《数学科》数学で考え合う力をはぐくむ授業デザイン：数学モデルを創り上げる活動を通して

数学で考え合う力をはぐくむ授業デザイン
— 数学モデルを創り上げる活動を通して —

西里優子* 新垣裕己* 仲松 研* 湯澤秀文**
*琉球大学教育学部附属中学校 **琉球大学教育学部

I 主題設定の理由

知識基盤社会化が急速に進む現代社会において、社会文化的進化のためのツールを駆使し、激変する変化に対応した考え方で新しい解を探究する力はますます必要とされる能力といえるであろう。

次代を担う子どもたちに必要な能力をはかる経済協力開発機構（OECD）の国際学力調査2009年PISA調査結果によると、我が国の読解力問題の平均正答率は63.7%（OECD平均59.2%)、数学的リテラシー問題の習熟度レベル5以上は20.9%（OECD平均12.7%）といずれも高い正答率を保っている(1)。

我が国の読解力問題の平均無答率は9.0%（OECD平均7.7%)、数学的リテラシー問題の平均無答率は11.9%（OECD平均12.1%）と同程度となっている。ここで注目すべき点は、平均無答率の内訳においては、複合的多岐選択形式の問題では低いが、自由記述形式の問題では高くなる傾向があり、数学的リテラシー問題の自由記述形式問題以外の平均無答率は7.2%（OECD平均7.9%）に対し、自由記述式問題の平均無答率は28.0%（OECD平均26.1%）と約4倍（OECD平均の約3倍）にもなっている点である(2)。

さらに、平成24年度の全国学力・学習状況調査の結果においても記述式問題を中心に課題が見られ、数学的結果の理由や問題解決方法の説明、判断の理由を数学的に解釈し、数学的な表現を用いて説明すること、数学的に表現された事柄を読み取る力が十分ではないとの分析がなされた(3)。

このような調査や分析結果から、事柄が成り立つ理由や概念理解、判断の根拠、思考プロセスなどを、数学的な表現を用いて図式で表現したり、自分なりに順序立てて記述したり説明することに課題があるといえるだろう。

本校では平成22年度から平成24年度まで、研究主題を「実生活に活かす力をはぐくむ授業の創造」として研究がすすめられ、数学科においても、実生活と数学を関連付けて問題解決できるようにするための授業研究、実践に取り組んできた。その実践を通して、生徒が日常と数学の関わりを意識して学習できるようになり、一連の数学的プロセスから実生活の文脈を数学的問題として捉え解決する力が育ってきた。また、表や数式、グラフなどの数学的な表現を用いて考えを整理したり、他者にわかりやすく説明したりしようとする態度が身についてきたことが成果としてあげられる。

しかし、生徒自ら思考をさらに深くすすめ、生徒どうしが数学的に考え合うために、数学的な思考力を高める指導(課題設定の工夫、数学的活動、教師の発問)を今後も継続して研究する必要があるという課題が残った(4)。

平成25年度5月に、本校生徒473名を対象にした数学の学習に関するアンケート調査を行った。(そう思う、どちらかというと思う、どちらかというと思わない、思わないの4つの選択肢で回答。)その結果、「課題に対して自分なりに考えようとしている」という質問に対して「そう思う」との回答は64.4%となっている。しかし、「課題に対して根拠をもとに順序立てて考えようとしている」に対して「そう思う」との回答は32.6%、「グループ活動で活発に議論し、意見や考えを比較、検討、吟味するようにしている」に対して「そう思う」と答えた生徒は34.4%となっている。

このことから、本校生徒の数学に対して自分なりに解決しようとする意欲は認められたが、自ら根拠を見出したり考えを整理したり、お互いの意見や考えを十分に深められていないと分析できるだろう。

前述のOECD調査結果と、本校生徒の数学の学習の現状から、数学的な思考力を養い考え合う力をはぐくむことが、その課題を解決することに繋がると考え、数学で考え合う力を高めたい。そして、昨年度まで培ってきた問題を解決しようとする態度や他者にわかりやすく説明しようとする態度を礎として、本年度から本校全体で研究する協調学習における対話によって、個人やグループでの対話が問題を解決する有効な手立てとなりうる授業デザインを模索したいと考え、本テーマを設定した。

Ⅱ　本研究の目的

本研究は、問題を解決するために活用できる多様な数学モデルを創り上げる活動を通して、生徒同士の考えが共有できる学習課題の設定や、数学的思考を高めさせたりアイディアを組み合わせたりする授業をデザインし実践する。生徒の概念的理解・論理的思考の基となる「考える力」をより高めるために、記述や説明する手段としての「伝える力」、お互いの考えを比較・検討・吟味するための「考え合う力」をはぐくむ授業の研究、実践を目的とする。

Ⅲ　研究内容

本校数学科の研究構想図を図1に示す。

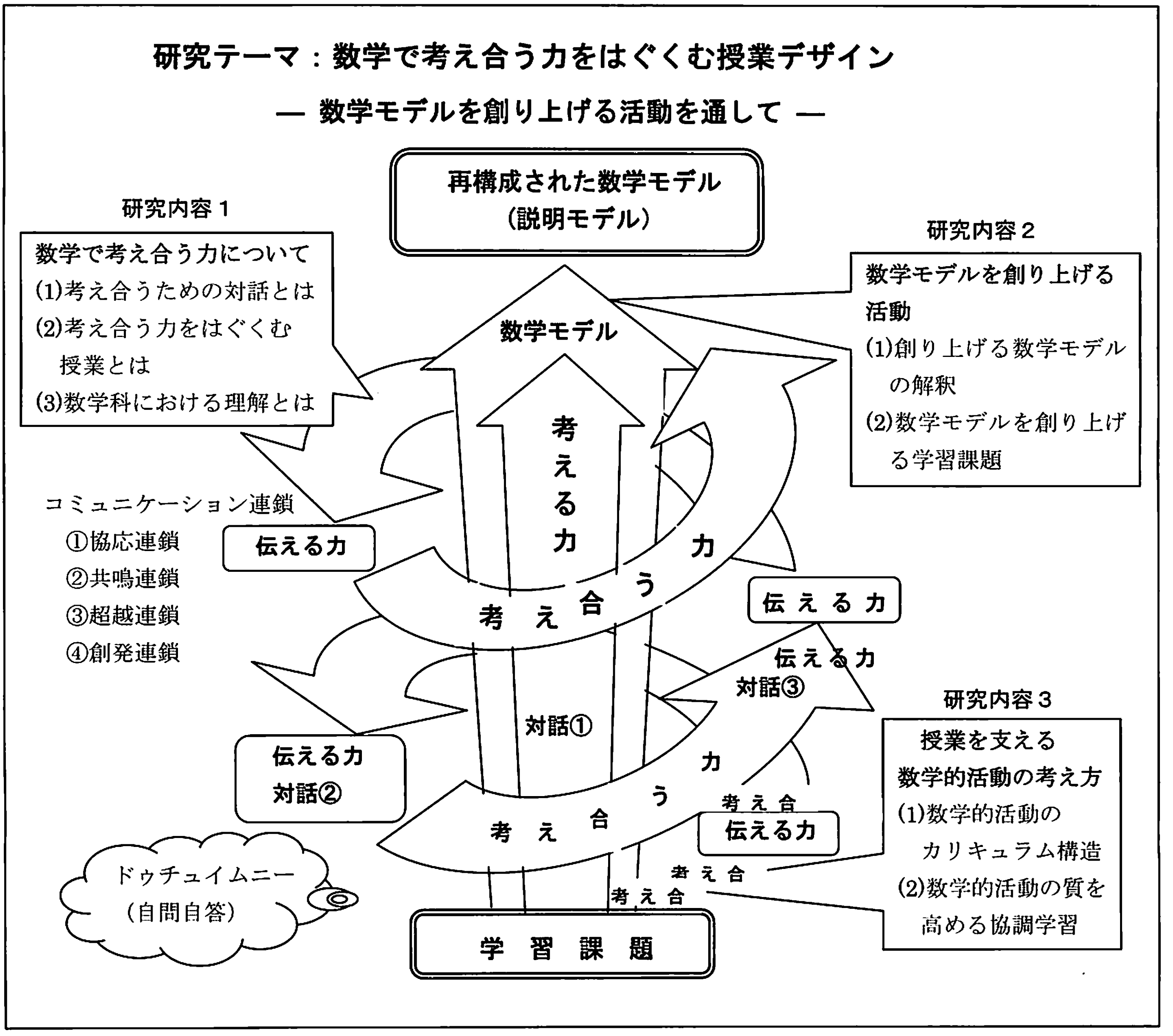


図1　本校数学科の研究構想図

「考え合う」活動は、正誤に関わらず疑問や推論など生徒自ら「考える」ことから始まる。そして、その各々の「考え」を持ち寄り「伝える」ことで成り立つ活動といえる。また、「考え合う」活動を通して、自らの「考え」だけでは及ばない新たな「考え」が構築され、さらに自らの「考え」が高まっていくことに繋がると捉え、「考える力」を柱として図１のように図式化し研究内容とキーワードを図中に示した。

１　数学で考え合う力について

(1)　考え合うための「対話」とは

本校数学科では「対話」を３つの面からとらえている。１つは自己との対話であり、主体的に自身の知識や既習事項から「考える」という活動である。２つ目は、その自己との対話の中から生み出された推論や思考を相手に「伝える」という活動である。３つ目は、伝え合った相互の考えを比較・検討・吟味し、新しい知識を構築するための「考え合う」活動である。その考え合う活動を通して、自らが構築した推論や理論を変容させ、さらに自身で数学的思考力をもって「考える」という自己との対話の連鎖が展開されると考える。このような３つの活動の連鎖を「対話」と捉えている。

小野寺・清水(2007)は、数学は数や記号を「言葉」として用い、数式の形で「文」を表現する一つの普遍言語であるとしている。「証明」あるいは「計算」は、それらの数学的文が連なった「文章」であり、数学を学ぶことは、数学的知識の獲得とともに、言語としての数学を身につけることでもある。また、思考することは自己との対話であり、議論することは集団でいっしょに考えることである。この意味でコミュニケーション能力と思考力とは表裏一体の関係で、数学的コミュニケーション能力は、数学的思考力と本質的に同じものとも言える[5]としている。

このことから、本校数学科では、「対話」を「考える」「伝える」「考え合う」という３つの活動の連鎖とし、その「対話」を高める力が数学的コミュニケーション能力と数学的思考力と捉える。

また、前述の調査分析結果からの課題である言語活動についても、数学的コミュニケーション能力と数学的思考力の育成を図ることが重要であると考える。

(2)　考え合う力をはぐくむ授業とは

本校数学科では、「考え合う力をはぐくむ授業」の研究、実践が、本研究でめざす生徒像である「自他の成長のために、主体的・能動的に行動できる生徒」の育成につながると考える。

その「考え合う力をはぐくむ授業」の展開のためには、「考える」「伝える」「考え合う」それぞれの場において数学的コミュニケーション能力を育成する必要があると考える。

江森（2006）は、数学学習におけるコミュニケーション連鎖の把握について、学習者間の思考の連続性という視点から、以下のように、協応連鎖、共鳴連鎖、超越連鎖、創発連鎖という４つの類型に区分している[6]。

①協応連鎖：	前言者の思考を考慮しながら自らの発言を連鎖させていく。
②共鳴連鎖：	省略された情報が受けての推論に基づいて補完される。
③超越連鎖：	受け手により補完された情報が送り手の意図を超え数学的知識の再構築をもたらす。
④創発連鎖：	参画している学習者いずれも所持していなかったアイディアが創発される。

本校数学科の「考え合う力をはぐくむ授業」の数学的コミュニケーションの目標段階を、創発連鎖を促す段階に至る授業とし、授業をデザインする際に各学習過程において、どの類型に属しているコミュニケーション連鎖が起こり得るかを想定し、創発連鎖に至るような授業の展開を図りたい。

また、本校の研究である「知識構成型ジグソー法」の授業においては、生徒の考え合う活動が、エキスパート活動、ジグソー活動、クロストーク活動に分かれている。各連鎖は授業のどの活動においても起こると予想されるが、各活動における各連鎖の起こりやすさを図２のように想定した。

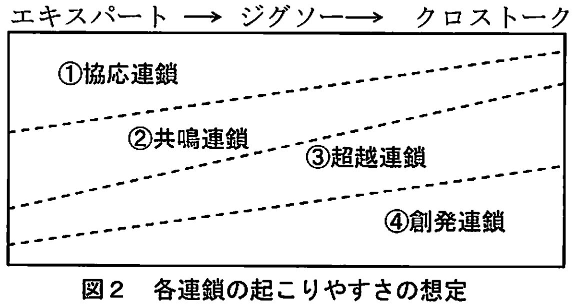


図２　各連鎖の起こりやすさの想定

それぞれの活動で、生徒に「考える」「伝える」「考え合う」ことを意識させ、お互いの考えを比較・検討・吟味させることで、４つのコミュニケーション連鎖を誘発させたい。

⑶　教科における「理解」とは

本校数学科では、数学的理解を Pirie と Kieren の超越的再帰モデルの小山(2001)による解釈 (7) と、中原 (1994) による van Hiele 化 (8) を基にし、理解の深化を以下の図のように捉えている。

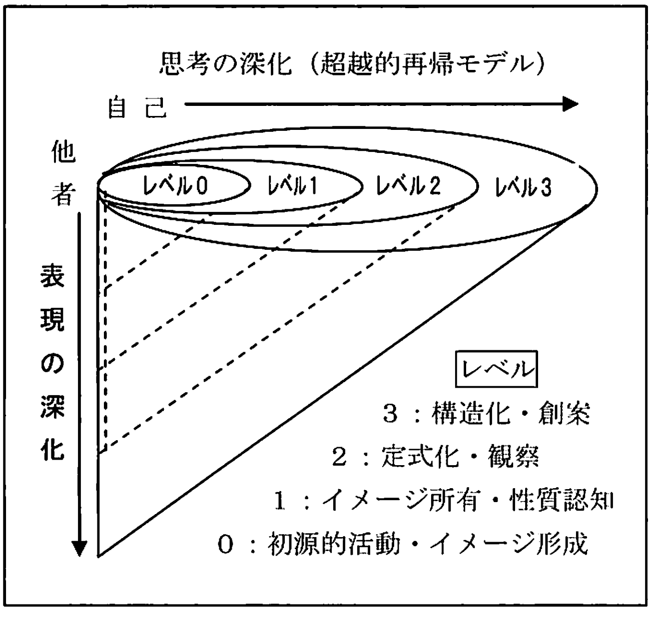


図３　本校数学科の捉える数学的理解

図３のように、数学的理解レベルをレベル０からレベル４までの４つの円錐で表した。各理解レベルは以下に示す通り、それぞれ２つの思考のレベルから成り立っている。

レベル０：初源的活動・イメージ形成

①初源的活動 (Primitive Doing)

具体物、図、記号などを用いて、理解の出発点となる活動をする。

②イメージ形成 (Image Making)

初源的活動に基づきながら、イメージをつくる。

レベル１：イメージ所有・性質認知

①イメージ所有 (Image Having)

抽象の最初のレベルであり、レベル０のイメージ形成からそのイメージを抽象し、一般化する。

②性質認知 (Property Noticing)

所有したイメージ間の共通性、相違性などに気づき性質を抽象する。

レベル２：定式化・観察

①定式化 (Formalizing)

レベル１の性質認知から気づいた性質を意識的に考察し、共通な性質を抽象し定式化する。

数学的な定義がなされ対象の集合が意識化される。

②観察 (Observing)

自分自身の思考構造を観察し、それらを矛盾なく組織化しようとする。

レベル３：構造化・創案

①構造化 (Structuring)

観察された結果を論理的に位置づける。自分の思考をある公理的構造の中におく。

②創案 (Inventing)

それまでのことに捕らわれないで、自由な角度から考えてみること。

「再帰」とは、外のレベルがすべて内部のレベルを含み、各レベルが直前のレベルを思考の対象として、より上位のレベルへと発展しており、上位のレベルへ進もうとして、うまくいかないときには下位のレベルへ帰り、下位のレベルの知識を修正・強化して再び上位レベルへと向かうことを意味している。

また、「超越的」とは、直前のレベルに依存しながらも、それを乗り越えて次の質の違うレベルへと発展することを表し、その際、単純に前のレベルの知識を積み重ね、組み合わせるだけではなく、新たなる創造が加わることを強調し、それが一度だけではなく何回も行われることを意味している。

本校数学科では、「数学的理解」を図３のように円錐形に捉え、横方向に「思考の深化」を、縦方向に「表現の深化」を表した。「思考の深化」は自己との対話による数学的思考の広がりを示し、「表現の深化」は他者に考えを伝える表現方法の広がりを示している。そして、自己と他者が関わり合うことで双方向への理解が広がると考える。また、この４つの円錐は理解のレベルが上位になるほど立体的に徐々に広がっていくものであり、複合的かつ力動的なものであると捉える。問題を解決するためには、４つの理解レベルの１つだけを使うのではなく、各理解のレベルで獲得した知識を合わせたり、下位レベルに戻ったり上位レベルを超えたりしながら、いくつかの理解のレベルを行き来して問題が解決されてい

くものと考える。そして、自由な角度から考えて新たな問題解決方法を発見し、自らの理解を通して、さらに新たな問題を生成し考えを発展させていくことが、「考える力」を高めることに繋がると捉える。

協調学習では、どの活動においても複数の生徒による学習となるため、一人ひとりのわかり方の違いを活かし、それぞれの理解を修正し組み合わせることで理解が強化され上位レベルへと広がりやすくなると考える。

そして「深い理解」とは、生徒が自身の見出した問題解決方法について、理解のレベルをどのように広げることで得た方法なのか、その過程や構成をきちんと把握し、他者に説明できる状態と捉える。「知識構成型ジグソー法」の授業における「理解の深化」とは、エキスパート活動で教師から与えられた部品をどのように解釈し、ジグソー活動でその部品をどのように組み合わせたのか、活動している生徒自身が数学的思考を用いて把握し、他者に数学的に表現し伝えることのできる状態だといえる。「伝える」活動において「理解の深化」の程度が表面化し、「数学的理解レベル」の到達度については、後述する創り上げた数学モデルにより可視化されると考える。

2　数学モデルを創り上げる活動

(1)　創り上げる数学モデルの解釈

本校数学科では、対象を数値的表現、代数的表現、グラフ的表現、幾何的表現などを用いて、より分かりやすく表現したモデルを数学モデルと捉える。

そして、問題を解決できる有効なモデルにするために、試行錯誤しながら修正・改良する段階を設けることで、再構成された数学モデルを創り上げる活動にしていくことが、数学で考え合う力をはぐくむ授業になると考える。

Clement (2008) は現象やパターンの記述だけではなく、それらの現象がなぜ引き起こされるのかを説明できる「理論的で質的なモデル」に着目し、これを「説明モデル」と呼んだ。学びの目標は、学習による概念変化であり、互いの考えを交換しながら意見や仮説を統合した抽象度の高い説明モデルを創る。この説明モデルによって、他者への説明活動の過程で、解法の正当化や批判、根拠づけが進み、概念的知識も構成されやすくなる [9] としている。

創り上げる数学モデルは、複数の数学モデルから、自らの経験則をとらえなおし、異なる経験則を持った他者をも説得できるような説明モデルと成り得る、再構成された新たな数学モデルである。

(2)　数学モデルを創り上げるための学習課題

生徒が数学モデルを創り上げる活動を通して考え合う授業の展開のために、最も重要となるのが学習課題の設定であり、次の３つの点に留意したい。

牧田・秋田 (2010) らは、教師が最初に与える問題を「学習課題」と呼び、既習事項や生活体験を用いて試行錯誤し、生徒の中に解決すべき問題意識として形成されていったものを「問題」と呼んであえて区別 [10] している。このことから、生徒の自発的な学習を促すには、解決したいという意識の持てる「問題」と捉えられる学習課題を与えることが、まず１つ目の留意点と考える。

２つ目は、与える学習課題の解を導くための数学的理解レベルの構成を把握し、到達をどのレベルに置くか見通した学習課題の設定である。図２で示した本校数学科の捉える数学的理解の４つの理解レベルに照らして、持ち寄るそれぞれの数学モデルがどの理解レベルであり、どのように組み合わせて問題解決のために必要な数学モデルに再構成するか、また、その再構成された数学モデルがどの理解レベルに達するかを把握して学習課題を与えることである。

３つ目の留意点として、活動から始まる数学への理解を重要視し、初源的活動を考慮した学習課題の設定である。中原(1994)は、初源的活動がレベル０に位置づけられており、概念の形成や問題解決にしても、授業において理解の出発点となる活動の場の設定が必要 [11] としている。与える学習課題が初源的活動を行うことが可能であるか、また、どのような具体物や図、資料などから活動を始めることが、より効果的に理解を広げていくかを熟慮したい。

3　授業を支える数学的活動の考え方

(1) 数学的活動のカリキュラム構造

本校数学科では、新たな知識構成や概念の構成、問題解決において初源的活動の場となる数学的活動の設定を重視している。

次の図４は、Lange (1987) による数学的活動の

カリキュラムを構造化した図である。

この枠組みは大きく二段に分かれる。上段は概念的数学化と呼ばれ、数学的概念を現実世界の問題に対応させて、現実世界の抽象化・形式化を果たすことで、数学的概念を明示化し、意識する再発明のプロセスである。

他方、下段は、上段で明らかにされた数学的概念を現実世界に活用するプロセスであり、こうした現実世界に関する数学的概念の開発と活用のプロセスは、二段構造に示唆され、再帰的な構造をなす。

ただし、下段の数学化の成果は、左右に分岐していて、それぞれ数学的な世界と現実世界へとフィードバックされ、生徒の学習段階に応じた数学的概念の精微化と、問題解決の必要度に応じた現実世界の数学的な構造化が果たされることになる[12]。

本校数学科では、昨年度までの3年間、PISA 調査の考えを基にし、実生活と数学とを関連付けた数学化サイクルの過程を重視した授業研究、実践に取り組んできた。

今年度からは、現実世界から始まる数学化という考え方に加えて、数学的な世界から始まる概念的数学化にも目を向けたい。このことは、中教審答申の改善の基本方針にある数学の内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校段階間での内容の一部を重複させ、反復（スパイラル）による教育過程を編成し、新たな内容を学習する際に、一度学習した内容を再度学習できる学び直しの機会の設定[13]にも焦点をあてることができると考え、数学的活動の枠組みを大きく捉え直した。

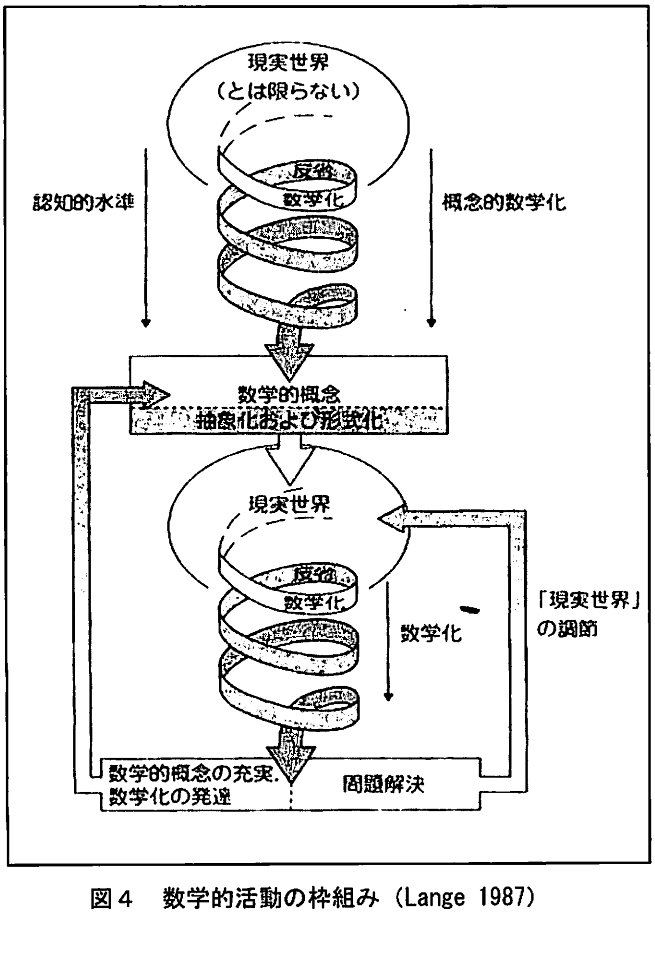


図４　数学的活動の枠組み（Lange 1987）

(2)　数学的活動の質を高める協調学習

数学的活動とは、生徒が目的意識を持って、新たな性質や考え方を見出そうとしたり、課題を解決しようとしたりする活動である。中学校数学科の目標の改善点である、基礎的・基本的な知識及び技能の習得と活用、問題解決に必要な思考力、判断力、表現力をはぐくむ、数学の学習に主体的に取り組む態度[14]を養う学習方法として「知識構成型ジグソー法」は効果的であると考えられる。エキスパート活動で与える部品は、既習内容及び習得させたい学習内容を含む。しかし、その部品について他者を納得させる説明ができるまで十分理解するのではなく、「分かりかけてきた」状態でジグソー活動を行うことで、グループの構成メンバーのコミュニケーションがさらに重要となり、「伝える」ことや「考え合う」ことを大切に学習することに繋がる。ジグソー活動では、エキスパート活動での学習内容を基に意見や仮説を統合し、他者をも説得できる説明モデルをメンバーが協力して創り上げる。クロストーク活動では、各グループの問題解決方法を確認し、学習のまとめとして、一人ひとりに学習内容を振り返る時間を与え、構成された知識の定着を図る。

根本(2004)は、生徒は自分の考えや行動を調整するために教えてもらったことを使うのであって、学習を通して自分にとっての意味付けをしており、その問題を通して自分はどのようなことを考えたのかを考える自分との対話を重視することが数学的活動の質を高める視点である[15]としている。知識構成型ジグソー法による授業で、集団による対話からの学びが自分との対話をより深め、生徒がともに学び合う授業をデザインしていきたい。

Ⅳ　授業実践

１学年「比例と反比例」（比例の利用）

１　単元について

⑴　主題　～芝を刈る作業プランを考えよう！～

⑵　目標

異なる事象の数量関係の特徴を「変域」「比例定数」などの数学用語を適切に使って説明でき、与えられた条件に見合う作業工程を自分なりに説明できる。

２　本実践の趣旨

本時の題材は、平成 19・22 年度「全国学力調査問題」Ｂ問題 $\boxed{6}$ を参考に教材を開発した。協調学習による建設的相互作用によって新たな発想や解法の必要性が生まれるのは、現在の学習内容から少しジャンプした程度の高い課題（第２学年内容相当）が適当だと判断したからである。その理由に次の２つを挙げる。１つめに、生徒が容易に解決できない高い課題は、グループ全員の知識を結束して挑まなければならないという切迫感から生まれる“チームワーク”や問題解決への動機付けが高まると考える。２つめに、より抽象度の高い問題を皆で考えることは、それぞれのメンバーが“個々の理解”に応じた解釈が予想される。グループ活動（ジグソー活動）を通して、一人が説明し、他方が聴き役に回ったとき、それぞれの問題解釈を言語化し、解決するための様々な思考の過程で個々の“深い理解”につながると想定する。一連の話し合い活動を通して生徒は、自ら発見した方略をよりよく記憶し、その後の問題解決学習に活用しやすい知識へ転移できると考える。

本実践の大半の時間は、生徒の主体的な話し合い活動である。「なぜ、そうなのか？」「どうしてそうでなければいけないのか」を個々の視点で考え、相方のアイデアを客観的に判断しながら問題解決に至るような話し合いが重要である。その活動自体が“深い理解”につながり高い記憶力につながる根幹と考える。クロストーク活動では、各グループの話し合いで得た“結論”を説明・発表活動を行う。他者のアイデアと自分のアイデアを比較・検討することで、そこで得た自らの知識を修正・整理できる。他者から“聴く”活動を通し自らのアイデアを得ることでさらなる問いに広げる指導が大切と考える。

３　実践内容

⑴エキスパート活動(ペア学習　２人×２０グループ)

①エキスパート問題

●Ａ芝刈り機　作業班

１００ｍ×８０ｍのサッカーコートの芝刈りをします。

１時間に４００㎡の芝を刈ることが出来る機械を使う

※難しい壁際や細かい作業が得意な　中型芝刈り機

●Ｂ芝刈り機　作業班

１００ｍ×８０ｍのサッカーコートの芝刈りをします。

１時間に８００㎡の芝を刈ることが出来る機械を使う

※広い場所での作業が得意な　大型芝刈り機

問題把握する中で、生徒はＡ・Ｂの芝刈り機のそれぞれの作業量（芝を刈った面積）ｙが、時間χに対して比例していることに気づく事ができる。これまでの学習から比例定数は、それぞれの機械の単位時間あたりの作業量と生徒は答えることができる。それぞれの機械の作業量が時間に対して比例する関係であることに気づけば、表・グラフ・式で表すことは容易である。生徒用の資料は、２つの作業別の２種類のプリントを用意した。そのワークシート資料の中味は、基礎・基本的なレベルの設問形式になっている。授業者は、生徒が設問をすすめながら自分自身で問題把握を確実に行い、机間指導の中で生徒の既習事項の定着具合を診断する意図がある。以下はプリントの設問内容の抜粋である。

①χ時間でｙ㎡の作業が出来るとして表を作ってみよう！
②作業全体の様子が分かる、グラフを作ってみよう！
③χ時間でｙ㎡の作業が出来るとして、式を作ってみよう
④χの変域はどうなりますか？不等号を使って表そう！

②生徒のエキスパート活動

エキスパート活動では、生徒は個別に与えられたA･B作業の資料を読み込んで、表･グラフ･式を作成する学習を行う。その活動を通して相方へ資料の説明が出来る程度の知識の習得を求められる。一方、生徒の既習内容の定着具合によって、エキスパート課題の理解や進度に差が出るので、活動前半は自力解決学習をメインとし､適度な時間(5~10分)を与えた。その自力解決学習の中で問題把握の弱いと判断される生徒へは、活動後半のペア学習の際、教師が介入

し個別の支援を入れるなどの配慮が大切である。

エキスパート活動は、座席が隣同士のペアで教え合い・説明活動を基本としている。資料は黒板に向かって、横列方向でA・B交互に配布した（図5）。

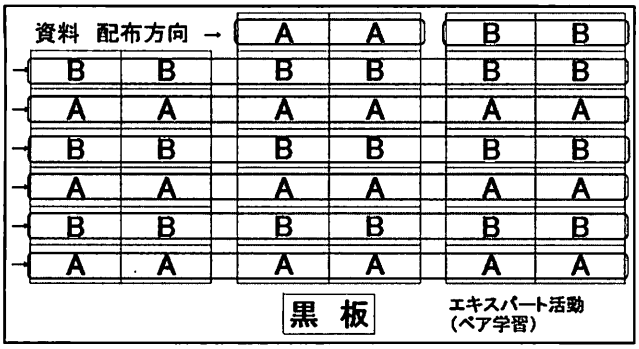


図5　学習形態（エキスパート活動）

(2)ジグソー活動（４人×１０グループ）

①ジグソー問題

> **２つの作業班が、性能の違う芝刈り機で、１００m×８０mのサッカーグランドの芝を刈ります。**
> **朝９：００開始～午後５：００終了の作業プランを作りなさい。**

ちょうど８時間で作業を終えるには、単一の作業だけでの工程では編成出来ず、自分たちなりに工夫した工程を開発しなければならない。その為、休憩時間やA・Bの個別作業などの時間帯を作業工程の中に上手に組み込む必要性が出てくる。作業工程を条件の８時間でやり終える“アイデア”を発見できるような建設的な話し合い活動が、ジグソー活動の肝となる。

ジグソー活動の中で考え出された作業行程を加工し他者へ説明するには、グラフを用いると便利であることに気づく事が大切である。本時に必要なグラフは、比例のグラフ（原点を通る直線）から更に発展的なグラフ（直線が屈折したグラフ）の見方・考え方に発展しなければならない。直線が屈折したグラフを式で表すには、１次関数（第２学年内容）の知識を要するので、本時の授業では特に触れていない。しかし、それぞれの直線が屈折する分岐点の存在からχの変域の必要性に気づかせる教師側の発問が大切である。

②生徒のジグソー活動

ジグソー活動では、エキスパートで得た知識・情報を持ち寄って新たな知識を構築するために、ペア学習から４人１組の男女混合グループに再編成する。条件の時間で作業完了するには、AとBの芝刈り機の個別作業では時間内（８時間）に仕事を終えることが出来ない事をエキスパート活動の中で気づいている。そこで、ジグソー活動前半はA・B作業班が協力した場合の作業状況を探ることになる。その為、個別作業のそれぞれの式・グラフ・表を根拠に新たな知識(式)を発見する話し合い活動が必要である。話し合いの中では、A・Bの機械の作業量に着目して（A＋B）という新たな比例定数の存在に気づくことで解決への足場掛けが作れる。A作業班・B作業班が協力して仕事を行う式を考える際、それぞれの仕事量に着目して対応表を作成しなければならない。対応表が完成すると、単位時間あたりの仕事量が(Aの比例定数)＋(Bの比例定数)＝(同時作業の比例定数)になっていることに気づきグラフ・式を作成することが出来る。

複数のパーツ（比例定数）を持ち寄って、自分たちの都合で組み合わせることで、グループオリジナルの作業プランになる。出来上がったプランには、異なる比例定数（変化の割合）を持った式が複数存在する。いくつかの作業工程をグループの実情に合わせて最適プランを作るという話し合いの質を高めれば、“理解の深さ”につながると考えられる。

ジグソー活動は、座席前後の男女４人のグループ編成を基本とした。生徒は、エキスパート活動から大きな座席の移動が少なくスムーズに展開する事が出来る。T字型に座席を組むことで、手持ちの発表ボードを皆が同一方向で見ることが出来る。また、後半、クロストーク活動で黒板前の発表をその状態で聴くことができるという意図がある（図６）。

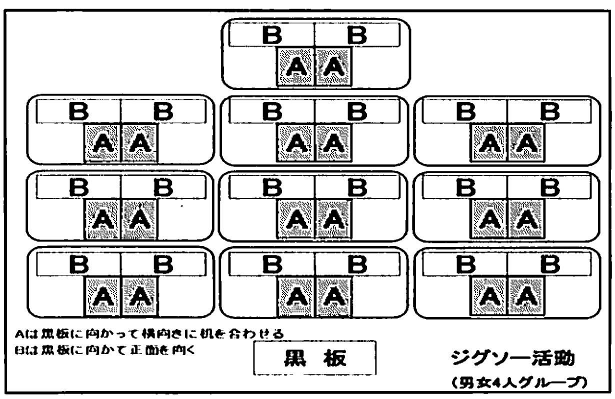


図６　学習形態（ジグソー活動）

4　実践内容の結果と分析

⑴ワークシートの分析より

①生徒の作品から

エキスパート活動後の生徒のワークシート(図７)には、原点を通る比例のグラフが完成している。縦軸と横軸の目盛りの設定を生徒に任せる。生徒のワークシートのグラフは、目盛りの設定の違いによって見た目の直線の傾き具合が異なるように見える。その為､違うグラフと判断する生徒もいる｡しかし、グラフを式で表すと同一の比例の式になることから同じものだと生徒は判断する。グラフを式で表現する良さや必要性が生まれるエキスパート問題である。

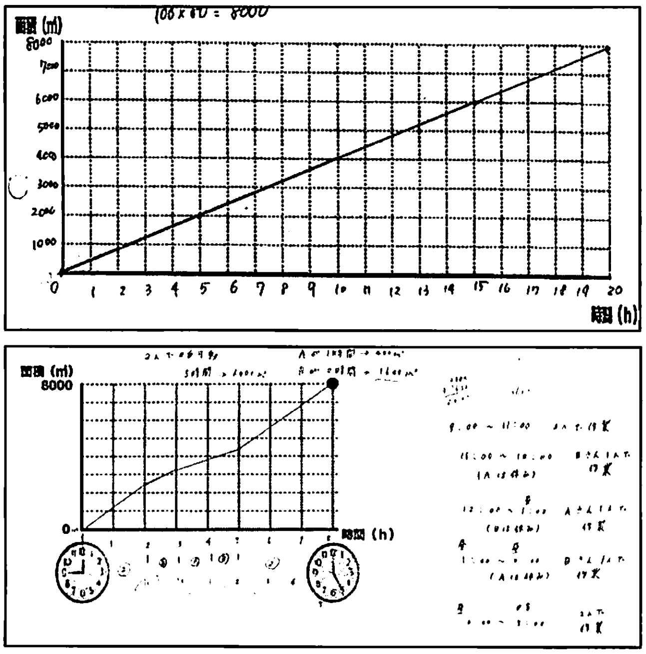


図７　エキスパート（上）・ジグソー（下）の生徒作品

ジグソー活動後の生徒のワークシート(図７)は、グループの話し合い活動による結果から多様な作業プランが見られた。その多様性から、生徒同士の価値観の違いを摺り合わせたものや生徒に内在する様々なアイデアが１つのグラフの中に表現されている。第１学年で学習する座標軸上のグラフは、原点を通る直線のみである。屈折したグラフの出現は、ジグソー活動を通して“考え合う活動”から生み出された数学モデルの一つと考える。生徒同士の発想から屈折したグラフを表現できたことは既習の理解レベルを超えたと判断する。今後、どのような生徒のコミュニケーション場面で超越連鎖や創発連鎖のレベル（図２）に至り、理解レベルが上がったのか分析する必要がある。日常生活の中に、式やグラフなどの“数学”を活用する経験が少ない生徒は、想定以上に意欲的に問題解決に取り組んでいる。本時の授業では芝を刈る実体験こそ無いものの“比例”とい考え方を利用して自分たちの作業プランを作るという教材に、数学を身近に感じたと考える。

⑵全国学力調査問題の実施結果から

本時の教材は、平成 19・22 年度の全国学力調査問題「B 問題」を参考に開発した。同じ教材をジグソー活動(１・２組)で取り組んだ学級とグループ演習(３・４組)として扱った学級を比較することで、どのような効果があったのか検証する。検証方法として、テスト方を採用した。実際に行われた調査問題を全生徒に実施して全国の学力調査結果と比較し検証する。今回実施した全国調査問題の内容は、２学年で履修する内容を含み、１学年の全生徒が初見である。その為、調査結果は本時の学習によって生徒にもたらされた学習効果・影響だと判断出来る。

表１　授業形態による学習の定着具合の比較

		1·2組 (ジグソー活動)	3·4組 (グループ演習)	全国
H19年度	6(1)	98.6	96.2	88.8
	(2)	82.2	82.3	75.9
	(3)	75.3	69.6	62.1
H22年度	6(1)	75.3	65.8	40.9
	(2)	67.1	62.0	53.2

※ 各設問の数字は、正答率を表している

全学級の結果（表１）は、全国の調査結果と比較すると全設問で良好な学習定着状況だと判断する。本時の教材が､調査問題に適合した内容だと考える。ジグソー活動とグループ演習の学級を比較した場合、表の網掛けで示した「H19 年度６(3)」･「H22 年度６(1)」に大きな差が見られた。２つの設問は、どちらも「見いだした事柄や事実を説明する問題」である｡また､両問題とも事象から前提や根拠を指摘し、それによって示すことができる結論を他者が分かるように記述式で答えなければならない設問である。ジグソー活動で取り組んだ生徒の正答率が高かった原因として４つ考える。１つめに、教師から与えられたエキスパート問題を数学的な活動（話し合い活動）の中で扱うことで、足場掛けになる知識がグループ演習に比べて明確になり、その知識に類する問題に転用できたと考える。２つめに、切迫感のある

ジグソー活動は自由度の高いグループ演習と比較すると、エキスパートで得た知識を他者に説明する為に、自分なりに解釈したり結論をまとめたりする論理的な思考を繰り返して理解の深まりに繋がったと考える。３つめに、生徒のグループ学習では問題解決への最短距離を優先する為、解法を見つけた生徒の考え方で収束しがちである。それでは、本来グループ内にある疑問、ユニークな発想・アイデアを拾い・広げる活動に至らない。その為、本校数学科の捉える数学的理解のレベル３（図３）に至らなかったと考える。4つめに、ジグソー活動で行われる“話し合い活動”を充実させるには、“描き表す活動”が重要になる。個人の“あっ、分かった”という発想を他者に“あっ、なるほど”となるように伝えるには、その考え方に至ったアイデアを、適当な数学モデルを介して伝えることが便利である。ジグソー活動で作った数学モデルを改めて個人の思考にフィードバックする時、個々の記述や反省的思考に必要な時間が、グループ演習に比べ十分であったと考える。グループ演習では、できた人・分かった人の考え方で完結するのに対して、ジグソー法では誰もが理解できるような数学モデルの構築を重視することから、活動を通して個人の中で洗練された活用しやすい知識に繋がったと考える。

(3)授業の発話記録より

生徒同士の会話のやりとりの中で、高い連鎖に至り、理解のレベルが高まる様子を表した発話を記す。

N：先生、ちょうど８時間で仕事を終わらせないといけないですか？
T：そうだね！ちょうど８時間でお願いします
Y：あっ、A・B違うグラフだから・・・
M：違うグラフだから・・・
Y：合わさると・・・まっすぐにはならない！
M：あっ、そうか！
M：じゃ、どう分けるか？・・・・
M：Aを８時間で　Bを６時間動かせば、ちょうどになる！
Y：どういうこと？あ、面積を分けずに、時間を分けるんだ！それの方がわかりやすい
Y：一応、表にしてみよう！同時の仕事は・・・
A：休憩も入れよう！その方ができる
M：あっ、意味分かった

２学年「１次関数」

１　単元について

(1)　主題　市場価格を設定しよう

～１次関数とみなす活動～

(2)　目標

不確定な事象の数量関係を１次関数とみなし、結果を予測したり振り返って考えたりすることができる。

２　本実践の趣旨

平成25年6月28日に閣議決定された「消費者教育の推進に関する基本方針」により、国民一人一人が自立した消費者として、安心して安全な豊かな消費生活を営むための教育が一層重視されるようになった。そこで本実践では、「市場価格を設定しよう」と題し、秋祭りで沖縄そばを売るという仮想場面において、「値段をいくらに設定すればよいか」という問題を解決する授業を実践する。

一般に、商品の値段が安ければその商品を買う量が増え、商品の値段が高ければその商品を買う量は減る。そこで、解決についての計画を立てる際、値段(円)と個数(杯)はどのような関数とみなせるかという問いを共有したい。その問いに答えるべく、「あなたがお客さんなら、秋祭りで沖縄そばを最大いくらまでなら買いますか？」という選択式アンケート①を、本校２年生を対象にとる。その統計資料をもとに、xとyの関係を表やグラフに表し、点がほぼ一直線上に並ぶなどの特徴からyがxの１次関数であるとみなしていく。この関数 $y=-ax+b(a>0)$ は経済学で需要関数と呼ばれる。同様に、「あなたが店長なら、秋祭りで沖縄そばを最低いくらで売りますか？」というアンケート②の結果においても、１次関数とみなすことで供給関数 $y=ax+b(a>0)$ を作成し、この２つの直線(需要曲線、供給曲線)の交点から市場価格(均衡価格)を設定できるのではないかと考える。これらの問題解決のプロセスは、現実の事象の数量関係を１次関数とみなして考える数学的モデリングであるとともに、統計的問題解決過程(PPDAC サイクル)と捉えられる。

表２の「問い」を生徒からひきだし共有することで生徒の主体的な活動を促し、数学モデルを創り上げる活動を通して、不確定な事象を含む問題でも関数

を用いて探求的に解決する力を高めたい。

表２　統計的問題解決過程(PPDAC)と生徒の「問い」

Problem (問題)	・一般に、商品の値段はどのようにして設定されているのか。
Plan (計画)	・値段と個数の関係を調べてみよう。
Data (データ)	・値段と個数の関係を調べるためにアンケートを実施しよう。
Analysis (分析)	・値段と個数の数量関係を探ろう。
Conclusion (結論)	・値段を○円に設定すれば○杯売れて○円の売り上げが得られるだろう。

３　実践内容

(1)　エキスパート活動

①　場面設定(導入)

琉大附属中学校は来年度、創立30周年をむかえます。そこで、琉大附属中学校30周年記念事業の一環として「秋祭り」を開催することが職員会議で決まりました。秋祭りを盛り上げようと、私たち28期生では「沖縄そば」を出店したいと考えています。

T：秋祭りで沖縄そばを売りたい、沖縄そば１杯の値段をいくらに設定しようか考えています。

T：高級食材を使って１杯１万円で売ろうかな？

S：どんなにおいしくても、値段が高すぎたら誰も買わないと思います。

T：そうだね、では１杯５円で売ろうかな？

S：値段が安すぎたらどんなに売れても赤字になると思います。

T：高すぎても安すぎてもダメ、では、あなたならいくらで売りたいですか？

S：お客さんが納得して食べてもらえる値段、そしてお店側もできるだけ利益を得られる値段にしたい。

T:そう思って今日はこんなデータを準備しました。以前みなさんにアンケートをとったのを覚えていますか？

以上の場面設定及び導入後、エキスパート問題を提示した。

②　エキスパート問題

アンケート結果①「あなたがお客さんなら、秋祭りで沖縄そばを最大いくらまでなら買いますか？」

沖縄そば１杯の値段(円)	100	200	300	400	500
その値段で買いたいと思われる個数(杯)	157	130	97	57	24

アンケート結果②「あなたが店長なら、秋祭りで沖縄そばを最低いくらで売りますか？」

沖縄そば１杯の値段(円)	150	250	350	450	550
その値段で売りたいと思われる個数(杯)	19	59	104	134	157

T：今日は、このアンケートの結果をもとにして、沖縄そば１杯の値段をどのようにして設定するのか提案してください。

③　生徒のエキスパート活動(２人×20グループ)

アンケート結果①をもとに価格を設定する班(Ａ班２名)、アンケート結果②をもとに価格を設定する班(Ｂ班２名)でエキスパート活動(ペア学習)を行った。実際に生徒は、アンケートの結果から、沖縄そばの値段が高くなるほどその値段で買いたいと思われる個数は減る。また、沖縄そばの値段が高くなるほどその値段で売りたいと思われる個数は増えることに気づき、値段と個数の数量関係を把握することができた。そして、値段と個数の関係を座標上に点をとり、点がほぼ一直線上に並ぶことから直線で結び、１次関数とみなしていた。

しかし、そこから１次関数の式を作成したり、沖縄そばの価格を設定したりする生徒がほとんどいなかった。その要因として、生のデータを扱うことで変化の割合や切片が煩雑な分数や小数を含み、単純化するには労力を要すること、価格を設定する際に１次関数の式を作る必要性を十分に与えることができなかったことがあげられる。また、アンケート①②の買い手と売り手の両方のデータがないと価格設定が難しいことがあげられる。なぜこのデータをエキスパート問題として２つに切り分けたのかという必然性がほしかった。知識構成型ジグソー法においては、課題設定が肝となることを改めて感じた。

(2) ジグソー活動

① ジグソー問題

A班、B班で協力して、アンケート①②の両方のデータをもとにして、沖縄そば1杯の値段をどのようにして設定するのか提案しなさい。

T：A班、B班のエキスパート問題と、その問題を考察した結果をお互いに伝え合い、「沖縄そば1杯の値段をどのようにして設定したのか」、数学的に判断し、提案しなさい。

② 生徒のジグソー活動（4人×10グループ）

本課題を解決するにあたり、沖縄そば1杯の値段と個数の数量関係をどのような関数と捉えるかが最大のポイントとなる。生徒のエキスパート活動においては、A班・B班のデータが異なる上に、グラフや式、ヒストグラムを用いる方法がある。また、価格を設定するために、値段と個数の数量関係から売れ残りも品不足も出さない価格設定を行うのか、値段×個数＝売上額から、売上額を最大にする価格設定を行うのかなど、生徒の多様な解法・解答が期待できる。そこでジグソー活動においては、A班の買い手側のデータとB班の売り手側のデータをどのような方法で数学の舞台にのせて価格設定するのか、両者の考えをすりあわせる建設的な話し合い活動が必要になる。ジグソー活動においては生徒がどこまで正確な解決を望み、唯一の絶対解ではなくよりよい納得解を求め、最適な価格を設定できるのかをみとる。

(3) 生徒のクロストーク活動（40人）

多くの班が値段と個数の関係を座標上に点をとり、点がほぼ一直線上に並ぶことから直線で結び、1次関数とみなしていた。そして、A班・B班の直線を合わせることで価格を提案した。図8はクロストーク活動の一例である。

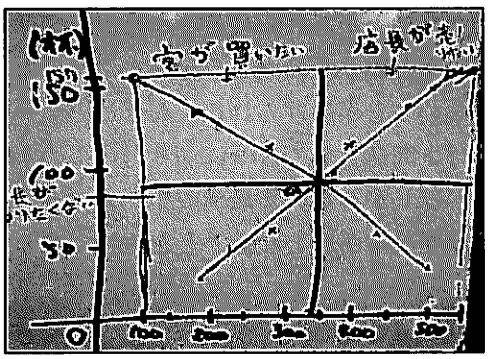


図8　生徒の作品1

S1：このグラフより、沖縄そば1杯の値段を約330円に設定すると、約80杯売れると予想できる。したがって、売れ残りも品不足もなく、330×80＝26,400円の売り上げを得ることができるだろう。

S2：班によって、価格が微妙に違うけど、答えはあるのかな？

T：より正確に価格を設定する方法はないかな？

S3：この2つの直線の式を求めて、連立方程式で解くと正確な価格が設定できる。

生徒は、ジグソー活動で作成した「1次関数とみなしたグラフの交点」を、「お客さんとお店が納得のいく値段」と、数学的な解を現実の問題に照らし合わせて解釈していた（図9）。また、各班の価格設定の差異についても、より正確な価格を設定するために、1次関数とみなしたグラフを式にして求めて考える様子が見られた（図10）。

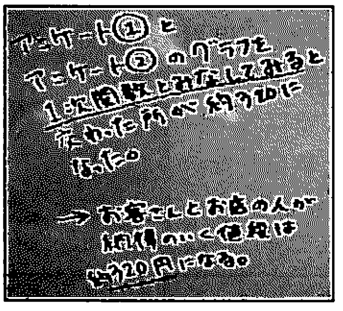


図9　解の解釈

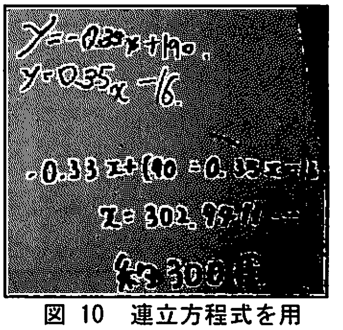


図10　連立方程式を用いて解く

4　実践内容の結果と分析

(1) ワークシートと発話記録より

以下は、ジグソー活動における成績下位の抽出児Rと、成績上位Tをふくむ4人グループの発話記録である。

R：私は値段と個数の関係を点にして結ぶと折れ線グラフになりました（図11左）。

T：点がほぼ並んでいるから多少の誤差を無視して直線で結んで1次関数とみなしたら？

R：何で1次関数とみなす方がいいの？

T：1次関数とみなすと式がつくれるからだよ。

R：何で1次関数の式が必要なのかな？

T：それは俺も困っているところなんだよね。

S：沖縄そば1杯の価格を正確に求めるためにはやっぱり式が必要じゃないかな。

R：じゃあ直線で結ぶけどそれからどうするの？

T：お店側とお客側のグラフを重ねてみると交わるよね。その交わった点を沖縄そばの値段とした方がいいのでは？

ジグソー活動前の段階では、Rは値段と個数の関係を折れ線グラフで図示し(図 11 左)、Tは点と点の多少の誤差を無視して直線で結び、１次関数とみなして式を作成しようとしていた。ジグソー活動では、１次関数とみなす意義についての対話があり、Rは式を作成するまでには至らなかったものの、最終的には１次関数とみなすことに納得し、２直線の交点から市場価格を設定することができた(図 11 右)。

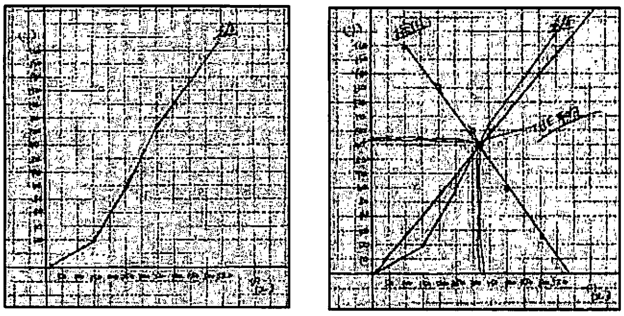


図 11　Rのジグソー活動前後のワークシート

この発話記録は、成績下位Rと成績上位Tが中心となり、ジグソー活動での対話がうまくいった班の事例である。うまくいった要因として、この班のメンバーが、協調的に話し合う雰囲気があったことがあげられる。また、RとTはジグソー活動の前に直感的ではあるが、解法の筋道を見いだしており、まだ整理されていないもやもやとした思考を数学モデルとして形にしていたからこそ対話が生まれたものだと推察する。一方、対話がうまくなされていなかった班のワークシートと発話記録を分析すると、考えていることを他者に伝えているが、数学モデルを創り上げることができていなかった。逆にグラフや式を作成していても、それを用いて他者にうまく説明できずにいた。このことから、自分の思考を外化する活動や、数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う数学的活動を日頃の授業から積極的に仕掛ける必要があると改めて感じた。答えを書くだけで結論のみを述べるのではなく、なぜその結論に達したのか、なぜそれが成り立つのかを追究する場面をより多く作る必要がある。特に成績下位の生徒においては、間違った考えでもそれを認め、つまずきを拾い、結論に達しなくても自分の言葉で説明させる指導を継続していきたい。

⑵　本校数学科の捉える「理解レベル」より

本校数学科では、数学的理解レベルを思考の深化(横軸)と表現の深化(縦軸)の双方向に、レベル０からレベル３までの４つの円錐で表した(図３)。そして、各レベルに達したときの生徒の姿を予め具体化することで、エキスパート活動からジグソー活動までの生徒の変容と本授業の目標に迫ろうと試みた(表３)。実際ワークシートの分析により、エキスパート活動の段階ではほとんどの生徒がレベル１を達することができた。しかし、ジグソー活動を終えた段階でレベル３に達した生徒が少なかったことから、対話からの学びによって生徒が本授業の目標を達成できたとは言い難い。次年度の研究においては、ジグソー法による授業実践を積み重ねる中で、「課題設定(問いの設定)」と本校数学科が捉えた理解レベルによる「評価方法」について研究を継続する必要がある。

表３　本実践における数学的理解レベル

		理解レベル	理解レベルに達したときの生徒の姿
レベル0	①	初源的活動	アンケート結果より、沖縄そばの値段と個数の数量関係を把握する。
	②	イメージ形成	沖縄そばの値段と個数の数量関係を、座標にして点をとる。
レベル1	③	イメージ所有	点がほぼ一直線上に並ぶことから直線で結んでみる。
	④	性質認知	この１次関数とみなしてよいのか、みなすことへの是非を考える。
レベル2	⑤	定式化	1 次関数とみなすことで y=ax+b で表すことができる。
	⑥	観察	供給関数 y=ax+b と需要関数 y=－ax+b を比較する。
レベル3	⑦	構造化	2 つの直線の交点を市場価格とし、その値を求める。
	⑧	創案	現実の場面を想定して需要関数や供給関数を平行移動させ価格を設定する。

3学年「三平方の定理」

1　単元について

(1) 主題　平面ドーナツ形の面積を求める方法を考えよう！（三平方の定理の利用）

(2) 目標　三平方の定理を利用するための条件を整え課題を解決する過程を説明しよう。

2　本実践の趣旨

本実践では、図形領域の総合的な学習場面をつくりだし、三平方の定理を利用するための条件を整え、さらに証明を通して図形の見方や考え方を広げることをねらいとしている。

生徒がお互いの考えを持ち寄り、考え合いながら創発連鎖を起こすことができ、知識構成型ジグソー法による授業で協調することの楽しさを感じられるような授業デザインにするため、一見まったく異なる既習内容を部品とし、それを組み合わせることで学習課題が解決できる授業を構想した。

円の中心部分には入れないという条件や、1か所だけしか測れないという条件を与えることで、大小2つの円の実際の半径を求めることができず、既有知識を駆使し既習内容通りに考えを進めていくことでは問題を解決できないことに気付く。エキスパート活動の3つの部品は、1つは1学年2章「文字と式」のπを用いた円の求積問題、2つは1学年5章「平面図形」の作図で学んだ円の接線の性質の確認、3つは3学年6章「三平方の定理」の既習内容である。ジグソー学習で3つの部品について理解し、部品をいかに組み立てていくかを考え合うことが重要になる。それぞれの部品を結び合わせるコネクターを探し出すには、協調して考え合い、所持している既有知識を再構築させ数学モデル（説明モデル）に創り上げる活動の中で創発連鎖が起こることを期待した。また、拡散的思考と収束的思考が行われ、試行錯誤しながら考え合う活動となるところから、よりよい数学的思考を身に付ける課題になると考えた。

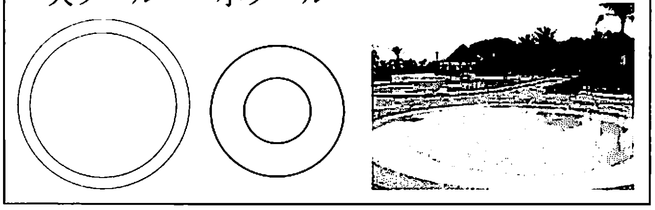
さらに、学習後も平面ドーナツ形の幅の太さや半径の大きさに関わらず解法が使えるのか、生活の中で利用することはできないか等、協調による学ぶことの楽しさや意義を感じながら、生徒自ら新しい問いをうみ出すことのできる授業を目指した。

3　実践内容

【課題提示】課題を把握する。

大小2つのプールがあり、周囲が次のような円の中心の等しい平面ドーナツ形になっている。プールの中に入らずに、1か所だけ測って周囲の面積を調べるにはどのようにしたらよいですか。

大プール　　小プール



前時までの学習で、三平方の定理を利用して直角三角形の辺を求めることができるようになっている。

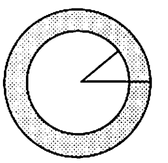
(1) エキスパート活動

・グループ編成：ペア学習（隣の席2名）

・活動内容：既習学習の確認（3部品）

・エキスパート活動の3つの部品①②③とそれぞれの部品に含まれる数学モデル

①　平面ドーナツ形の面積



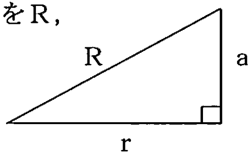
面積をS，大円の半径をR，小円の半径をｒ とするとき、平面ドーナツ形の面積を表しましょう。

$\boxed{S=\pi R^2-\pi r^2}$　$\boxed{S=\pi(R^2-r^2)}$

数学モデル：Ⓐ等式　Ⓑ平面ドーナツ形の図

②　三平方の定理

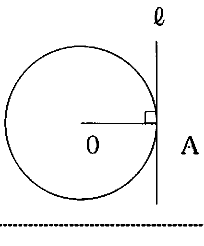
直角三角形の　斜辺の長さをR，直角をはさむ2辺の長さをｒ、ａとするとき、



$\boxed{a^2+r^2=R^2}$

数学モデル：Ⓒ等式　Ⓓ直角三角形の図

③　円の接線の性質



円の接線について接線をℓ，接点をAとすると接点を通る半径に垂直

$\boxed{\ell \perp OA}$

数学モデル：Ⓔ垂直という性質　Ⓕ円と接線の図

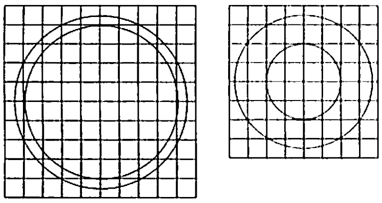
(2) ジグソー活動

・グループ編成：問１（縦列３名）

・活動内容：課題解決について考え合う活動。
　エキスパート活動での①②③の内容を説明し伝え合う活動　→　問１・問２（足場かけ）について考え合う活動　→ 課題解決

・ジグソー活動の問１（３名）

問１　　長さを求めて比較する。

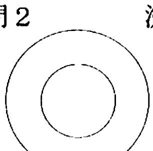


大プール　4π
小プール　9π

問１では、大小２つの円の中心が読み取れる平面ドーナツ形があり、長さを求められる。まだ、１か所測れば面積が求められる長さの検討がつかない状態では、まず大小２つの円の面積の差を求めることになる。その際、小円の半径をグラフのマス目から読み取り、それを利用できるような直角三角形をつくる。そして、三平方の定理から大円の半径を求め、大小２つの円の半径から面積を求め、その差から4π、9πを導く。次の段階として逆向き思考で求めた解から得られることを考え始める。直角三角形の３辺のうち、三平方の定理を利用して求めた斜辺は大円の半径であり、直角をはさむ２辺のうちの１辺はすぐに読み取れた小円の半径である。残る１辺について考えることで解決の糸口が見えてくる。

・ジグソー活動の問２（６名）

問２　　測った１カ所の長さをａと仮定して平面ドーナツ形の面積について考える。



$\therefore S=\pi a^2$

問１において、4πと9πを求めた後に思考がすすめられなかったグループにとって、問２のａと仮定された長さは、大小２つの円のどちらかの直径だと受け取るだろうということが予想される。しかし、いずれかの半径をａとして次の段階にいけず思考がストップしてしまい、再度、問１と並行して取り組むことになる。問１から小円の接線に見当をつけ、接点から大円の円周までの長さと4πと9πとの関係に気付いたグループは、問２で証明することで一般化を図ることになる。

・課題解決（６名）

問題解決にはエキスパート活動での３つの部品を組み合わせて、数学モデル（説明モデル）を創り上げる必要がある。３つの部品を多面的に捉え、それぞれを連結させる複数のコネクターを探し、組み合わせて再構築させることが解の要素となる。

３つの学習内容のそれぞれのコネクター（部品の中の数学モデルと数学モデルを連結する要素）

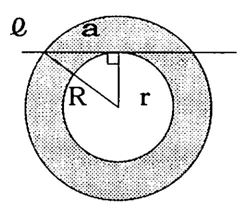
①＋②のコネクター：Ⓐ等式＋Ⓒ等式
　大小２つの円の面積の差で表した平面ドーナツ形の面積を求める式と三平方の定理を表した式から代入法でR^2とr^2を消去し、$S=\pi a^2$ を導く。

②＋③のコネクター：Ⓓ直角三角形の図＋Ⓔ垂直
　円と接線の性質を利用し、接線と接点を通る半径が垂直であることから、それらを直角をはさむ２辺の長さとする。小円の接線と大円の円周との交点から大円の半径までの長さを斜辺とした直角三角形をつくる。

①＋③のコネクター：Ⓑ課題の図＋Ⓕ円と接線の図
　平面ドーナツ形の内側にある小円の接線を引き、外側の大円の円周と交わるように延ばす。

再構築された数学モデル（説明モデル）

①＋②＋③：（数学モデルⒶ＋Ⓑ＋Ⓒ＋Ⓓ＋Ⓔ＋Ⓕ）



小円の接線ℓから大円の円周に交わるように伸ばし、接線の性質を利用して図のような直角三角形を作図する。

①小円の半径をｒ、大円の半径をＲとして平面ドーナツ形の面積を大小２つの円の面積の差で表す。
②直角をはさむ２辺を小円の半径ｒ、接点から大円の円周までをａ、斜辺を大円の半径Ｒとして、三平方の定理で表す。
◎上の図の数学モデル（説明モデル）を創る。
◎平面ドーナツ形の面積Ｓが、<u>小円の接点と大円の円周までの長さの２乗×π</u>と等しくなることを証明し、その過程を説明する。

証明）$\begin{cases} S=\pi(R^2-r^2) & \cdots① \\ a^2+r^2=R^2 & \cdots② \end{cases}$ ⇨ $\boxed{S=\pi a^2}$

方法１：①に②を代入（R^2 に a^2+r^2を代入）
　　$S=\pi(a^2+r^2-r^2)$　　$\therefore S=\pi a^2$

方法２：②より　$r^2=R^2-a^2$　…③
　　①に③を代入（r^2 にR^2-a^2を代入）
　　$S=\pi\{R^2-(R^2-a^2)\}$　$\therefore S=\pi a^2$

4　実践内容の結果と分析

(1)ワークシート分析より

授業のワークシートでは、再構築した数学モデルの証明方法から各グループとも考えがよく練られていたことがわかる(図12)。説明モデルを創った後、こんなにシンプルで本当にどんな平面ドーナツ形の場合にも成り立つのかと、生徒が自然に証明をしようとする姿が見受けられた。また、自分なりに考えを整理して理解しようとする生徒が予想以上に多くおり、ジグソー活動が充実した反面、クロストーク活動の時間が十分にはとれなかった。自主的に学習内容をノートにまとめている生徒もおり、生徒に与えた「学習課題」が「問題」として捉えられ自発的な学習を促すことができた。

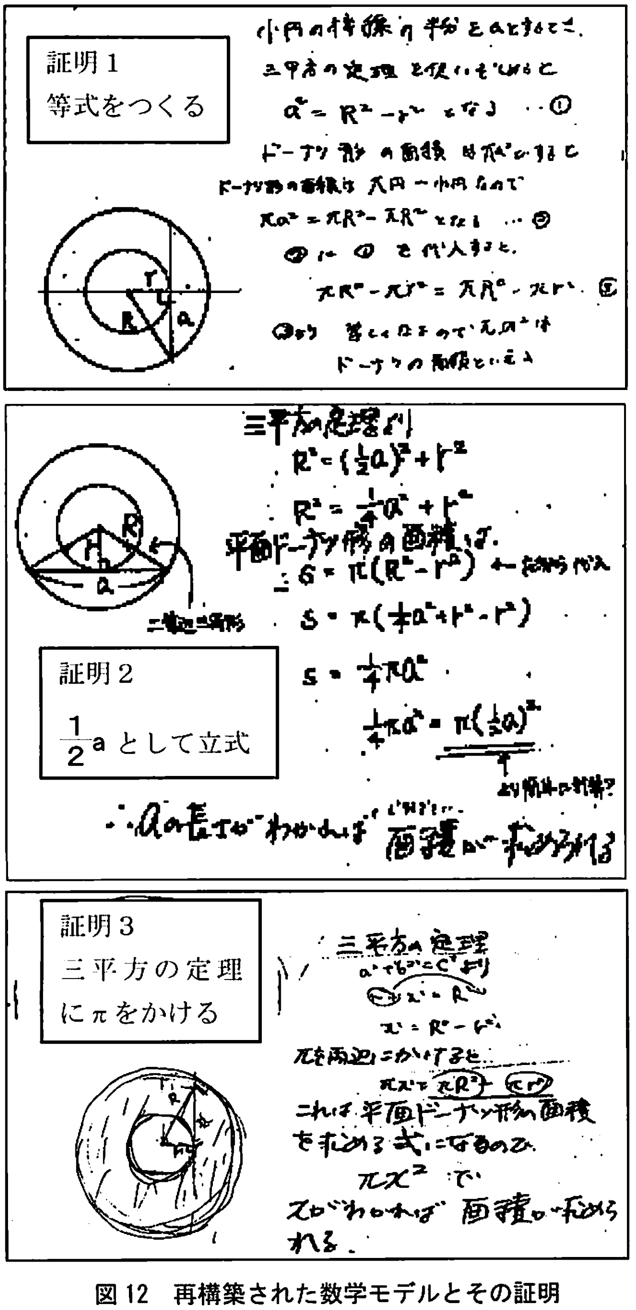


図12　再構築された数学モデルとその証明

(2) 授業の発話記録より

成績下位（評価点35%未満）の生徒Sの生徒の発話記録から、エキスパート活動では成績中位（評価点35%以上80%未満）Nとのペア学習で既習学習を復習した。ジグソー活動では、生徒Sをふくむ成績上位者（評価点80%以上）A、成績中位者（評価点35%以上80%未満）Mとの３人グループである。以下はジグソー活動の発話記録である。

M：これって、ふつうに求めるだけ？
S：そのまま式にあてはめればいいの？
A：ん～、どういうこと？
S：１マスは3.5?　3.6?　微妙だよね。3.6?　3.7?
　ここも半径同じ？　3.5でいいかな？
M：え～、3.5でいいの？だめじゃん。
S：先生、この微妙なラインは何ですか？
T：これは微妙だけど、求められるんだよ。
A：あ～、もう！これってさ、三平方のやつで求めると思う？　だと思う？
M：ねぇちょっといい？これって半径にならない？
A：あっ、きた。きた。これ、思った！
M：あ～！　これって、2×2＝4、3×3＝9で、
　足したらCの２乗になるから、半径は$\sqrt{13}$！
A：ん～、思った。思った！
S・A・M：すごーい！　すごーい！すごーい！
M：Aが三平方って言ったからわかったんだよ。
A：これなら、もういけるんじゃん？余裕やし。

Sは日頃の授業より発言が多く、A、Mの２人と発言回数はほとんど変わらない。Sは意見より質問が多かったが、Sの発言の誤りをAとMが軌道修正する中で求める解にたどり着いている。積極的に教師に質問したのもSであった。

発話分析を行うことにより、理解度の低い生徒がいるグループは対話が硬直化するのではないかという予想が大きく覆された。理解度の低い生徒がいることで、質問に対する説明の機会が増えグループ内対話が活発になり、考え方の適正化が図られ論理的な思考をはぐくんでいることに気付かされた。

個々の知識の量やその理解度に関わらず、それぞれの知識を持ち寄ることで、足りない箇所を補い合いながら新たな知識を構築していく生徒たちの学びは、教師からだけでは与えられない知識の広がりと理解の深さに繋がっていると感じた。

(3) アンケート集計結果より

課題に対し解決方法を考えようとする生徒が19.5%、考え方を比較できた生徒が22.3%、考えが深まった生徒が27.8%増加している。反面、解決方法を考えることができない2.8%の生徒は、グループ学習の他力に頼っていることが考えられる。また、説明ができるように自分の考えをまとめない5.6%の生徒がいることは、エキスパート活動での理解度が十分でなくても良いという教師の説明による要因も含んでいることが考えられる(図13)。

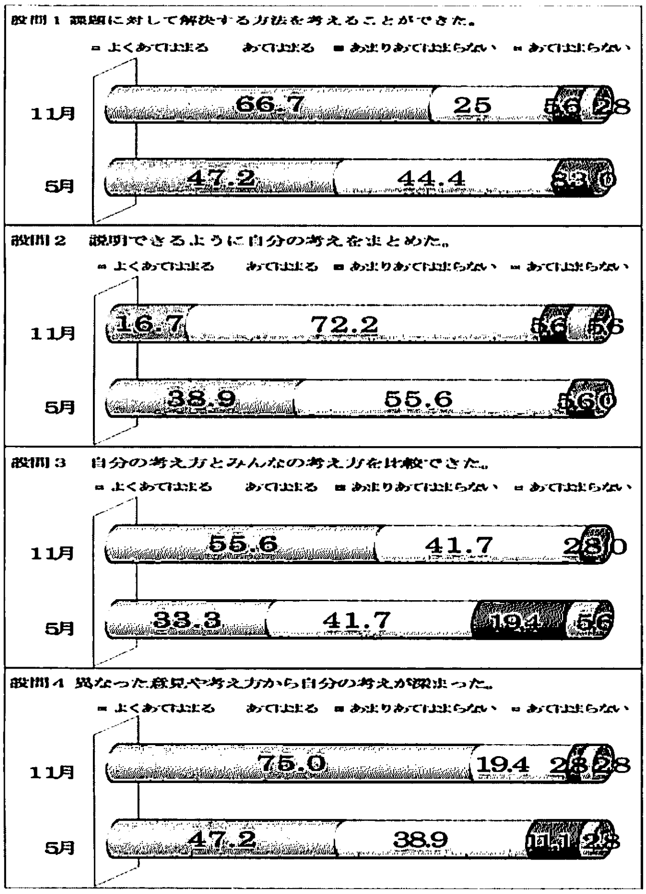


図13 3学年アンケート集計結果（%）

(4) 本校数学科の捉える数学的理解レベルより

本校数学科の数学的理解レベル(図3)に則して、本実践のレベル0からレベル3までの各レベルに達したときの生徒の姿を以下のように設定した(表4)。

レベル1の④までが、エキスパート活動終了時の理解レベルとなり、レベル2の⑤からジグソー活動における理解レベルとなる。3学年全24グループ(6人～7人編成時)のうち、本実践時間内でレベル3⑦の構造化に達したグループは9グループで全体の37.5%、そのうち⑧の創案まで達したグループが6グループで全体の25.0%となった。さらに、個々の知識の定着を確認するために、確認テストを分析した結果、レベル3⑦の構造化に達した生徒は学年全体の約54.6%、レベル3⑧の創案に達した生徒は約37.1%となった。

これは、レベル3⑦の構造化が作図であり、視覚的に捉えやすい点や、解の意外性からくるインパクトの強さで、理解が不十分でも記憶に残りやすくなったことが予想される。しかし、レベル3⑧創案の証明までの定着率の低さに関しては、本実践内で十分な理解が得られるまでの時間がとれなかったこと、数少ないグループの発表やグループのメンバーが理解している証明の説明を聞くだけでは、自分なりの理解が得られにくかったことが考えられる。

3学年アンケート集計結果（図13）や授業後の生徒の感想からは、各グループとも話し合いが活発に行われており、自分の考えを伝え合い、他の考えと比較・検討しながら課題解決につなげたことがうかがえる。グループ内で創発連鎖が起こり、理解レベルの創案まで達したとしても、個々の深い理解につなげるためには、その学習内容をさらに自分なりに自問自答（ドゥチュイムニー）し、他に説明できるまでに咀嚼する時間を与える必要性を感じる。その方法については、今後も研究を深めていきたい。

表4 本実践における数学的理解レベル

		理解レベル	レベルに達したときの生徒の姿
レベル0	①	初源的活動	平面ドーナツ形の面積を測る条件と学習課題を把握する。
	②	イメージ形成	円の面積の求め方をもとに、どこを測ればよいかを考える。
レベル1	③	イメージ所有	既有知識で解くことができないと気づき他の方法を模索する。
	④	性質認知	円の面積の求め方、三平方の定理、接線の性質について考える。
レベル2	⑤	定式化	円の面積、三平方の定理、接線の性質を比較し共通点を考える。
	⑥	観察	等式、円の図形、直角をそれぞれ組み合わせることを考える。
レベル3	⑦	構造化	小円の接点から大円の円周までの長さとの関係から接線を作図。
	⑧	創案	一般化を図り、作図の証明をして課題を解決する。

Ⅴ 成果と課題

1 成果

・数学的側面から「対話」を４つの連鎖に類型化し、「理解」を４つの理解レベルに区分することで、到達したい目標を設定し、「知識構成型ジグソー法」における各活動での各段階を考慮した授業をデザインすることができた。

・再構築された数学モデル（説明モデル）やエキスパート資料を単元間、学年間の枠を越えた学習内容にすることで、学び直しや数学を身近に感じられる教材を作成することができた。

・授業での生徒の自発的な学習への取り組みや、授業後の新たな問いや解法を試みる姿勢が見られ、解決したいという意識の持てる問題を「学習課題」として設定することができた。

・考え合う時間を十分に確保することで、自分の考えを他者に伝えようとする生徒が増え、考え方を比較し深めることができ、数学的思考力を高める指導につながった。

2 課題

・数学的思考力を高めるために効果的な「知識構成型ジグソー法」における各活動での時間配分やグループ編成を学習課題に応じて工夫していく。

・対話を成立させるために、日頃の授業において、自分の考えを伝える手段となる数学的モデルや数学的用語の確認、論理的な説明に必要な根拠となる基礎的知識の確認を取り入れていく。

・「知識構成型ジグソー法」による協調学習の利点を活かすためには、生徒に学習方法の趣旨を十分に理解させ、熟考した教師の発問や指示を与え、個々の生徒の数学的表現や思考を大切にする授業をデザインしていく。

・ワークシートや発話記録、形成的評価などによる数学的思考力のみとり方や分析・検証方法についての検討が必要である。

・グループで学習することの利点を最大限に活かし、個々の生徒が対話に積極的に関われるよう、特に下位の生徒への手立てを講じていく。

・高めたい数学的思考力に応じた適切なエキスパート資料の内容や与え方、グループ編成人数の吟味を行った教材をさらに増やしていく。

〈引用文献・参考文献〉

(1) 国立教育政策研究所『OECD 生徒の学習到達度調査(PISA) 2009 年調査国際結果報告書　生きるための知識と技能』、ぎょうせい、2010 年、p73-76

(2) 前掲(1)、P119-127

(3) 国立教育政策研究所 HP『平成 19 年度・22 年度・24 年度 全国学力・学習状況調査 報告書・集計結果』

(4) 琉球大学教育学部附属中学校研究紀要 25 集、2012 年、p56

(5) 小寺隆幸・清水美憲『世界をひらく数学的リテラシー』、明石書房、2007 年、 p，193－195

(6) 江森英世『数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究』、風間書房、2006 年、p. 317

(7) 小山正孝『数学教育の理論と実際』、数学教育学研究会、2001 年、 p．45

(8) 中原忠男『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』、聖文社、1994 年、 p．123－126

(9) 高垣マユミ『授業デザインの最前線Ⅱ』、北大路書房、2010 年、p. 142-151

(10) 牧田秀昭・秋田喜代美『教える空間から学び合う場へ　数学教師の授業づくり』、東洋館出版社、2012 年、p. 51

(11) 前掲(8)、p. 127-128

(12) 岩崎秀樹『新しい学びを拓く数学科 授業の理論と実践』、ミネルヴァ書房、2010 年、 p．18-19

(13) 文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編』、教育出版、2008 年、p. 3-5

(14) 前掲(13)、p. 6

(15) 根本 博『数学教育の挑戦』、東洋館出版社、2004 年、p. 325

(16) 藤原大樹　横浜国立大学教育人間科学部附属横浜中学校　平成 25 年度教育研究発表会　公開授業