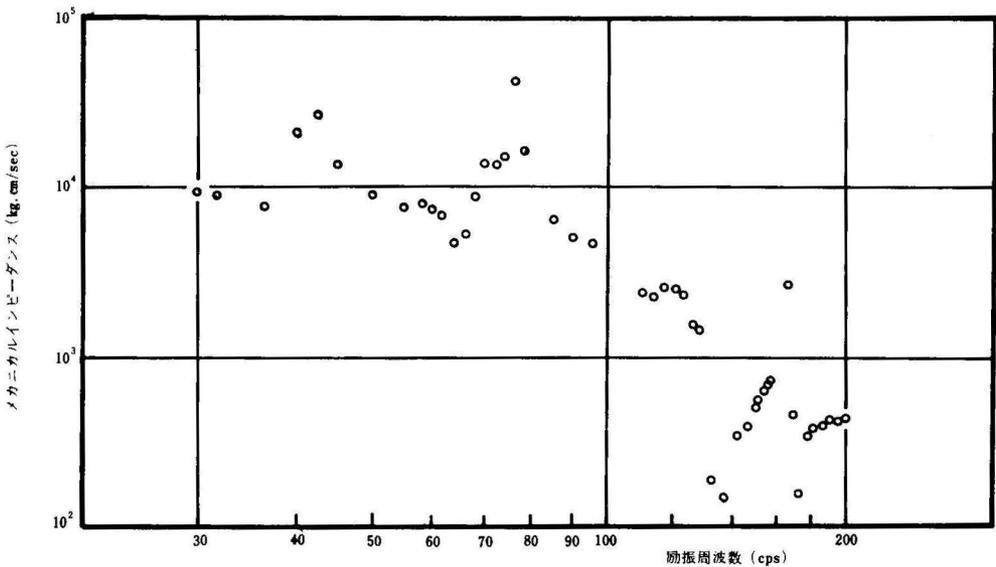


Fig. 35 Mechanical impedance of contact surface (axial load 20kg)

るので、以上のことから接合面のインピーダンス計算に使用された質量は鋼球部の質量であり、その大きさは約 $0.636 \text{ kg cm sec}^2/\text{rad}$ と考えられる。鋼球部の質量慣性モーメントを考慮して式(56)を用いて軸荷重 20 kg のものについて計算した接合面のインピーダンスをFig. 35に示した。

11. 結 論

インピーダンス法を用いて実験を行なう場合は正確に導入しなければ、定量的な取扱いを行っても無意味である。したがって、実験モデルを等価表示するときは詳細にわたる検討によって最も適切な表示を行ないさえすれば、接合面のインピーダンスを評価することができる。

この報告においては、鋼球部の特性を詳しく導き出すことができなかつたため、適確な接合面のインピーダンスを評価することができなかつた。鋼球部のインピーダンスを正確にもとめる工夫が必要である。

おわりに、ご助言をいただいた大阪府立大学工学部橋本文雄教授ならびに研究に協力していただいた川崎重工業青木禧明氏に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) Elmer L. Hixon; Shock and Vibration Hand Book, vol. 1, ch. 10, Mechanical Impedance and Mobility.
- 2) Austin H. Church: Machine Design, Mobility and Impedance Concepts.
- 3) S. Rubin: Transmission Matrices for Vibration and Their Relation to Admittance and Impedance, ASME, Journal of Engineering for Industry (1964).