# 琉球大学学術リポジトリ

ある方陣を素材とした算数・数学教育のための教材 開発2:教師教育における事例からの示唆(1)

メタデータ	言語:
	出版者: 琉球大学教育学部附属教育実践総合センター
	公開日: 2015-02-20
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 湯澤, 秀文, Yuzawa, Hidefumi
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/30401

# ある方陣を素材とした算数・数学教育のための教材開発 II 一教師教育における事例からの示唆(1)—

# 湯澤秀文\*

Development of Teaching Materials on a Square for Mathematics Education II — Suggestion from a Case Study in Teacher Education (1)—

Hidefumi YUZAWA\*

#### 1. 研究の経緯と目的

現行の学習指導要領においては「算数的活動・ 数学的活動の一層の充実」が求められているが. これを実現するための一つの試みとして、筆者 はある方陣を素材とした新たな教材の開発に取 り組んできた (湯澤, 2008)。その研究は、初 等・中等段階における数学教育のための教材開 発を主眼とするものであったが、その論考の中 で、同じ素材を用いた教師教育の可能性につい ても、今後の課題の一つとしてあげていた。そ れは、いくら学習指導要領が「算数的活動・数 学的活動の一層の充実」を求めていても、それ を指導する教員自身が数学的活動の必要性や有 用性を熟知し、自らもまたそれを実行する能力 を有していなければ、算数的活動・数学的活動 としての授業を実践するどころか、デザインす ることさえできない、あるいは、実践したとし ても、表面的・形式的な活動に終始したり、継 続的に実践する意欲を保持できなかったりする 可能性が高いと考えるからである。こうした懸 念は、教員養成課程における学生の教育や、現 職教員との関わりの中で、日々感じているもの である。そのような状況が現実のものであると するならば、それは、受験目的に偏向した学習 指導やそれを生みだす社会的背景等により、数 学という学問の姿や意義が矮小化され、それが 学校教育の中で陰に陽に引き継がれ、教員自身 の多くもまた、そうした教育・社会環境の中で 育って来ざるを得なかったということが大きい と考えられる。

このような状況を改善するためには、算数・数学の教員を目指す学生が、今一度、数学とはどのような学問であり活動であるのか、そして算数的活動・数学的活動とはどのようなものであるのかを、少しでも体験し実感できる具体的な教材とカリキュラムの開発、およびその実践が不可欠である。そこで、前回の研究の後、これを発展させ、教員養成を含めた教師教育のための教材開発とその実践を試みてきた。

本論考では、この一連の研究と実践の中で、 学習者自身によるオリジナル方陣の作成と共有 の活動に焦点を当て、その結果を分析すること により、教員養成を含めた教師教育および学校 教育における、教材の開発やカリキュラムの構

<sup>\*</sup> 琉球大学教育学部

成等に関して示唆を得ることを目的とする。

# 2. 研究の対象となる素材と用語の定義

#### (1) 本研究の対象となる素材

2008年の研究で用いた素材とは、次のような 手順の数学マジックである。 $\langle 1 \rangle$  4行4列の表 に 16個の数字が書き込まれた数表(図 1)と、

予言の入った封筒を観客に示す。〈2〉1人の観客に表の中の好きな行を横線で消してもらい、続けて別の観客

112	72	96	56
126	81	108	63
154	99	132	77
84	54	72	42

図 1

に好きな列を縦線で消してもらう。引かれた2本の交点にある数字に○をつけ、残りの行と列についても同様の手順を繰り返す。〈3〉観客に電卓を渡し、丸のついた4つの数の積を求めるよう指示する。答えは「50295168」となる。〈4〉ここで予言しておいた封筒の中の数字を見ると「89156205」と書かれており、電卓の数値とは一致していない。〈5〉ところが、電卓を上下反転させて見せると、電卓の数値が予言の数値と一致している。

#### (2) マジックの要点と用語の定義

このマジックの要点は次の4点である。

①「手順〈2〉により決定される4つの数字が、 どれも各行、各列から重複なく選ばれている。」

この配列は、ちょうどn次ラテン方陣における 同種の文字の配列と同じであることから、本研究 では「(n次)ラテン配列」と呼ぶことにする。

②「この数表はちょうど九九表のように、被乗数の列と乗数の行から、乗法によって構成されている。」

この仕組みを明示するため、数表の中の数をすべて素因数分解し、各行各列の共通因数をそれぞれの欄外に書きとめたものが図2である。そこで、

×	2.7	$3^2$	$2^2 \cdot 3$	7
$2^3$	$2^4 \cdot 7$	$2^{3} \cdot 3^{2}$	$2^5 \cdot 3$	$2^3 \cdot 7$
$3^2$	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$	$3^4$	$2^{2} \cdot 3^{3}$	$3^2 \cdot 7$
11	2.7.11	3 <sup>2</sup> ·11	22.3.11	7.11
2.3	$2^{2} \cdot 3 \cdot 7$	$2 \cdot 3^{3}$	$2^{3} \cdot 3^{2}$	2.3.7

この九九表のように見た方陣の乗数にあたる欄外の行を「生成行」、被乗数にあたる欄外の列を「生成列」、生成行と生成列にある数をあわせて「生成数」と呼ぶことにする。

また、n次ラテン配列になっているn個の数の積のことを $\lceil (n \times)$ ラテン積」、和の場合を $\lceil (n \times)$ ラテン和」、任意の演算の場合を $\lceil (n \times)$ ラテン 計算」と呼ぶことにする。

③「この数表における任意のラテン積はすべて 等しい値となる。」

これは①、②より導かれる。このように、固定されたある演算に対する任意のラテン計算の結果がつねに等しくなる場合、その定数を「マジックナンバー」と呼び(以下「MN」と略記する)、MNが存在するような数表のことを「(n次)ラテン型方陣」と呼ぶことにする。また、ラテン型方陣のうち、加法九九のように演算が加法であるものを「(n次)ラテン和方陣」と呼ぶことにする。ただし、ラテン和方陣は、縦、横、斜めの和が等しくなるような、いわゆる「魔方陣」ではない。以下、本論文では、ラテン積方陣のことを単に「和方陣」と呼ぶ。

④ 「予言に使われた数字 『89156205』 と手順〈3〉 で得られたラテン積 『50295168』 が、デジタル数 字で表すと、互いに 180 度回転したものになっている。」

この演出自体に数学的な意味はなく、省いても よいが、この演出を入れた場合、図形の対称性に 関する学習への展開が可能となるなど、後の活動 に多様性をもたせることができる。

#### (3) 本素材の特徴

2008年の論考で述べたように、他の先行研究の対象が自然数に関するラテン和方陣のみであるのに対し、本研究では、演算の対象範囲を実数や文字式、関数などにも広げ、演算自体も乗法やその他の演算まで含めた、一般のラテン型方陣を対象としている。これにより、広範囲に渡る多様な教材およびカリキュラムの開発が可能となった。

# 3. 教員養成課程における教材・カリキュ ラムの開発とその実践

#### (1) カリキュラムの設計と実践の概要

前回の研究では、ラテン型方陣に対する学習 指導の方法を、ラテン型方陣が未習の場合と既 習の場合に分け、次のように類型化した(湯澤, 2008)。

- (1) ラテン型方陣未習用の学習指導
  - ①「構造非提示型」の学習指導
  - ②「構造示唆型」の学習指導
  - ③「構造提示型」の学習指導
- (2) ラテン型方陣既習用の学習指導
  - ①習得型の学習指導
    - ア) 生成数からラテン型方陣へ
    - イ) ラテン型方陣の穴埋め
    - ウ) ラテン型方陣から生成数へ
    - エ) ラテン積方陣の総和
  - ②探求型の学習指導
    - ア) ラテン型方陣の性質調べ
  - ③活用・表現型の学習指導
    - ア) ラテン型方陣をつくる
    - イ)「作品」の共有
    - ウ) 他の学習内容への発展

この類型を基に,算数・数学の教員を目指す学生を対象としたカリキュラムを設計し,2009年と2012年に,その実践を試みた。

第1時は、両年とも、まず積方陣の仕組みの解明に各自で取り組んだ。解明を共有した後、さらにラテン型方陣の性質を各自で探究した。

第2時は, 第1時の後半から次週にかけて各自が見出してきたオリジナル定理を発表し, それぞれについて検討を行った。

第3時は、この素材を用いた初等・中等教育における授業づくりについて、各自が考えてきた教材化の案を発表し、それぞれについて検討を行った。

第4時は、2009年度のみ、各自が考えてきたオリジナル方陣の発表と検討を行った。2012年度については、講義時数の関係で、各自が考えてきた方陣のいくつかを、第2時の残り時間に筆者が紹介し、全体で共有するにとどめた。

< 2009 年度のカリキュラム>

第1時:ラテン積方陣の解明と探究

・構造非提示型の学習指導(未習用)

・探求型の学習指導(既習用)

第2時:オリジナル定理の発表と検討

・活用・表現型の学習指導(既習用)

第3時:ラテン型方陣の教材化案の発表と検討

第4時:オリジナル方陣の発表と検討

・活用・表現型の学習指導(既習用)

< 2012 年度のカリキュラム>

第1時:ラテン積方陣の解明と探究

・構造非提示型の学習指導(未習用)

・探究型の学習指導(既習用)

第2時:オリジナル定理の発表と検討

および、オリジナル方陣の紹介

・活用・表現型の学習指導(既習用)

第3時:ラテン型方陣の教材化案の発表と検討 研究の目的で述べたように、本論文では、上記 の実践の中で、オリジナル方陣の作成と共有の活 動に焦点を絞り、その結果を分析して行く。

#### (2) 例示した方陣

オリジナル方陣の作成に先立ち、次の3つの方陣を例として示した([2]参照)。

①指数表記の積方陣 (図3)

積方陣であるが、指数部分は和方陣のように見 える。

#### ②文字式の積方陣(図4)

MNは「ace」となり、英単語と見なせる。

×	$2^2$	$2^3$	24
23	$2^5$	26	$2^7$
24	26	27	28
25	27	28	29

図	2
IXI	•

×	с	e/c	d
a/b	ac/b	ae/bc	ad/b
b	bc	be/c	bd
c/d	c²/d	e/d	С

図 4

×	100@	1000(2)	10000(2)
1000②	100000	1000000	100000002
10000	1000000	100000002	1000000002
100000(2)	10000000(2)	1000000000	10000000002

図 5

#### ③2進法で表された積方陣(図5)

10 進法で表せば複雑な計算だが、2 進法だと単なる繰り上がりになっている。

# 4. オリジナル方陣の分析

提出されたオリジナル方陣を、その特徴によって分類し、該当数を和方陣と積方陣に分けて集計したものが表1である。ただし、一つの方陣が複数の特徴をもつ場合には、同一の方陣を複数の項目に重複してカウントしている。また、一人の学生が複数の方陣を提出している場合もあるため、学生数とのべ作品数の両方を記載してある。なお、単純計算で、一人当たりの作品数が2012年度の方がかなり少なくなっている。これは、カリキュラムのところで述べたように、2012年度は、講義時数の関係で、第1時終了後、オリジナル定理の発見とオリジナル方陣の作成の2つを同時に課題としたためと考えられる。

以下では、表1の分類の順序に従って、個々の 方陣の仕組みや特徴、教材化の可能性などについ て分析して行く。

提出されたオリジナル方陣の分類	20	09年	度	20	12年	度
(1つの作品が複数の項目にカウントされている場合あり)	和	積	81	和	積	計
(1)MNや生成数に特徴がある方陣	11	19	30	4	2	
①MNが特徴ある数	6	8	14	2	1	3 0
②MNが特徴ある文字式	2		2	2	_1	3
③MNがことば	2	10	12			
①その他	1	1	2			0
(2)総和に特徴がある方陣		1	_ 1			0
(3)整数ではない方陣	6	11	17	4	4	8
①整数以外の数による方陣			0	1	2	3
②文字式による方陣	1	9	10		1	
③関数を用いた方陣	3	- 1	4	2		2
<ul><li>①代数学的対象を用いた方庫</li></ul>			0	1	1	2 2
⑤その他	2	- 1	3			
(4) 方陣全体に特徴があるもの	1	1	2	3		3
①実生活の中の方陣	1		- 1			0
②部分に区切ると和方陣			0	1		1
③3次元の和方陣			0	1		1
④その他		1	- 1	1		1
(5)その他 (ラテン型方陣とは言えない、未完成、等)	10	3	13			0
①MNが存在しない、あるいは不明確なもの	5	1	6			0
②MN等に意味が見出せないもの		- 1	1			0
③アイディアを完遂できなかったもの	3		3			0
①特徴のないもの	2	- 1	3			0
のべ作品数		53			14	
学生数(学部改組のため、2012年度は数学科の学生のみ)		26			9	

表1

#### (1) MN や生成数に特徴がある方陣

#### ① MN が特徴のある数

#### 1)MN が完全数

図6はMNが完全数496となる和方陣である。 完全数とは、自分自身を除くすべての約数の和が 自分自身と等しくなる数のことであるが、496の 自分自身を除く約数が9個であるため、それに 0を加えて生成数を 偶数個とし、それら を生成行と生成列に 交互に配置したもの である。この作品の 紹介を契機に、他の

完全数やメルセンヌ

+	0	2	8	31	124
1	1	3	9	32	125
4	4	6	12	35	128
16	16	18	24	47	140
62	62	64	70	93	186
248	248	250	256	279	372

図 6

数, 友愛数といった関連事項を紹介したり, 教材 化したりすることも考えられる。

#### 2) MNが142857

図 7 は MN が 142857 となる 積方陣である。この数は、1/7の小数表記の循環節として現 れる数でもある。また、この 数を  $2\sim6$  倍すると、

×	3	11	13
1	3	11	13
9	27	99	117
37	111	407	481

図 7

 $142857 \times 3 = 428571$ 

 $142857 \times 2 = 285714$ 

 $142857 \times 6 = 857142$ 

 $142857 \times 4 = 571428$ 

 $142857 \times 5 = 714285$ 

のように、142857を構成する6つの数字が巡回してできた数となる。このため、初めの積方陣のどこか1行あるいは1列を2~6倍してできた積方陣のMNは、142857の数字が巡回してできた上記6数の何れかとなる。こうした数と計算の不思議さや面白さに触れたり、ここからさらに循環小数の不思議さやその性質の解明に進む、といった展開も考えられる。

#### 3) MNが12345654321 (または111111)

図8はMNが12345654321となる積方陣である。 この数は111111のような数の自乗から得られる ため、111111 = 3·7·11·13·37の因数を生成行と

生成列に配置すること により作成できる。1が 並ぶ桁数を変えた場合、 それが素数でなければ、

×	33	259	13
39	1287	10101	507
77	2541	19943	1001
37	1221	9583	481

同様な積方陣をつくる

図 8

ことができる。また、この方陣の類推から、 $\{1,3,7,11,13,37\}$ の6つの数を生成行と生成列に分けて配置することにより、 $\{MN\}$ が  $\{111111\}$  となるような積方陣もつくることができる。

#### 4) MNを16進法で表すと英単語

MN が 3567 となる、ごく普通の和方陣に見える作品があった。しかし、10 進数の 10、11、12、13、14、15 は、16 進数では A、B、C、D、E、Fであり、3567 =  $13\cdot16^2+14\cdot16+15$  であるから、この MN を 16 進法で表すと DEF<sub>(16)</sub>、すなわち数学でよく用いられる definition の短縮形に見える。同様に、MN =  $51966=12\cdot16^3+10\cdot16^2+15\cdot16+14$  を 16 進法で表すと CAFE<sub>(16)</sub>になる和方陣よかった、講義で、「

る和方陣もあった。講義で 例示した2進法の方陣か ら発想したものと思われ る。これを参考に、MN = 64206<sub>(10)</sub> = FACE<sub>(16)</sub>となる

×	1	3	29
2	2	6	58
9	9	27	261
41	41	123	1189

積方陣をつくってみた(図9)。

#### 5) MN を回転すると英単語

MN が 663 となる和方陣などがあった。180 度 回転すると、デジタル数字で「EGG」と読める。

#### 6) その他

これら以外に、特徴のある MN としては、次のようなものがあった。

- ・288120 (裏返しても051885と読める)
- ・986 (180 度回転しても 986 と読める)
- ・8532110 (フィボナッチ数もどき)
- . 999999
- ・自分の誕生日、など

# ② MN が特徴ある文字式

例えば、MN が n(n+1)(2n+1)/6 となる和方陣や、MN の指数が n(n+1)/2 となる x の冪乗の積方陣等があった。

#### (3) MN がことば

図4のように、文字式や片仮名からなる方陣で、 MNの順序を適宜並べ替えると英単語や日本語と なるようなものである。

#### ④その他

同じ生成行と生成列をもち、MNも同じ値になる2次の和方陣と積方陣の組を作成した学生がいた。2次であるため、あまり面白さは感じられないが、一般の次数で考えても、そのような方陣の組の存在は容易に示すことができる。しかし、整数のみでは構成できない。分数等を使えば容易に作成できるが、方陣に現れる数に何らかの統一感

やバランスをもたせようとすると、相応の手間が かかりそうである。

#### (2)総和に特徴がある方陣

方陣の中のすべての数の和を、単に「総和」と呼ぶことにする。ラテン積方陣については、生成数と総和の間に面白い関係がある(湯澤、2008)。その関係を利用して作成した作品が図10で、総和が1234<sup>2</sup>となる積方陣である。一般の次数でも、同様の結果が得られる。様々な数学的知識や対称性などが組み込まれた方陣である。

×	1	11	111	1111
1	1	11	111	1111
11	11	121	1221	12221
111	111	1221	12321	123321
1111	1111	12221	123321	1234321

図 10

# (3)整数ではない方陣

#### ①整数以外の数による方陣

#### 1)極形式の複素数からなる積方陣

図11は、複素数の極形式による積方陣である。

×	2(cos(π/7)+isin(π/7))	5(cos(2π/7)+isin(2π/7))
2[cos(π/7)+isin(π/7)]	4[cos(2 π /7)+isin(2 π /7)]	10(cos(3 π /7)+isin(3 π /7))
5(cos(3 π /7)+isin(3 π /7))	10{cos(4 π /7)+isin(4 π /7)}	25(cos(5 π /7)+isin(5 π /7))

図 11

極形式による積に偏角の和が現れる,という特徴が表現されている。この発想をもとに,筆者が次のような積方陣を作成してみた(図 12, 13, 14)。ただし,スペースの関係から,図の一部または全体を極形式ではなく,極座標で表記してある。また,図 12, 13, 14 は,いずれも偏角が  $|\pi|/6$ ,  $2\pi/6$ ,  $4\pi/6$ ,  $5\pi/6$ ,  $7\pi/6$ ,  $8\pi/6$ ,  $10\pi/6$ ,  $11\pi/6$  である複素数から生成されているため,MN の偏角はこれらの和で  $8\pi$  となり,MN

×	(2, π/6)	(2, 2π/6)	(2, 4π/6)	(2, 5π/6)
(1,7π/6)	(2, 8π/6)	(2,9π/6)	(2, 11 π/6)	(2, 12 π/6)
(1, 8π/6)	(2, 9π/6)	(2, 10 π/6)	(2, 12 π/6)	(2, 13 π/6)
(1, 10 π/6)	(2, 11 π/6)	(2, 12 π/6)	(2, 14 π/6)	(2, 15 π/6)
(1, 11 π/6)	(2, 12 π/6)	(2, 13 π /6)	(2, 15 π /6)	(2, 16 π/6)

図 12

自体は実数となる。

図 13 は図 12 の方陣部分を通常の表記に書き改めたものに過ぎないが、印象はかなり異なる。図 12、13 において、生成行の複素数の絶対値を 2 としてあるのは、図 13 に分数が現れないようにするためであるが、逆に、この絶対値をすべて 1 にしておけば、方陣自体は複雑に見えるもののラテン積はいつでも 1、という積方陣になる。

×	(2, π/6)	(2, 2π/6)	$(2, 4\pi/6)$	$(2, 5\pi/6)$
(1,7π/6)	-1-√3i	-2i	√3-i	2
(1,8π/6)	-2i	1–√3i	2	√3+i
(1, 10 π/6)	√3-i	2	1+√3i	2i
(1, 11 π/6)	2	√3+i	2i	-1+√3i

図 13

図 14 は、図 12、13 と生成数の偏角は同じであるが、生成行と生成列への分け方を変えてある。それだけの操作で、方陣は大幅に変化する。MNは 1 で、総和は 0 である。

×	$(1, \pi/6)$	$(1,4\pi/6)$	$(1,7\pi/6)$	(1, 10 π/6)
(1 <b>,</b> 2π/6)	i	-1	-i	1
(1,5π/6)	-1	-i	î	i
(1,8π/6)	-i	1	i	-1
(1, 11 π/6)	1	i	-1	-i

図 14

#### 2) 1の3乗根ωによる方陣

103乗根である複素数 $\omega$ から生成される積方陣があった。ただ、同じ値 $\omega^2$ が並ぶだけの方陣であったため、それを筆者が改良したものが図15である。MN は1で、総和は0となる。

×	1	ω	$\omega^2$
1	1	ω	ω²
ω	ω	ω²	1
$\omega^2$	$\omega^2$	1	ω

図 15

#### ②文字式による方陣

これは、図4のように、文字式からなる方陣で、MNの文字の順序を適宜並べ替えると英単語になるようなものである。ただ、数学的内容とは少し離れるが、MNを適宜並べ替えて英単語を作るの

ではなく、アルファベット順やその逆順等、既知 の一定の規則で並べると、自然に英単語となるよ うにつくる、というこだわり方もある([2])。

#### ③関数を用いた方陣

講義で指数表記の積方陣を例示したため、次のような作品が提出された。

- 対数の和方陣
- ・三角関数の和方陣

#### ④代数学的対象を用いた方陣

#### 1) 巡回置換からなる積方陣

図 16 は、長さ 8 の巡回置換 $\sigma$  からなる積方陣である。

# 2)整数の剰余集合からなる和方陣

mod2 による整数の剰 余集合 Z₂ の元からなる 和方陣があった。2 を法 としたのは、方陣全体 に、「1」を「0」の形に 配置する視覚効果を考

	×	id	$\sigma^2$	$\sigma^4$	$\sigma^{\epsilon}$
:	σ	σ	$\sigma^3$	σ5	$\sigma^7$
	$\sigma^3$	$\sigma^3$	$\sigma^5$	$\sigma^{7}$	σ
	σ5	$\sigma^5$	$\sigma^7$	σ	$\sigma^3$
:	$\sigma^7$	$\sigma^7$	σ	$\sigma^3$	$\sigma^5$

えてのことであった。そ

図 16

の他の数を法とすれば,巡回置換と同様の和方陣 が作成できる。

# 5その他

#### 1)整数にアルファベットを対応させた方陣

実質的には整数の方陣であるが、暗号のように、数にアルファベット対応させる規則表をつくり、その対応規則に基づき、整数の方陣をアルファベットの方陣に変換したものである。MNをこの規則で翻訳すると英単語になる。ただ、数とアルファベットとの対応規則が恣意的であったため、解読に必然性を見出し難いのが残念であるが、作成には相当の時間を要したものと思われる。

#### 2) カタカナからなる方陣

8個のカタカナ {タ, ノ, シ, イ, ス, ウ, ガ, ク} を生成数とし、「生成行、生成列から選ばれた二字を適宜並べて単語と見なす」ことを演算とする和方陣があった。MN をうまく並べ替えると「タノシイスウガク」となる。

#### (4) 方陣全体に特徴があるもの

#### ①実生活の中の方陣

図17は、バスの時刻表の一部分が和方陣となっていた、という発見である。カレンダーが和

方陣となることは よく知られている が、それ以外にも、 身近な実生活の中 に、ラテン型方陣 と見出せるところが おもしろい。

+	0	4	8	12
10時11分	11	15	19	23
13 時 23 分	23	27	31	35
15 時 24 分	24	28	32	36
21 時 12 分	12	16	20	24
	_	1		

図 17

# ②部分に区切ると和方陣

図 18 は、全体としては和方陣にも積方陣にもなっていないが、3次の部分方陣に区切ると、それぞれが和方陣となっている。さらに、この9つ

12	11	15	3	8	5	8	5	11
7	6	10	5	10	7	9	6	12
6	5	9	9	14	11	12	9	15
6	3	7	8	10	7	6	3	9
13	10	14	5	7	4	12	9	15
7	4	8	7	9	6	8	5	11
11	12	9	3	5	6	9	12	8
7	8	5	4	6	7	5	8	4
4	5	2	6	8	9	7	10	6

図 18

の部分方陣を、その MN で置き換えてできた方陣が、また和方陣となっている(図 19)。もとの方陣全体もラテン型方陣にできるとさらに興味深

+	13	10	15
14	27	24	29
11	24	21	26
8	21	18	23

図19

#### ③3次元の和方陣

生成数を空間的に配列した3次元3次の和方陣があった。ただ、すべての数を見えるように2次元の紙上に表現することが煩雑となるため、その簡潔な表現方法を考案する必要がある。

#### ④その他

方陣全体に特徴があるその他の方陣としては、 次のようなものがあった。

- 1) 方陣全体の数の配置が、線対称かつ点対称 になっている整数の積方陣
  - 2) 方陣全体の記号の並びが文字に見えるもの mod2による整数の剰余集合 Z<sub>2</sub>の元からなる

和方陣で、方陣全体でみると2種類の記号の並びが「0」に見えるように並べてある(前述)。

#### (5) その他

以上の他に、2009年度には、ラテン型方陣とは言えないものや未完成のもの、あるいは特徴のないもの等も見られた。2012年度ではそのような作品は見られなかった。未完成の原因は、主に次のようなものであった。

# ① MN が存在しない、あるいは不明確なもの

例えば、漢字の偏と旁(つくり)を、それぞれ 生成行と生成列に配置し、その組み合わせで漢字 からなる方陣をつくったものの、生成数をすべて 組み合わせた MN に相当する漢字や言葉まで考 えていなかったもの、などである。

#### ② MN 等に意味が見出せないもの

例えば、正方形の区切り方(縦に2分割、右下がりの対角線で2分割、など)を図で表現したものを生成数とし、それらを生成行と生成列に配置して、各区切り方の図を重ね合わせてできた新たな区切り方の図を演算結果とするものである。MN はそれらすべての区切り方の重ね合わせとなるはずだが、MN にも、生成数にも、方陣全体にも特に意味が見出せなかった。

# ③アイディアを完遂できなかったもの

例えば、和方陣でもあり、かつ、積方陣でもあるような方陣を作成しようとしたが、部分的にしか達成できず、全体としては、ごく普通の和方陣となってしまったもの、などである。

筆者自身の方陣づくりの中で、アイディア倒れとなった例としては、フィボナッチ数列  $\{Fn\}$ が  $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{F_i}{2^i} = 2$  を満たすことから ([5])、生成列を $\{F_1/2, F_3/2^3, \cdots\}$ 、生成行を $\{F_2/2^2, F_4/2^4, \cdots\}$ とする無限次元の和方陣を考えてみたが、MN = 2 とはなるものの、全体としてあまりおもしろく思えない。同様に、生成列を $\{1, -\mathbf{x}^2/2\}$ 、 $\mathbf{x}^4/4$ ,  $\cdots\}$ 、生成行を $\{\mathbf{x}\mathbf{i}, -\mathbf{x}^3\mathbf{i}/3\}$ 、 $\mathbf{x}^5\mathbf{i}/5$ 1、  $\cdots$ とする無限次元の和方陣の MN は、オイラーの公式から  $\mathbf{cosx}$ + $\mathbf{isinx}$  となるが、これも全体としてあまりおもしろく思えない。

しかし、例え方陣が完成しなかったとしても、このような試行錯誤をしている段階で、学習者がフィボナッチ数列の基本性質や、Lucas 数列、黄

金比などとの関連といった新しい知識に触れたり、オイラーの公式やテイラー展開に関する理解を深めたり、あるいはそれらの知識を定着させたりする機会となり得る。このことは、算数・数学を学ぶための、方法であり、内容であり、目的でもある算数・数学的活動に対し([9])、ラテン型方陣が、その役割を有機的に担う教材の一つとなり得ることを示唆していると考えられる。

# 5. 考察

ここでは、提出されたオリジナル方陣の種類や、 そこに併記してもらった自由記述による感想を分析することにより、ラテン型方陣の作成・共有活動を教材化する際の示唆を得たい。

#### (1) ラテン型方陣をとらえる枠組み

本研究では、提出された方陣の大まかな傾向を 見るため、まず表1のような分類を行った。これ は授業を設計したり、学習者の支援・指導をした り、あるいは授業を分析したりするといった授業 者、研究者の視点を示しているが、方陣づくりを している学習者自身が、意識的にこのような視点 をもつことができるようになると、類比が類比を 呼び、新たな領域の方陣に気付いたり生み出した りする創造的な思考の原動力にもなる。つまり、 授業者、学習者の双方にとって有要な視点である。 そこで、ここでは、表1の分類をさらに構造化す ることを試みる。

まず、2次元の方陣を2項演算の結果または定 義と考えれば、それをとらえる基本的な視点は、 定義域・値域と演算である。

しかし、単に定義域の適当な要素を縦横に並べ、 ラテン型方陣ができたとしても、特に驚きも面白みもないものが大半となる。そこで、「定義域・ 値域」と「演算」を固定した際、「方陣の特徴を 決定」するものが「生成数の選択と配置の仕方」 である。そして、方陣の特徴が表出する場面が 「MN」と「総和」、および「方陣全体」などである。 また、当初の方陣の特徴に多様性を加えるものと して、MN や方陣自体の回転等の「演出」がある。 以上の基本的な分析に基づき、表1を構造化し

たものが下記の枠組みである。個々の方陣の特徴

は、これらの観点を多次元的に組み合わせたマト

リクス上の交点として, 時に複数の交点として捉 える事ができる。

#### 〈ラテン型方陣の基本的枠組み〉

- ①対象範囲(定義域·値域)
  - 1) 数学的対象
    - ア)数
      - a) 数概念(整数, 実数, 複素 数等)
      - b)数表記(分数·小数表記, n進法,極形式等)
    - イ) 文字式
    - ウ) 関数(指数,対数,三角関数等)
    - エ) その他 (剰余集合, 置換等)
    - 2) 数学外の対象
      - ア)ことば
        - a) 日本語(漢字, カタカナ等)
        - b) 英語等(単語, 文等)
      - イ) その他(和音コード等)

#### (2)演算

- 1) 数学的演算
  - ア)和
  - イ) 積
  - ウ) その他(置換の合成等)
- 2) 自分で定義(「文字を並べる⇔和」等)
- ③方陣の特徴の決定
  - 1) 生成数の選択と配置の仕方
    - ア) 規則性 (等差, 等比, 反復性等)
    - イ) MN. 総和等からの「逆算」
    - ウ) その他
- ④方陣の特徴の表出場面
  - 1) MN
    - ア)対象範囲内の特徴ある対象 (特徴的な数,式等)
    - イ)対象範囲外の対象と見なせる (文字式が英単語と見なせる等)
  - 2) 総和
    - ア)対象範囲内の特徴ある対象 (特徴的な数,式等)
    - イ)対象範囲外の対象と見なせる (文字式が英単語と見なせる等)
  - 3) 方陣全体
    - ア)次数

- イ) 次元
- ウ) 対称性
- 工) 複合性(部分方陣等)
- オ) 実生活の中の方陣
- カ) その他(視覚的特徴等)
- 4) その他
  - ア)複数の方陣との関係性 (MN が友愛数である2方陣等)
  - イ)複数の表出場面にまたがる特徴 (総和と MN に特徴がある 2 方陣等)
  - ウ) その他

#### ⑤演出

- 1) 対象
  - ア) MN
  - イ) 総和
  - ウ) 方陣全体
- 2) 方法
  - ア)移動(回転,裏返し,鏡文字等)
  - イ) 置き換え(数と文字の対応表等)
  - ウ) その他

# (2) 感想コメントの分析

ここでは、オリジナル方陣に併記してもらった 自由記述による感想を分析する。

# ①多様な既習内容を振り返る契機となる

オリジナル方陣の作成は、制限を加えなければ、 既習内容のすべてを対象とする数学的活動となり 得る点が特徴の一つである。このことを示す感想 として、次のような記述が見られた(各文末の4 桁の数字は、感想の整理番号)。

- ・「…高校のときに習ったことなどをうまく活用できないかなど試行錯誤しました。教材研究をしている中で、微積や三角関数、指数・対数にも触れ、長時間数学と向き合うことができたと思います。…」(1205)
- ・「三角関数や数列など、色々な分野に目を向けて探すことができ、…」(1207)
- ·「…その中で、文字をつかったり、対数を考えたり、高校までの数学知識をフル活用して取り組み、…」(0901)
- ・「いろんな関数をためしてやってみたので、 作っていて楽しかった。…」(0926)

②自分とは異なる見方・考え方・感じ方にふれたり, 関連する他の数学的内容に関心をもつ契機となり得る

仲間と作品を共有したり、自分で作品をつくり 出すために様々な資料を調べたりすることは、単 に既習内容を振り返るだけでなく、自分とは異な る他者の見方・考え方・感じ方にふれたり、それ までは知らなかった知識に出会ったり、関心を もったりする機会となり得る。例えば、次のよう な記述が見られた。

・「…今回,このラテン型方陣をやるにあたって、ラテン方陣や魔方陣のことを調べる機会に出会えました。又、オイラー方陣というのがあることも知りました。このような、パズルやクイズは昔から苦手で四苦八苦したものの、新たな分野に触れてよかったです。視野が広がったといえるほど理解できていないのが現状なので、こういった数字のゲームを自分で挑戦しようと思います。… | (0914)

#### ③発想力,数学的感性の必要性

幅広い既習内容や、膨大な可能性の中から、自 分なりの納得感に基づいたオリジナルの方陣を作 成するためには、自由な発想力や数学的な感性が 要求される。このことを示す感想として、次のよ うな記述が見られた。

- ・「…今まで学んできた内容を思い出し,美しいなと思ったり,面白いなと感じたものを使ってみた。…」(0922)
- ・「美しい方陣にしあがったと思う。計算は少 し面倒だが、少ない数からやれば、面白さに気 がつくと思う。」(0924)
- ·「…もっと数学的センスを輝かせるために頑張らないといけないなあと思いました。」(0906)
- ・「…ラテン型方陣の利用は知識やセンスを必要とするなと感じました」(0907)
- ·「作ってみると楽しかったけれど、もっと見た人が驚くものをつくれたらよかった。…」 (0902)
- · 「…自由な発想力の無さを感じました。…」 (0903)
- ·「…なかなか納得のいくものが見つからず苦戦した。…」(0901)

・「以前、オリジナル定理で考えたものと同じだが、その時にみつけた嬉しさや形のキレイさが忘れられなかったので、このラテン型方陣でも取り上げた。定理とは違い、自分の感覚で、"美しい"とか"不思議"と決めて良いので、楽しんでできた。」(0912)

・「…うまく言葉がつくれず、強引なところがあって、きれいなかたちのものにはならなかった。うまくつくってみんながおどろくようなラテン型方陣をつくってみたいと思った。」(0908)・「数学という枠を超えて、漢字や音楽を題材に考えることができて楽しかった。ラテン型方陣のルールがあるからこそ楽しめたこと。ルールの中での自由とはこういうものなのかと感じた。数学を深める事も大切。そして、数学を使って数学の枠を超える事も大切だと感じた。」(0915)

# ④活動のたのしさ,満足感

以上のように、オリジナル方陣づくりの肯定的な側面を体験できれば、その活動が愉しく、達成感や満足感が得られる。それを示す感想として、次のような記述が見られた。

- ・「…オリジナルを考えてみると、その考えている時間は、時間の流れが速く感じたり、納得いくものを求めて、試行錯誤したりと楽しかったです。」(1204)
- ・「…オリジナルのラテン型方陣を作るのはとても楽しかった。かなり夢中になって探したが、私の発想では3つくらいしか思いつかなかった。他のみんなのアイデアが早く知りたいと思った」(1207)
- ·「… (オリジナル) 定理 (の探究課題) と同じように楽しい時間でした。…」(1209)
- ・「…自分なりにおもしろい作品ができたと思う。他の人の作品でもっとおもしろいものがみれそうなので、楽しみである。」(0921)
- ・「…いろんなラテン型方陣を考えている時間はとても楽しく、思いついた時の気持ちよさがとても快感だった。」(0911)
- ·「…数学の楽しさ、考えることの奥深さを感じることができた。」(0901)
- ・「…試行錯誤の末ようやく完成し、達成感が

得られた。| (0916)

#### ⑤課題の難しさ

一方、活動の自由さや対象範囲の広さ、その中から自分なりの作品を創り出す発想力や感性が要求される点について、困難を感じている学生も見られた。ただ、今回の実践においては、出題から作品提出までの期間が5日間と短かったり、複数の課題が重複して出題されたり、といった時間的な要因も影響しているものと考えられる。

- ·「…私にとってはとても難しく感じ、思い通りにいきませんでした。…」(1208)
- ・「自由に作っていいということが逆に悩みました。…いろいろ考えましたが似たようなものになったりとうまくいきませんでした。…」(0903)
- ・「数字を英語にしたり、横や逆向きにしたり、また日本語にしてみたり、ゴロを調べたりと、見つけるのに時間がかかって、とても大変でした。…」(0906)
- ・「…いろいろ試行錯誤をしていくことが楽しいことでもあるがとても苦しいことだということをとても学ぶことができた。」(0909)
- ・「何でもよいと言われたので、逆にとても難 しかったです。」(0920)

#### ⑥作品例示の仕方の影響

困難さを感じさせる要因の一つとして、オリジナル方陣を作成する前の、作品例示の仕方がある。 それは、例示された方陣のイメージに縛られやすい面があるということである。例示する方陣や例示の仕方、カリキュラム等に工夫が必要である。

- ・「…私自身, 先生の見せてくれたものをベースにして考えてしまい, 2,3日悩みました。…」(1204)
- ・「先生をうならせてやりたいと思い、色々と 考えましたが、結局先生が授業で紹介してくれ たものを真似することしかできませんでした。 すごく悔しいです。」(1209)

#### (3) 教授学的示唆

以上の分析を踏まえ、ここでは、教員養成を含めた教師教育および初等・中等教育における、学習指導やカリキュラムの構成等について考察する。

#### ①ラテン型方陣の定義を明確に

表1で見たように、2009年度の実践で見られた逸脱例の多くは、MNが存在しなかったり不明確であったりするため、ラテン型方陣とは言い難いものであった。MNが存在しない方陣は容易に作成できるが、数学的な面白さはあまり期待できない。反例を示すなどして、定義を明確に共有する必要がある。

# ②目的や個に応じた、対象範囲と例示の調整

全く制限を加えなかったり、逆に例示を多くし過ぎたりしても、適切な活動は生まれない。また、どのような例を示すかによっても、活動は大きく影響される。例えば、本実践のように、MNを180°回転すると正解となる例や、MNが英単語となるような例等を示すと、興味・関心が数学的な内容から少しずれてしまったり、逆に自由になりすぎて手がつかず、困難性を感じてしまったりする場合もあり得る。従って、授業の目的や個に応じて、対象範囲と例示を調整する必要がある。

時間的な余裕があまりなかったり、特定の単元の学習内容の習得が重点であったりするような場合には、例えば、「分数の方陣で」とか、「極形式を使って」、「積方陣で」などと、対象範囲や演算、領域などを指定すれば、その単元や領域の理解の深化や習得につながる。また限られた範囲での探究的な活動にもなる。そして、一連の活動終了後、様々な種類の方陣を示したり示唆したりして、全員を対象としない自由課題としたり、そこで提出された作品を授業中に短時間で共有したり、教科通信として配布し共有する等の方法も考えられる。

#### ③総合的な学習の時間等の利用

初等・中等段階における全く自由な出題としては、総合的な学習の時間や、自由研究の課題例などとして取り上げることも考えられる。本実践で提出された漢字や、言葉、英単語、暗号などといった様々な対象にも、各自の関心が赴くままに取り組むことができるからである。

#### ④ 敢えて自由に考えさせる

課題の自由さに戸惑う学習者への配慮が必要となる一方で,自由な思考を愉しめるような子ども,教員であってほしいし、そのような子どもを育て

られる教員であることが望ましいとも考える。時間を確保できた場合には、敢えて自由な作成活動に取り組ませ、他者の作品を味わい、評価し合うことなども通して、数学的な発想や感性等を含めた総合的な力を育むことも必要であろう。そして、それを実践し得る有機的な多様性を有している点が、ラテン型方陣の特徴でもある。

⑤作品の共有を出題形式や掲示,教科通信等で時間に余裕がある場合には、作成者による出題形式と探究活動とを組み合わせることも考えられる。また、和算の算額のように作品を掲示して鑑賞したり、教科通信等により共有したりすることもよいであろう。

# ⑥興味深い失敗例、未完成の例等も共有する

前にも述べたように、オリジナル方陣の作成活動においては、例え、目指す方陣が完成しなかったとしても、試行錯誤をしている段階で、当該概念の理解が深まったり、定着したり、あるいは関連する新しい知識に触れたりする機会が、自然と生じ得る。このため、結果に関わらず、試行錯誤の活動自体が意味のあるものとなる。また、そこでの失敗例や未完成の例等を共有することにより、それを聴いた他の学習者が、その知識の理解を深めたり、改善案を思いついたり、さらにはその発表に触発されて、新たな方陣や、それ以外の数学的内容に興味をもったりする機会ともなり得る。今回の実践では、そうした失敗例や未完成の例等を共有する場は設けなかったが、今後の実践で試行してみたい。

#### ⑦自然なカリキュラムの構成に活用する

完成した方陣であっても、未完成であったりうまく行かなかったりした方陣であっても、それらの中に、次の学習内容や単元、関連領域とのつながりを見出すことができれば、無機的で強引なカリキュラムよりは、多少なりとも学習者の思考に寄り添った自然で有機的なカリキュラムを構成できる可能性が生じる。そうした場面でも、完成作品や失敗例、未完成の例等を共有する活動は活用できる。

#### 6. まとめと課題

本研究では、前回の研究を発展させて試みた教

員養成課程における教材開発とその実践の中で、 学習者自身によるオリジナル方陣の作成と共有の 活動に焦点を当て、その結果を分析することによ り、教員養成を含めた教師教育および学校教育に おける、教材の開発やカリキュラムの構成等に関 する示唆を得た。

今後の課題としては、今回考察の対象となった 活動を含む一連の研究と実践の中で、まだ分析の 終わっていない活動について研究を進め、新たな 示唆を得ることである。

# 【引用·参考文献】

[1] 湯澤秀文, ある方陣を素材とした教材の開発, 数学教育論文発表会論文集, 41, 213-218, 2008 [2] 湯澤秀文, 第 41 回数学教育論文発表会配布資料, 2008

[3] 國本景亀他、「全体論的」数学教育の理論と実践に関する研究、平成15~17年度科学研究費補

助金(基盤研究(C))研究成果報告書,2006 [4] 國本景亀,機械論から生命論へ(練習に焦点をあてて):機械的練習から生産的(創造的)練習へ,日本数学教育学会誌88(2),12-19,2006. [5]R.A. ダンラップ,黄金比とフィボナッチ数,日本評論社,p.143,2003.

[6] 湯澤秀文他,沖縄県の複式学級における算数科 指導に関する基礎的研究,琉球大学教育学部教育 実践総合センター紀要 14, 23-34, 2007

[7] 佐々祐之他, 複式学級における算数科指導の改善に関する基礎的研究, 南太平洋海域調査研究報告, No45, 39-46, 2006

[8] 小学校学習指導要領, 文部科学省, 2008.3 [9] 中学校学習指導要領, 文部科学省, 2008.3

[10] 小学校学習指導要領解説算数編, 文部科学省, 2008.6

[11] 中学校学習指導要領解説数学編,文部科学省,2008.7