

琉球大学学術リポジトリ

浅海における進行波の碎波について

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 琉球大学理工学部 公開日: 2013-09-30 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 筒井, 茂明, Tsutsui, Shigeaki メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/26815

浅海における進行波の碎波について

筒 井 茂 明*

On the Breaking of Progressive Waves in Shallow Water

Shigeaki TSUTSUI

Summary

Singularities at the crest offer longstanding difficulties in understanding the breaking of water waves. In this paper, one of systems, representing periodic and solitary progressive waves and the breaking in shallow water, is discussed and it is derived from perturbation for the Hamiltonian function of Korteweg & de Vries equation. The Lagrangian function of the variational principle and the universal unfolding in functional spaces are applied in this procedure. From the analysis waves show the singularities at the crest in terms of unknown perturbation parameter. This perturbed terms are similar to those in the second order approximation for the nonlinear long water wave theory. This system, then, is considered one of simple models for the breaking of waves.

1. 緒 論

外洋から海岸線へ波が押し寄せ、だんだんと成長し、やがて波の姿で最も美しい碎波となって波は消滅し、その後はまた新しい波の歴史が始まる。

このような浅海における波の変形に関する研究は、ここ1世紀来行われてきた。碎波直前の波形を決定することに関しても種々の研究が成されている。

Stokes¹⁾は無限水深の海域において進行波がまさに碎けようとするときの波頂付近での形を定め、波頂角が120°となることを示した。その後、Michell²⁾は周期波についてStokesの研究を拡張し、Fourier級数項を追加することにより波形全体を定めることに成功した。

一方、Nekrasov³⁾は波が積分方程式の解として表現されることを示し、Levi-Civita, Struick⁴⁾はこれを有限水深の場合に拡張した。Krasovskii⁵⁾はNekrasovの積分方程式の中にはStokesの波形を含んでいること

を証明したが、解を求める方法については言及していない。同様の手法により、Yamada⁶⁾、Yamada and Shiotani⁷⁾は高精度の数値計算を行っている。そのときの波高と波長の比は0.142である。また、孤立波については、波頂角が120°となる場合に対して、たとえばLenau⁸⁾が等角写像法により計算し、最大波高は $H = 0.83h$ 、(h : 水深)であることをえている。さらに、Longuet-Higgins⁹⁾は、写像を用いた簡単な方法により、進行波と重複波に対する最大波の波形を決定することに成功している。

以上の研究はいづれも、進行波の碎波時の波頂角が120°であることが基本となっている。これに対して、Grant¹⁰⁾はLaitone¹¹⁾の水表面の条件式を解析し、最大波の場合にはStokesの結果が成立するが、最大波より小さい波高で碎波する場合にはStokesの波頂角より小さい値が存在すること、すなわち、波頂での特異点の指数は無理数であることを提示し、これまでの研究に対して疑問を投げかけた。Norman¹²⁾もまた、Laitoneの式を級数展開法により解析し、Grantの主張を確認している。さらに、Schwartz¹³⁾は、写像によりえられる基礎式をStokes展開により高次の項まで数値計算し、

受付：1976年10月19日

*琉球大学工学部土木工学科

そこでもやはりGrantの結果が正しいことを示している。

いずれにしても、これらの研究は流体力学の基礎方程式を適当な形に変形したのち、数値計算したものであり、現象の物理的な解釈に対する好都合であるとはいえない。これに対してSeliger¹⁴⁾、Whitham¹⁵⁾は、通常の波から碎波までの波を記述することが可能な方程式を研究している。そこでは、基礎方程式を摂動してえられる表面波形に対する第1近似式であるKorteweg & de Vries (KdV) 方程式を基準にし、この方程式における位相速度に対する長波近似が碎波に対して厳しすぎると考え、線形方程式からえられる位相速度のFourier 積分を積分核とする積分微分方程式を求めた。この式はDiracのδ 関数を含み、長波近似ではKdV方程式に帰するものである。このように積分核に超関数を含むため、碎波波形を求めようとするときには、積分核に対してその特性を失わないような近似核を用いる以外に解析は困難である。また、この方程式は非対称碎波をも含むことを証明しているが、上記と同様の理由により解の解析的な表示は不可能に近いようである。

本研究は、このSeliger、Whithamの研究がその動機の1つとなっている。すなわち、流体力学の基礎方程式から数値計算などにより碎波波形を求めるのでなく、現象の物理的な解釈が容易な形で、通常の波形から碎波波形までの一連の波形を表わしうるような方程式系を研究しようとするものである。

さて、流体力学の基礎方程式は変分原理により表現されることがわかっている。したがって、変分原理のLagrangianの形が決定されれば問題は解決されたことになるが、これは、波動論における解析を困難にしている主な原因である水面での非線形境界条件（圧力一定の条件）の積分形であるため、実際には解析的な表現は困難である。そこで、このLagrangianの第1近似としてKdV方程式に対するものを考えることができる。さらに、LagrangianからHamiltonianを求めるとき、ある条件下ではHamiltonian自体がHamiltonの運動方程式の解となっており、これはまた保存量であるから解析上、好都合である。

波動問題においてHamiltonianを用いた研究^{16), 17)}もみられるが、そこでは非線形現象に対する近似式を求めるときにHamiltonの原理を利用する場合が多く、Hamilton自体の特性が議論された研究は数少ない。

一方、熱力学における固体・液体・気体の相転移論¹⁸⁾に現われる $\frac{\partial}{\partial T}$ 乗則なるものは、解析的な研究では解決されない問題である。これに関して、R. Thomはこれらの現象を支配するHamiltonianに根本的な欠陥があり、ある種の病気にかかっていると考えた。そこで、このHamiltonianが定性的に4次式で表現されることを見出し、簡単な仮定により上記の $\frac{\partial}{\partial T}$ 乗則が誘導されることを示した。R. Thomのこの認識は重要であり、波動論においても、これを支配するHamiltonianに欠陥があると考えることができる。

このような考えに基づき、本研究ではKdV方程式に対するHamiltonianを摂動してえられる近似方程式が、上述のような碎波をも含む一連の波形を現わしうる波動解を与えることを提示するものである。その際には、R. ThomがCatastropheの理論を形成するときに用いた構造安定性の概念に基づく関数空間の普遍開折の理論を用いる。また、ここでは一様水深の場合について考えるが、それは非対称碎波に対する考え方の基本となること、取り扱いが比較的に簡単であること、さらに、緩勾配の場合には一様水深に対する結果が適用可能となることなどの理由によるものである。

2. 基礎方程式に対する変分原理とCatastropheの理論

図-1に示すような座標系に対して、一様水深の場合の基礎方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g(z-h) &= 0, \quad z = \zeta \\ \zeta_t + \zeta_x \phi_x - \phi_z &= 0, \quad z = \zeta \\ \phi_z &= 0, \quad z = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

ここに、 ϕ ：速度ポテンシャル、 ζ ：水位変動、 z ：

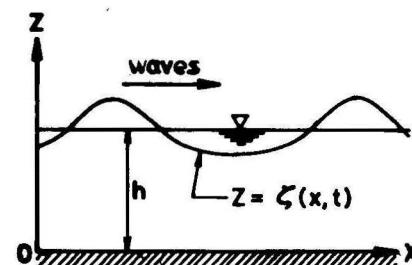


図-1 座標系

および g ：重力の加速度である。

上式に対する変分原理は次式¹⁹⁾で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta \iint_R L dx dt = 0, \\ L = - \int_0^t \left\{ \phi_t + \frac{1}{2} (\phi_{xx}^2 + \phi_{zz}^2) + g(z-h) \right\} dz, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 R は (x, t) 空間の任意領域である。

式(1)の第1、3、4式は変分 $\delta\phi$ 、第2式は変分 $\delta\xi$ により与えられる。すなわち、基礎方程式は関数空間におけるLagrangianの積分の極小条件として表わされる。

一方、Catastropheの理論^{20), 21)}の概要は次のとおりである。すなわち、ポテンシャル関数で表わされる現象があり、その現象内に不連続な状態が発生する場合には、ポテンシャルの局所的な型の分類が可能であり、その不連続現象はポテンシャルの極小条件により与えられるというものである。

この両者を比較すると、波動論におけるLagrangianの積分がCatastropheポテンシャルに対応することがわかる。したがって、このLagrangianの積分の型がどのようなときに碎波現象を表現しうるかを議論すればよいことになる。しかし、これは前述のように現段階では不可能に近いので、まず被積分関数であるLgarangianの型、ひいてはこの恒等変換であるHamiltonianの型を議論することが重要であると考えられる。したがって、今後式(1)を満足する近似式のうち、第1近似であるKdV方程式に対するHamiltonianを中心に論じる。

3. KdV方程式に対するHamiltonian

まず、KdV方程式²²⁾は式(1)から次のようにしてえられる。無次元量

$$\left. \begin{aligned} \phi^* = \frac{\phi}{c_0 h}, \quad x^* = \frac{x}{h}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad t^* = \frac{c_0 t}{h}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{h} \\ c_0 = \sqrt{gh} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

を用いて、式(1)を表示すると次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi^* = 0 \\ \phi_{t*}^* + \frac{1}{2} (\phi_{xx*}^2 + \phi_{zz*}^2) + (z^* - 1) = 0, \quad z^* = \xi^* \\ \xi_{t*}^* + \xi_{x*}^* \cdot \phi_{x*}^* - \phi_{z*}^* = 0, \quad z^* = \xi^* \\ \phi_{x*}^* = 0 \quad z^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

次に、Gardner-Morikawa変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t^*, \quad \bar{z} = z^*, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (5)$$

を行ない、水位変動およびポテンシャルに対して、

$$\left. \begin{aligned} \xi^*(\xi, \tau) = 1 + \varepsilon \xi_1^*(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \xi_2^*(\xi, \tau) + \dots \\ \phi^*(\xi, \tau, \bar{z}) = \varepsilon^{1/2} \left\{ \phi_1^*(\xi, \tau, \bar{z}) + \varepsilon \phi_2^*(\xi, \tau, \bar{z}) + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

を仮定し、 $z^* = \xi^*$ での条件を $z^* = 1$ での条件で表示すると、第1近似としてKdV方程式(7)がえられる。

$$\xi_{xx}^* + \frac{1}{2} \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* + \frac{1}{3} \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* = 0 \quad (7)$$

また、第2近似として次式がえられる。

$$\xi_{xx}^* + \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* + \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* + \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* = \frac{1}{2} \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* - 3 \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* + \frac{1}{6} \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \xi_{x*}^* \quad (8)$$

ここで、以下の演算を簡単にするため、

$$\eta = \frac{3}{2} \xi_{x*}^*, \quad \bar{t} = \frac{1}{2} \tau, \quad \bar{x} = \xi \quad (9)$$

とおくと、式(7)は次のようになる。

$$\eta_{\bar{x}} + 6\eta \eta_{\bar{x}} + \eta_{\bar{x}\bar{x}} = 0 \quad (10)$$

次に、式(10)に対する変分原理は次のようにして求められる。ポテンシャル表示

$$\eta = \varphi_{xx}, \quad \chi = \varphi_{xx} \quad (11)$$

を用いると、式(10)から、次式で与えられる連立2階偏微分方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \chi = \varphi_{xx} \\ \varphi_{xt} + 6\varphi_x \varphi_{xx} + \chi_{xx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし、上式において、簡単のため (\cdot) 印は省略してある。

式(12)に対する変分原理

$$\delta \iint_R L(\chi, \chi_{xx}, \varphi_t, \varphi_x) dx dt = 0 \quad (13)$$

におけるLagrangianは、Eulerの方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \chi_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_x} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

から次式で与えられる。

$$L = -\frac{1}{2} \varphi_t \varphi_x - \chi_x \varphi_x - \varphi_x^3 - \frac{1}{2} \chi^2 \quad (15)$$

ここで、定常解を仮定し、

$$\theta = kx - \omega t \quad (16)$$

とおく。ただし、 k 、 ω はそれぞれ局所的な波数、周波数である。（孤立波を考えるときには、波速 U を用いて $\theta = x - Ut$ となるから、上式において形式的に $k \equiv 1$ 、 $\omega \equiv U$ とすればよいので、以下では式（16）を用いて解析を行う。）このとき、式（15）は、

$$L = \frac{1}{2}k\omega\varphi_\theta^2 - k^2\varphi_\theta\chi_\theta - k^3\varphi_\theta^3 - \frac{1}{2}\chi^2 \quad (17)$$

となり、 χ 、 φ に対する共役な量を p 、 q とするとき、

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \chi_\theta} = -k^2\varphi_\theta \\ q &= \frac{\partial L}{\partial \varphi_\theta} = k\omega\varphi_\theta - k^2\chi_\theta - 3k^3\varphi_\theta^2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり、HamiltonianとHamiltonの運動方程式は、それぞれ次式で与えられる。

$$H = -\left(\frac{p}{k}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{p}{k}\right)^2 - \left(\frac{q}{k}\right)\left(\frac{p}{k}\right) + \frac{1}{2}\chi^2 \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\chi}{d\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{1}{k}\left\{\left(\frac{q}{k}\right) + \left(\frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{p}{k}\right) + 3\left(\frac{p}{k}\right)^2\right\} \\ \frac{d\varphi}{d\theta} &= \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{k}\left(\frac{p}{k}\right) \\ \frac{dp}{d\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial \chi} = -\chi \\ \frac{dq}{d\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式（20）の第4式から $q = \text{const.}$ がえられ、第2、3式を式（19）に代入すると、KdV方程式に対するHamiltonianは、結局、次式で与えられる。

$$H = \eta^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k}\right)\eta^2 + \left(\frac{q}{k}\right)\eta + \frac{1}{2}k^2\eta_\theta^2 \quad (21)$$

$H = \text{const.}$ は式（20）の解であり、周知のようにクノイド波、孤立波²³⁾がえられる。

4. 変形されたKdV方程式(碎波モデル)とその解

式（21）で表わされるエネルギー曲面を摂動して、碎波を表わしうる方程式を求める。そのときには、R. ThomがCatastropheの理論において開いた関数空間の構造安定性に基づく普遍開折²⁴⁾の理論を使用する。

式（21）は2変数 $(X, Y) \equiv (\eta_\theta, \eta)$ の関数と考えることができる。 η_θ に関しては2次式であるので、こ

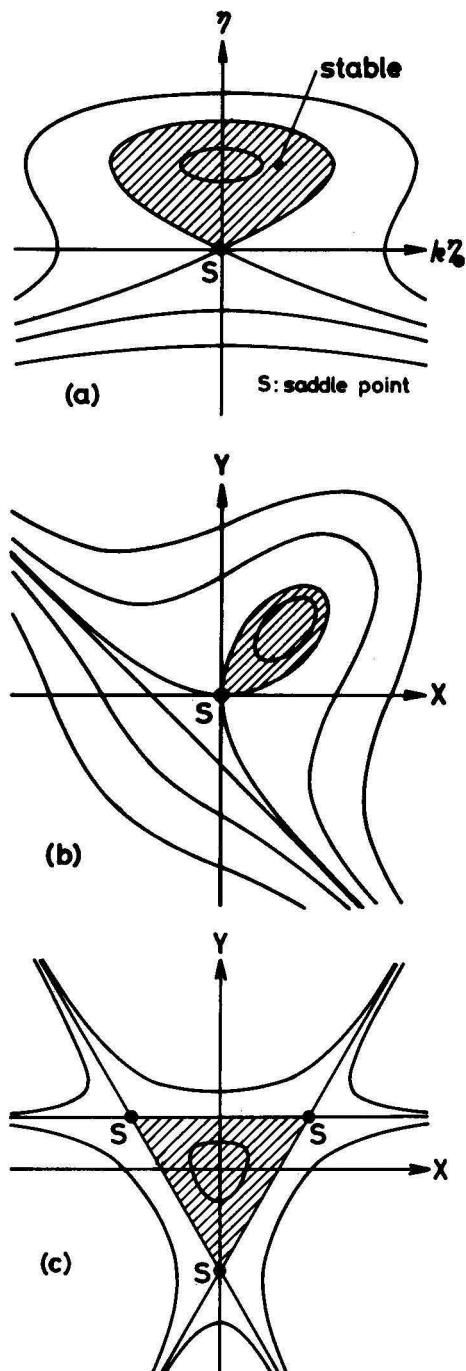


図-2 エネルギー曲面

- (a) KdV eq.
- (b) $V_1(X, Y) = \text{const.}$
- (c) $V_2(X, Y) = \text{const.}$

の項をどのように摂動してもエネルギー曲面の定的な性状は変化しない。摂動効果の現われる最低次の次数は3次式であるから、 $(X, Y) \equiv (\eta_\theta, \eta)$ に関する3次式に対する曲面に変形することを考える。

さて、R. Thomによると、2変数の3次式からなる構造安定なポテンシャル曲面は、次の2種類がある。

$$\left. \begin{aligned} V_1(X, Y) &= X^3 + Y^3 + cXY + aX + bY \\ V_2(X, Y) &= Y^3 - 3X^2Y + c(X^2 + Y^2) + aX + bY \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここに、 a, b, c はパラメーターである。

$$H = \eta^3 - \alpha k^2 \eta \eta_\theta^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right) \eta^2 + \frac{1}{2} k^2 \eta_\theta^2 + \left(\frac{q}{k} \right) \eta, \quad \alpha > 0 \quad (23)$$

ただし、 α はパラメーターである。

上式に対する変分原理、式(13)のLagrangianは、

$$\left. \begin{aligned} L &= -k^3 \varphi_\theta^3 + \frac{1}{2} k \omega \varphi_\theta^2 - k^2 \varphi_\theta \chi_\theta - \frac{1}{2} \chi^2 + \alpha \left(k \varphi_\theta \chi_\theta^2 + k^3 \varphi_\theta^2 \chi_\theta \right) \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \chi_\theta} = -k^2 \varphi_\theta + \alpha k^3 \varphi_\theta^2 \\ q &= \frac{\partial L}{\partial \varphi_\theta} = -3k^3 \varphi_\theta^2 + k \omega \varphi_\theta - k^2 \chi_\theta + \alpha \left(k \chi_\theta^2 + 2k^3 \varphi_\theta \chi_\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となり、変形されたKdV方程式は次式で与えられる。

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} - 2\alpha \left(2\eta_x\eta_{xx} + \eta\eta_{xxx} \right) = 0 \quad (25)$$

これらの式は、 $\alpha = 0$ のときにはKdV方程式とそれに対応するHamiltonian, Lagrangianに帰される。 α の物理的な意味については後述する。

エネルギー曲面、式(23)は次に示すように孤立波と周期波およびその碎波波形を表示することができる。

(1) 孤立波

式(23)で表わされるエネルギー曲面 $H = \text{const.}$ の漸近線は、次の3直線である。

$$\left. \begin{aligned} \eta \pm \sqrt{\alpha} k \eta_\theta &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\omega}{k} \right) - \frac{1}{\alpha} \right) \\ \eta &= \frac{1}{2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

また、孤立波に対しては、 $\eta \rightarrow 0$ のとき $\eta_\theta = \eta_{\theta\theta} = 0$ であるから $H = q/k = 0$ となる。このとき式(23)は

$$\left(\alpha \eta - \frac{1}{2} \right) k^2 \eta_\theta^2 = \eta^2 \left\{ \eta - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right) \right\} \equiv f(\eta) \quad (27)$$

となり、図-3に示すように $\eta_{\max} < 1/(2\alpha)$ 、 $f(\eta) \leq 0$ のとき波動解が存在し、そのための条件は次のように

式(21), (22)で与えられる曲面を示すと図-2のようになる。同図-(a), (b)のようにKdV方程式に対するエネルギー曲面とポテンシャル $V_1(X, Y) = \text{const.}$ は、定性的に類似しているので、波頂において特異点が存在するような波動解を与える可能性は少ない。一方、 $V_2(X, Y) = \text{const.}$ は安定領域内で $Y \equiv \eta \rightarrow \max.$ とすると、 $X \equiv \eta_\theta$ は特異性を示すので、この場合には碎波波形の解の存在が期待される。

KdV方程式に対するエネルギー曲面、式(21)を $V_2(X, Y)$ 型の曲面に変形すると次式がえられる。

$$H = \eta^3 - \alpha k^2 \eta \eta_\theta^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right) \eta^2 + \frac{1}{2} k^2 \eta_\theta^2 + \left(\frac{q}{k} \right) \eta, \quad \alpha > 0 \quad (23)$$

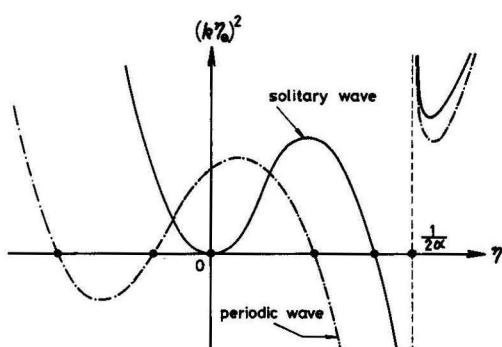


図-3 解の存在範囲

なる。すなわち、 $f(\eta) = 0$ が $1/(2\alpha)$ 以下の正根をもつ条件から、

$$\frac{\omega}{k} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (28)$$

がえられる。このときのエネルギー曲面は、図-4に示すとおりであり、安定領域は図中に斜線で示した領域である。この境界線上で存在する孤立波は、式(27)を積分してえられる。さらに、 $\eta_{\max} \rightarrow 1/(2\alpha)$ のとき

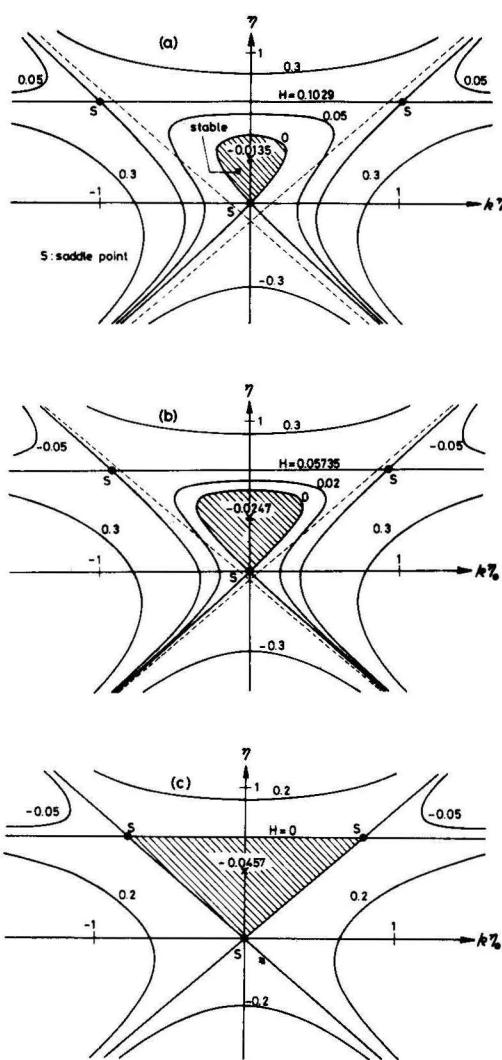


図-4 エネルギー曲面, $\alpha = (2/\pi)^{2/3}$, (a) $\omega/k = 0.9$, (b) $\omega/k = 1.1$, (c) $\omega/k = 1/\alpha$, saddle point (S)は3点あり, 1点は $H = 0$, 他の2点は $H = (1/\alpha - \omega/k)/(8\alpha^2)$ のときのセパラトリック線上に位置する。ただし, $\eta = (3/2)\cdot\zeta$ である。

には $\omega/k \rightarrow 1/\alpha$ となり, 式(26)の第1式の2漸近線上で解が求められることになり, 波頂において特異性を有する解がえられる。これらを示すと, まず式(27)から,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\beta^2 - \gamma^2}{1 - \gamma^2} \\ |\psi| &= \sqrt{\alpha} \cdot \log \left\{ \left(\frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} \right)^{\nu\gamma} \cdot \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) \right\} \\ \beta^2 &= \left(\frac{\omega}{k} \right) / \left(\frac{1}{\alpha} \right) \leq 1 \\ \psi &= x - \left(\frac{\omega}{k} \right) t \\ 0 \leq \gamma &\leq \beta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

で表わされる通常の波形をもつ解がえられ, 碎波波形は, 式(26)の第1式から,

$$d\theta \pm \sqrt{\alpha} k \frac{d\eta}{\eta} = 0, \pm \text{は} \theta \geq 0 \text{に対応する。}$$

となり, $|\theta| \rightarrow 0$ のとき $\eta_{max} \rightarrow 1/(2\alpha)$ であるから, 次式がえられる。

$$\eta = \frac{1}{2\alpha} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} |x - \left(\frac{\omega}{k} \right) t| \right\} \quad (30)$$

この式は, Seliger, Whitham が積分微分方式からえた近似式と同じ特性をもっている。

いま, 以上の解を例示するため, 碎波時の波頂角を 120° とすると, 表-1の結果がえられる。したがって, 長波の波速 \sqrt{gh} より大きい波速を有する孤立波が存在し, 従来の結果と一致する。 $\omega/k \leq 1/\alpha = (\pi/2)^{2/3}$ のときの波形を示すと, 図-5のようになる。ただし, 式(9)により座標を ξ , ζ , τ にもどしてあり, $\xi \equiv \xi^*$, $\bar{\psi} \equiv \xi - (1/6) \cdot (\omega/k) \tau$ である。 $\omega/k = 0$ のときには波は存在せず $\omega/k \geq 1/\alpha$ のときには碎波波形に限りなく近づくことがわかる。

表-1 碎波波形に対する諸元(孤立波)

α	ξ^*_{max}	$\frac{1}{3} \left(\frac{\omega}{k} \right)_{max}$
$\left(\frac{2}{\pi} \right)^{2/3}$	$\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3}$	$\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2/3}$

注) $\xi^* = \frac{2}{3}\eta$, 波頂角が 120° となるように α を決定

パラメーター α は, 波高, 波速, 波頂角に関与する重要な係数である。 $\alpha \rightarrow 0$ のときには, 漸近線の1つが $\eta = 1/(2\alpha) \rightarrow \infty$ となり, 図-4に示すような解の存在するポテンシャルの井戸に対する制限が除かれることになり, 波頂で特異点となる解は存在しなくなる。また, 図-4からわかるように, 孤立波の特異点の1つ $\eta = 0$ すなわち $|\theta| \rightarrow \infty$ は, エネルギー曲面上の原点

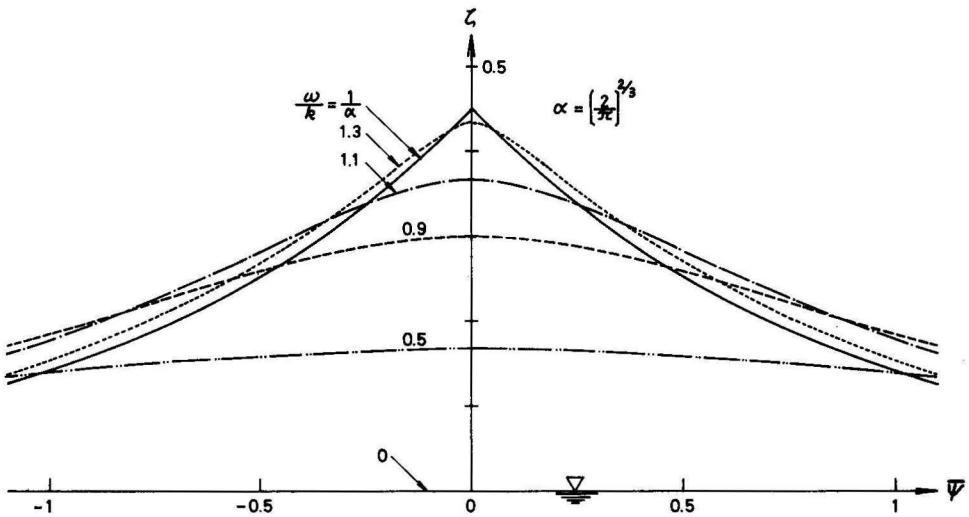


図-5 孤立波とその碎波波形

に位置する特異点である saddle point に、碎波波形の波頂での特異点は、他の 2 つの saddle point に対応する。すなわち、 α はエネルギー曲面に対する摂動パラメーターであり、この曲面上の特異点である saddle point が波形の特異点の性状を定めることがわかる。

このように、エネルギー曲面を摂動してえられる方程式の解に不連続現象が発生することは重要である。R. ThomのCatastropheの理論は、関数空間の特異点の性状に関する研究であり、ポテンシャル曲面を摂動してえられる曲面（普遍開折）に対する不連続現象を分類したものであるから、上述の事項と本質的な共通点が存在することがわかる。周期波に対しても大要は孤立波の場合と同じであり、以下に示すとおりである。

(2) 周期波

周期波は次のようにして求められる。式 (23) は、

$$(a\eta - \frac{1}{2})k^2\eta_\theta^2 = \eta^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{k}\right)\eta^2 + \left(\frac{q}{k}\right)\eta - H \equiv f(\eta) \quad (31)$$

となる。周期波が存在するための条件は、まず、 $\eta = 0$ において $k\eta_0$ は実数であるから $H > 0$ である。次に、 $f(\eta) = 0$ の解を満たす η_1, η_2, η_3 の組合せのうち無限波列が存在するためには、 $f(\eta) = 0$ の 2 根は負、1 根は $1/(2\alpha)$ より小さい正根であることが必要である。これらの 3 根をあらためて、 $\eta_1, -\eta_2, -\eta_3, \eta_3 > \eta_2$ (ただし、 $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$) とすると、式 (31) は次のように表わされ

る

$$\alpha k^2 \eta_\theta^2 = \frac{(\eta_1 - \eta)(\eta + \eta_2)(\eta + \eta_3)}{(\eta_4 - \eta)}, \quad \eta_4 \equiv \frac{1}{2\alpha} \quad (32)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{b} \right) = \eta_1 - \eta_2 - \eta_3$$

$$\left(\frac{q}{b}\right) = -\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 - \eta_3\eta_1$$

$$H = \eta_1 \eta_2 \eta_3$$

上式を積分すると次のようになる

a) $\eta_1 < \eta_4$ のとき

$$\eta = -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) (1 - \mu^2) \frac{w^2}{1 - \mu^2 w} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}|\psi| = \beta \int_0^w \frac{1}{1-\mu^2 w^2} \sqrt{\frac{1-\lambda^2 w^2}{1-w^2}} dw \quad (35)$$

$$\beta^2 = \frac{\eta_4 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_3}$$

$$\lambda^2 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_3} \cdot \frac{\eta_4 + \eta_3}{\eta_4 + \eta_2} \leq 1$$

$$\mu^2 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_3} < 1$$

$\eta = -\eta_2$ のとき $w = 0$, $\eta = \eta_1$ のとき $w = 1$ である。

式(34), (35) は、次に定義する橿円関数²⁶⁾で表示

すると、この波の周期特性がよくわかる。

第1種の楕円関数 (Jacobi の楕円関数)

$$\left. \begin{aligned} w = \operatorname{sn} u, \quad u = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2) \cdot (1-\eta^2 w^2)}} \\ \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad d\eta u = \sqrt{1-\lambda^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

第2種の楕円関数 (Jacobiのテータ関数, ゼータ関数)

$$\left. \begin{aligned} \Theta(u) = \vartheta_4(v, \tilde{q}), \quad v = \frac{u}{2K} \\ Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{1}{2K} \cdot \frac{\vartheta_4'(u, \tilde{q})}{\vartheta_4(u, \tilde{q})} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

K : 第1種完全楕円積分

第3種の楕円関数 (パイ関数)

$$\left. \begin{aligned} \Pi(u, \gamma) = \mu^2 \frac{\operatorname{cn} \gamma \cdot d\eta \gamma}{\operatorname{sn} \gamma} \cdot \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u}{1-\mu^2 \operatorname{sn}^2 u} du \\ = \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\gamma)}{\Theta(u+\gamma)} + u \cdot Z(\gamma) \\ \operatorname{sn} \gamma = \sqrt{\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_4 + \eta_3}} < 1 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

これらの楕円関数を用いると、まず、式(34)は、

$$\eta = -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) \frac{\operatorname{sn}^2 u}{1-\mu^2 \operatorname{sn}^2 u} \quad (40)$$

となり、式(35)は、

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha} \cdot \beta} |\psi| = u - (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u}{1-\mu^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u} du \quad (41)$$

と変形されるから、式(39)により次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\alpha} \cdot \beta} |\psi| = u - \left\{ \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 - 1 \right\} \cdot \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{cn} \gamma \cdot d\eta \gamma} \times \\ \times \Pi(u, \gamma) \quad (42) \end{aligned}$$

$\eta = -\eta_2$ のとき $\operatorname{sn}^2 u = 0$ から $u = 0$ 、 $\eta = \eta_1$ のとき $\operatorname{sn}^2 u = 1$ から $u = K$ となり、式(40)で表わされる波の周期は $2K$ であることがわかる。したがって、波長は次式で与えられる。

$$L = 2 \cdot |\psi| \Big|_{u=K} = 4\sqrt{\alpha} \cdot \beta \times$$

$$\times \left[K - \left\{ \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 - 1 \right\} \cdot \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{cn} \gamma \cdot d\eta \gamma} \cdot \Pi(K, \gamma) \right] \quad (43)$$

また、波形の中分面の静水面からの上昇量は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta = \frac{1}{L} \int_0^L \eta d\psi \\ = -\eta_2 + 4\sqrt{\alpha} \cdot \beta \cdot \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{\eta_1 + \eta_2}{L} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\operatorname{sn} \gamma}{\operatorname{cn} \gamma \cdot d\eta \gamma} \cdot \left[\Pi(K, \gamma) - \Pi^*(K, \gamma) \right] \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Pi^*(u, \gamma) = \mu^2 (\lambda^2 - \mu^2) \cdot \frac{\operatorname{cn} \gamma \cdot d\eta \gamma}{\operatorname{sn} \gamma} \times \\ \times \int_0^u \left\{ \frac{\operatorname{sn}^2 u}{1-\mu^2 \operatorname{sn}^2 u} \right\}^2 du \end{aligned} \quad (45)$$

波形を定めるためには、3未知数 η_1, η_2, η_3 を与える必要があるが、通常これらの代りに波長、波高、および中分面の上昇量を与えて波形が決定される。

6) $\eta \rightarrow \eta_4$ のとき

この場合には周期波の碎波波形がえられる。 $\beta = \mu, \lambda = 1$ であり、次式がえられる。

$$\eta = -\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2) \cdot \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \cdot \sinh^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} |\psi| \right) \quad (46)$$

$\eta = -\eta_2$ のとき $\psi = 0, \eta = \eta_1$ のとき

$$\tanh \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} |\psi| \right) = \mu \quad (47)$$

がえられる。したがって、波長は次式で与えられる。

$$L = 4\sqrt{\alpha} \cdot \tanh^{-1} \mu = 2\sqrt{\alpha} \cdot \log \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) \quad (48)$$

また、

$$\delta = -\frac{1}{2} (\eta_2 + \eta_3) + \frac{\sqrt{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_1 + \eta_3)}}{\log[(1+\mu)/(1-\mu)]} \quad (49)$$

となる。

孤立波の場合と同様に周期波の碎波波形を例示するため、波頂角を 120° としたときの α を求める。

いま、波頂角を $\pi - 2\mathcal{Q}$ とするとき、 η から ζ に変数をもどして考えると、式(32)から次式がえられる。

$$\sqrt{3} \zeta_1 (\zeta_1 + \zeta_2) (\zeta_1 + \zeta_3) = \mathcal{Q} \quad (50)$$

この式と式(48)から

$$\sqrt{3} \zeta_1 \cdot \frac{A}{\mathcal{Q}} = \tanh \left(\frac{L}{4} \sqrt{3} \zeta_1 \right), \quad A = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (51)$$

がえられる。ここで、 $L = 3.958, \mathcal{Q} = \pi/6, \delta = 0$ とすると、式(49)、(51)から表-2のような値がえられる。このときのエネルギー曲面と碎波波形をそれぞれ図-6、7に示す。周期波の場合も孤立波のときと同様に、その他の波形は、 $\eta \rightarrow \eta_4$ すなわち $\lambda \rightarrow 1$ のときに限りなくこの碎波波形に近づく。図-6からわかるように、波の谷は正常点であるから、エネルギー曲面上での saddle point から離れた安定な点がこれと対応している。また、孤立波の場合と同様に、波頂点と、エネルギー曲面上の2つの saddle point が対応している。

表-2 碎波波形に対する諸元(周期波)

L	A	α	δ	Ω	ζ_1	ζ_2	ζ_3
3.958	0.4093	0.1635	-0.00001	$\frac{\pi}{6}$	0.2865	0.1227	0.4929

注) 波頂角が120°となるように α を決定

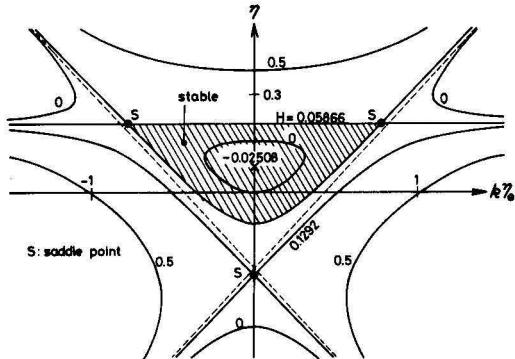


図-6 周期波の碎波波形に対するエネルギー曲面
saddle point(S)は3点あり、2点は $H=(1/\alpha - \omega/k)/(8\alpha^2) + (q/k)/(2\alpha)$ 、他の1点は $H=[(\omega/k) \cdot (18(q/k) - (\omega/k)^2) + ((\omega/k)^2 - 12(q/k))^{3/2}]/108$ のときのセパラトリックス上に位置する。ただし、 $\eta = (3/2)\delta$ である。

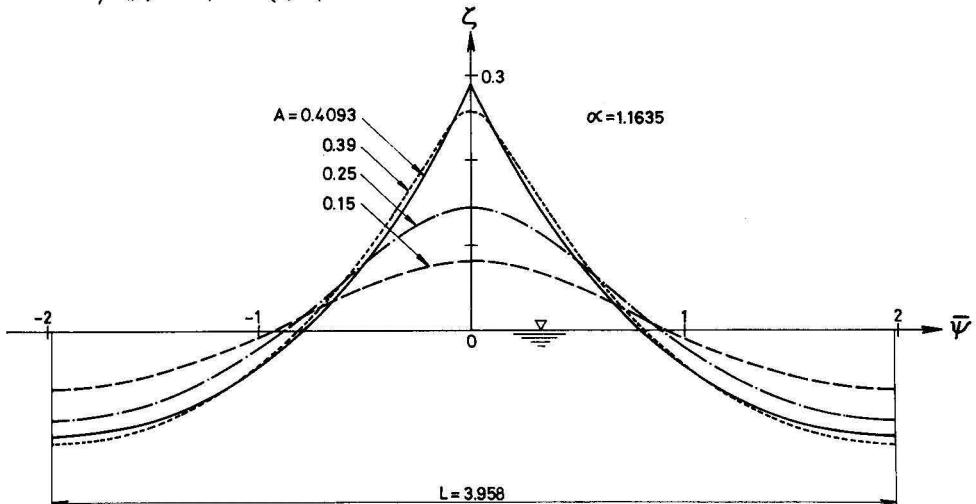


図-7 周期波とその碎波波形

5. 結論

以上、通常の波から碎波までの一連の波を表示しうる方程式系を求めるため、非線形長波理論における、KdV方程式をHamilton系に変換し、Catastropheの理論において用いられる普遍開折によりこの Hamiltonian の摂動を行った結果、簡単なモデルであるが、所要の方程式（変形されたKdV方程式）がえられた。また、波形の特異点は、エネルギー曲面上の特異点である saddle point に対応し、この点の性状により波形が決

定されることもわかった。この変形されたKdV方程式においては、Seliger, Whitham が示した式のような式中に超関数を含むという難点は解決されている。しかし、そこに現われる摂動パラメーター α は未知量であり、この方程式が流体力学の基礎方程式からどのようにしてえられるかが不明である。また、この方程式の解である碎波波形が周期関数で表示されていないといった問題点が残されている。ただし、式(8), (25)からわかるように、変形されたKdV方程式の摂動項と、非線形長波理論第2近似式の右辺に現われる項との類

似性は注目すべきことである。今後、これらの問題点を解決するためには、物理的な種々の条件を用いてこれらの方程式の構造を詳細に検討し、適正化を行う必要があろう。

最後に、本研究にあたり京都大学防災研究所：土屋義人教授より非常に有益な御批評・御助言をいただいたことを明記し、深謝の意を表わすものである。また、本研究の機会を与えられた琉球大学理工学部：河野二夫教授に感謝する次第である。

参考文献

- (1) Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics, Macmillan, 5th Ed., pp. 390-423, 1968
- (2) Michell, J. H.: The highest waves in water, Phil. Mag., vol. 36, part 5, pp. 430-437, 1893
- (3) 前出(1)
- (4) Stoker, J. J.: Water Waves, Pure and Applied Math., vol. 4, Interscience Pub., pp. 342-351, 1957
- (5) Krasovskii, Yu. P.: On the theory of steady-state waves of finite amplitude, U. S. S. R., Comp. Math. & Math. Phys., vol. 1, pp. 996-1018, 1962
- (6) Yamada, H.: Highest waves of permanent type on the surface of deep water, Appl. Mech. Res. Rep., Kyushu Univ., vol. 5 (18), pp. 37-52, 1957
- (7) Yamada, H and T. Shiotani: On the highest water waves of permanent type, Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., vol. 18, part 2, no. 135, 1968
- (8) Lenau, C. W.: The solitary wave of maximum amplitude, J. Fluid Mech., vol. 26, part 2 pp. 309-320, 1966
- (9) Longuet-Higgins, M. S.: On the form of the highest progressive and standing waves in deep water, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 331, pp. 445-456, 1973
- (10) Grant, M. A.: The singularity at the crest of a finite amplitude progressive Stokes wave, J. Fluid Mech., vol. 59, part 2, pp. 257-262, 1973
- (11) Wehausen, J. V. and E. V. Laitone: Surface waves, Handbuch der Physik, vol. 4, Springer, pp. 446-758, 1960
- (12) Norman, A. C.: Expansions for the shape of maximam amplitude Stokes waves, J. Fluid Mech., vol. 66, part 2, pp. 261-265, 1974
- (13) Schwartz, L. W.: Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves, J. Fluid Mech., vol. 62, part 3, pp. 553-578, 1974
- (14) Seliger, R.: A note on breaking of waves, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 303, pp. 493-496, 1968
- (15) Whitham, G. B.: Variational methods and applications to water waves, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 299, pp. 6-25, 1967
- (16) Whitham, G. B.: Linear and Nonlinear Waves, Pure and Applied Math., A Wiley-Interscience Pub., Part II, 1974
- (17) Miles, J. W.: Nonlinear surface waves in closed basins, J. Fluid Mech., vol. 75, part 3, pp. 419-448, 1976
- (18) 宇敷重広: 相転移現象をめぐって, 数理科学, No. 138, pp. 34-44, 1974
- (19) Luke, J. C.: A variational principle for a fluid with a free surface, J. Fluid. Mech., vol. 27, part 2, pp. 395-397, 1967
- (20) Thom, R.: Stabilité Structurelle et Morphogénèse, Benjamin, 1972
- (21) 野口広・福田拓生: 初等カタストロフィ, 共立全書, 208, 1976
- (22) 角谷豊彦: 分散性媒質中の非線形波動, Nagare, vol. 3. No. 2, pp. 5-26, 1971
- (23) 例えは, 岸力: 波動論, 水工学シリーズ64-05, 土木学会, 1964
- (24) 前出20) または21)
- (25) 前出14) または15)
- (26) 山内二郎・宇野利雄・一松信(共編): 電子計算機のための数値計算法III, 培風館, pp. 255-278, 1972