数学教育における樹形図の活用に関する一考察

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学教育学部附属教育実践総合センター 公開日: 2016-02-01 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 湯澤, 秀文, Yuzawa, Hidefumi メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/33225

数学教育における樹形図の活用に関する一考察

湯澤　秀文*

A Study on Making Use of Tree Diagram in Mathematics Education

YUZAWA Hidefumi*

１．はじめに

平成20年１月の中央教育審議会答申(以下「答申」と略記）においては，算数・数学科の改善の基本方針の中で，数学的な思考力・表現力の重要性について，次のように述べられている．「数学的な思考力・表現力は，合理的，論理的に考えを進めるとともに，互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである．このため，数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする．特に，根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや，言葉や数，式，図，表，グラフなどの相互の関連を理解し，それらを適切に用いて問題を解決したり，自分の考えを分かりやすく説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する.」.

また，根上・中本（2003）は，基礎体力という言葉に倣って「基礎数学力」という言葉をつくり，これを「見てそれとわかる」こと，「構造や原理を直接的に理解する力」と説明している（p.17)．そして，「絵を描いて，言葉で考え，自分自身の理解を根拠に問題解決をする数学」を提唱している（p.3)．これは答申に述べられた思考力・表現力の中心的な部分を端的に表現しているものと考えることができる．

根上らと同様の考え方は，アメリカ数学協会が出版している専門誌の「Proof without words」(PWW：言葉を用いない証明）という常設記事にも見られる．NelsenはPWWとは何かについて，「この質問に対する簡単で明確な答えはありません」，「正確には証明とはいえません」と述べつつも，「一般的に言ってPWWは，それを観る人にある主張がなぜ正しいのかを示唆したり，その主張が正しいことの証明をどう始めるべきかの手掛りを与えてくれるような画や図です．図によっては，その図の近くに１つ２つの等式が示されているものもあります．それは観る人に解法のプロセスの手助けをするためです．しかし，重点は明らかに，観察者の数学的思考を刺激するために，視覚的な手がかりを与えることにあります.」と述べている（Nelsen，秋山他訳，2002，p.iv)．

一方，答申ではさらに，「算数的活動・数学的活動は，基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けるとともに，数学的な思考力・表現力を高めたり，算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために，重要な役割を

*　琉球大学教育学部

果たすものである．算数的活動・数学的活動を生かした指導を一層充実し，また，言語活動や体験活動を重視した指導が行われるようにするために，小・中学校では各学年の内容において，算数的活動・数学的活動を具体的に示すようにするとともに，高等学校では，必履修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目に「課題学習」を位置付ける.」と述べ，認知面とともに情意面の重要性も強調している．

数学教育における情意面の重要性について，平林は，「注意すべきことは，情緒的なものは認知的なものよりも，はるかに永続的に強力に人間の行動を支配するということである．何を習ったかということは忘れても，その授業が楽しかったことは何時までも覚えているものである．そして，その楽しかった記憶は，やがて学習した知識をもう一度やり直すとか，より発展させるとかするときの動因になるであろう．しかし，できるが嫌いだというのであれば，今できることもやがて忘れ，再びやる意欲も出なくなることを予想させる.」（平林，2004，p.170）と述べている．この「できるが嫌いだ」という状況が生まれる要因は様々であろうが，その一つに，根上・中本のいう「基礎数学力」が育まれていないことがあるように思われる．そしてそれは，「絵を描いて，言葉で考え，自分自身の理解を根拠に問題解決をする」こと，すなわち「見てそれとわかる」表現を自ら工夫し「構造や原理を直接的に理解する」体験や，そのための教材が，必ずしも十分ではないためではないかと考えられる．従って，与えられた知識の表面的で一面的な吸収ではなく，一見すると不思議に思える数学的な現象を，「見てそれとわかる」表現の工夫や創造的な思考で多面的に把握し，「構造や原理を直接的に理解する」体験を少しでも多く持つことができれば，「できるが嫌いだ」という状況は少しずつでも改善されて行くものと考えられる．先に引用したNelsenも，前掲書の序文で「この本の読者が，視覚に訴えるエレガントな証明を発見する喜びを味わっていただけることを期待します.」と述べている（Nelsen，秋山他訳，2002，p.v）．

本研究では，いくつかの数学的な題材を取り上げ，それらの「構造や原理を直接的に理解する」ことができるような，「見てそれとわかる」表現手段の１つとして，樹形図の活用について具体的に考察する．そして，それを通して，「算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするため」の教材開発や授業づくりへの示唆を得ることを目的とする．

２．等比数列の和

初項１，公比２の等比数列の和は，

$$1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1 \quad \cdots①$$

である．一般には，

$$a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \cdots②$$

であるが，本研究では，初項aは１，公比rは２以上の整数とする．

$$1+r+\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1} \quad \cdots③$$

しかし，そのように限定したとしても，等式③の左辺が右辺に等しいことの理由は学習者にとって自明ではないであろうし，後に述べるように，その理由の説明・解釈の仕方は多様で興味深い．次節では，その代表的な証明・説明方法を概観し，さらにその次の節において，この等式の構造をより多面的に，特に視覚的・直観的に捉える方法について考察する．

３．代表的な証明・説明方法

この節では，次節以降の準備として，等式③の証明・説明方法のうち，よく知られた代表的なものについて概観する．

(1) 代数的な証明

等式③の左辺をS_nとおくと，

$$S_n=1+r+\cdots+r^{n-1}$$
$$rS_n=r+\cdots+r^{n-1}+r^n$$

第２式から第１式を辺々ひくと，$r \neq 1$の場合，

$$(r-1)S_n=r^n-1$$
$$\therefore \quad S_n=\frac{r^n-1}{r-1}$$

本稿ではこの証明方法を「$(r-1)S$法」と呼ぶことにする．

(2) r進法による説明

rを2以上の整数とするとき，r進法を知っていれば，等式③はほぼ自明である．先ず，左辺をr進法で表すと，1がn個続くn桁の数「111…1」となる．右辺もr進法で表すと，r^nは0がn個続くn＋1桁の数「100…0」となり，それから1を引けば各位で繰り下がって，分子はr－1がn個続くn桁の数となる．それを分母のr－1で割れば，1がn個続くn桁の数「111…1」となり左辺と等しくなる．r＝3，n＝4の場合について，左辺から右辺への計算式を補えば，例えば下記のようになる．ただし，3進法で表された数字には下付きの「$_{(3)}$」が付してある．

$$1+3+3^2+3^3$$
$$=1111_{(3)}=2222_{(3)}\div 2=(10000_{(3)}-1)\div 2$$
$$=\frac{3^4-1}{3-1}$$

(3) 面積図による説明

r＝3，n＝4の場合について考える．図1のように，右下の最も小さな3つの正方形の一辺の長さを1とし，その左に縦，横の長さがそれぞれ3，1の長方形B_1，B_2を並べ，その上に一辺の長さが3の正方形C_1，C_2を並べ，その左に縦，横の長さがそれぞれ9，3の長方形D_1，D_2を並べる．A_1からD_2までの面積の総和は$2(1+3+3^2+3^3)$であるが，これは一辺の長さが9の一番大きな正方形から右下の一番小さな正方形1つを除いた図形の面積でもあるから3^4-1に等しい．これらはともに求める等比数列の和の2倍に相当するから，等号で結び，両辺を2すなわち3－1で割ればよい．この考え方は一般のr，nへも拡張することができる．(何森，塩沢，1990，p.11，24；Nelsen，2003，pp.164-165)．ただし，面積図による表現の仕方には，図1のように正方形と長方形を組み合わせる方法だけでなく様々な表現の仕方があり，また，これらの面積図は，無限等比級数の和の表現に活用することもできる（Nelsen，2002，pp.163-166；Nelsen，2003，pp.160-161)．

(4) トーナメント表としての樹形図による説明

まず，r＝2，n＝3の場合について考える．図2のような樹形図を，2^3人が参加している試合のトーナメント表と見なし，1回戦の試合数は2^2試合，2回戦の試合数は2^1試合，…と考えれば，等式①の左辺は，このトーナメント表における全試合数を表していると考えることができる．一方，優勝者が1人決定するということは，全参加者2^3人のうち，優勝者1人を除く2^3-1人が敗退していることになり，等式①の右辺は敗退者の総数を表していると考えることができる．そして，1試合につきちょうど1人ずつ敗退者が決まるわけであるから，各試合と各試合における敗退者が1対1に対応するため，全試合数を表す左辺と敗退者の総数を表す右辺とは等しくなる．この考え方も，等式③の右辺の分母を1試合当たりの敗退者の数と考えることにより，一般のr，nへ拡張することができる（Vincent P.Schielack,Jr. 1993)．

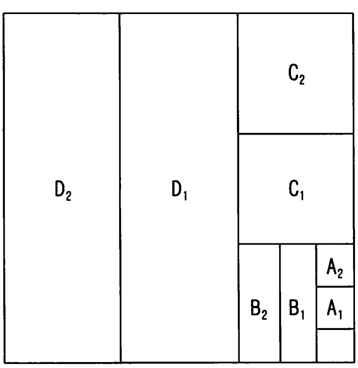

図1

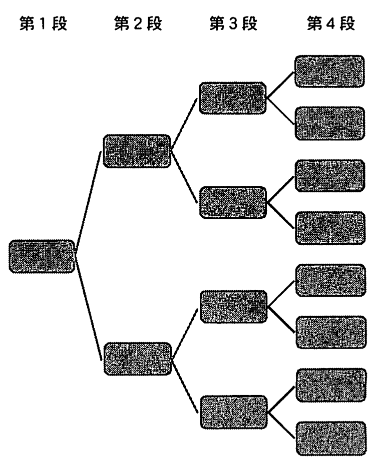

図2

4．樹形図による種々の説明方法

前節で概観した証明・説明の方法は，いずれもよく知られたものであり，それぞれに固有のアイディアのよさやおもしろさ，分り易さが感じられる．しかし，代数的な(r−1)S法や記数法による証明・説明は，記号法を活用して明確かつ簡潔である反面，量的，あるいは視覚的・図的な認識を学習者は持ちにくい．また，樹形図による説明も，漠然と頭の中で理解しただけでは，アイディアの鮮やかさは感得できても，左辺と右辺を結ぶ部分にやや間接的な認識が残るものと考えられる．具体的な樹形図の上で各試合とその試合の敗退者を視覚的に対応づけること等により，問題の構造や原理をより直接的に理解することが必要であろう．

他方，面積図による説明は，記述の一般性には欠けるものの，等式③の左辺と右辺のｒ－１倍同士が，面積という具体的な量の相等関係によって，視覚的・直接的に結びつけられているというよさがある．

本節では，記述の一般性には欠けるものの，等式③の意味や構造を視覚的ないし量的に直接把握することができるような，樹形図を表現手段とする種々の説明方法について考察する．なお，以下では，樹形図の分岐の結節点を「頂点」，頂点と頂点を結ぶ線を「辺」，図２のように樹形図の右に向かって等比的に分岐して行く各段階部分を「段」とよぶことにする．

(1) 樹形図と植木算

ｎ＝３の場合，等式①の左辺は，図２においては「第１段から第３段までの頂点の総数」を表していると考えることができる．このときの右辺を「トーナメント表における敗退者の総数」と解釈したものが，前節におけるトーナメント表としての樹形図による説明であり，右辺の2^3-1は，「(第４段の頂点数)－１」に相当した．一方，この右辺の「(第４段の頂点数)－１」という解釈は，さらに，いわゆる植木算のように「第４段の頂点の間の数」と解釈することもできる．図３を見ると，「第１段から第３段までの頂点」のすべてが「第４段の頂点の間」とちょうど１対１に対応していることがわかる．

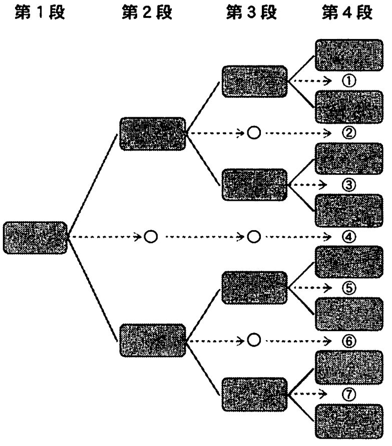

図３

一般のｎについてこの関係が保たれる仕組みも，図３を見ればわかる．すなわち，１つの頂点が２つに分岐するごとに，新たな段において，分岐する前の頂点が対応すべき「間」が１つずつ増え，かつ，既に頂点が対応づけられている既存の「間」は消えずに新たな段の「間」へ引き継がれるため，第１段から第ｎ段までの全頂点が，第ｎ＋１段の隣接する頂点の「間」と，ちょうど１対１に対応していることが視覚的にわかる．このことを代数的に表現すれば，例えば，

(第ｎ＋１段の間数)＝(第ｎ段の間数)＋(第ｎ段の頂点数)
＝(第ｎ－１段までの頂点数)＋(第ｎ段の頂点数)
＝(第ｎ段までの頂点数)

のように再帰的に表現することができる．しかし，樹形図を見て直接的にその意味や仕組みを感じ取ることや，そのような表現方法を自ら工夫し見出そうとすることの方が，認知的にも情意的にも先ず重要であると考える．厳密で一般的な表現による証明はその後でもよいであろう．

この植木算的な見方・考え方は，等式③のｒが３以上の整数の場合についても一般化することができる．ｒ＝３の場合は，図４のように「１つの頂点が３つに分岐するごとに，新たな段において，分岐する前の頂点が対応すべき『間』が新たに分岐した３つの頂点の内側に２つずつ増え，かつ，既に頂点が対応づけられている既存の『間』は消えずに新たな段の『間』へ引き継がれている」ことが「見てそれとわかる」．

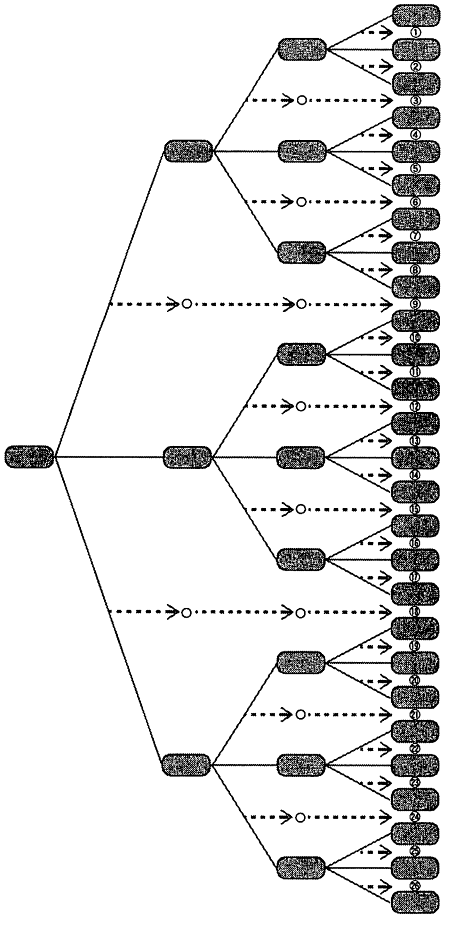

図4

一般のrについても，これらの樹形図から類比的に考えることができる．すなわち，「1つの頂点がr個に分岐するごとに，新たな段において，分岐する前の頂点が対応すべき『間』が新たに分岐したr個の頂点の内側にr－1個ずつ増え，かつ，既に頂点が対応づけられている既存の『間』は消えずに新たな段の『間』へ引き継がれている」わけであるから，第1段から第n段にある各頂点は，第n＋1段の隣接する頂点の間のうち，ちょうどr－1個ずつと対応する．従って，第n＋1段の隣接する頂点の間の数はr^n-1個であるから，第1段から第n段にある各頂点の総数を表す等式③の左辺は，右辺 $\dfrac{r^n-1}{r-1}$ に等しいことになる．

(2) 頂点どうしの対応付け

(1)では，第1段から第n段までの全頂点を第n＋1段の隣接する頂点の『間』と対応づけたが，第1段から第n段までの全頂点を第n＋1段の頂点そのものと対応づける方法も考えられる．その1つが，先に述べたトーナメント表における各試合と敗退者との対応づけとも考えられるが，ここではそれとは別の方法について考察する．

図5は，第3段から第1段までの全頂点を，第4段の頂点に，上から順に対応づけたものである．各段における頂点の数が，左の段に行くに従い右の段の半分になって行くため，その各段の頂点を，最右段の残りの頂点の上から半分ずつにそれぞれ対応させて行けば，最後の1頂点を除いてちょうど1対1に対応づけることができる．このことが，等式①の左辺と右辺の相等を視覚的に表している．

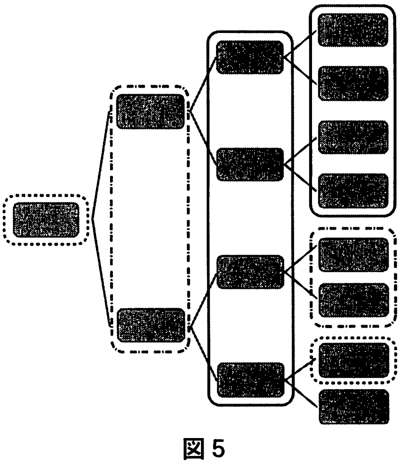

図5

この見方・考え方も，等式③のrが3以上の整数の場合について一般化することができる．r＝3の場合は，図6のように，各段における頂点の数が，左の段に行くに従い右の段の1/3になって行くため，その各段の頂点を，最右段の残りの頂点の上から1/3の2つ分ずつにそれぞれ対応させて行けば，最後の1頂点を除いてちょうど1対2ずつに対応づけることができる．一般のrについても，これらの樹形図から図的に類推することができる．

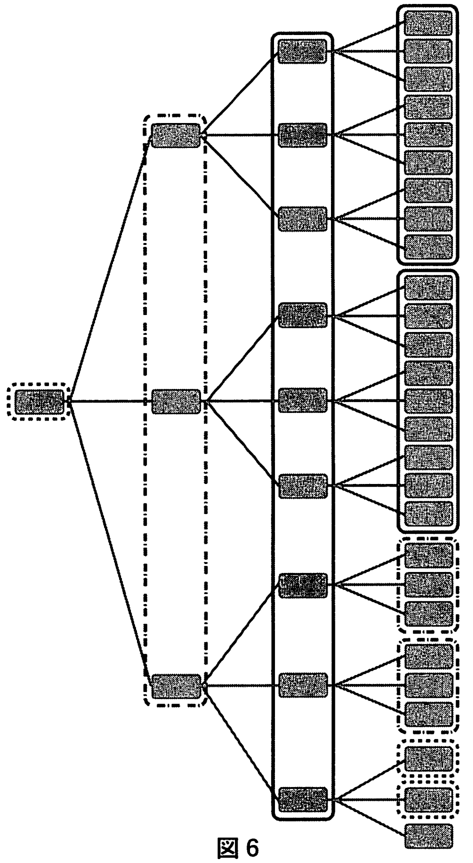

図６

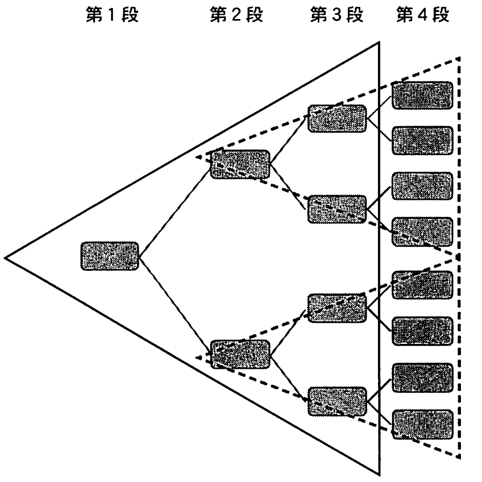

図７

これと同様に，r＝３，n＝３の場合の(3−1)S法を樹形図で表したものが図８であり，ｒとｎが一般の場合も，これらの樹形図から図的に類推することができる．

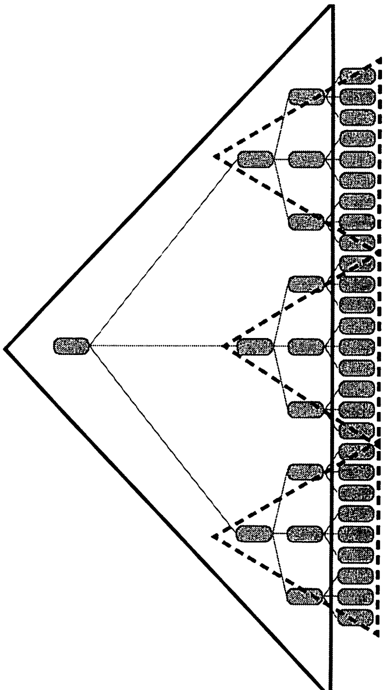

図８

⑶ (r−1)Ｓ法の樹形図による解釈

前節で見た(r−1)S法は代数的な証明方法であったが，これを樹形図上で図的・量的に解釈することもできる．ここでは，(r−1)S法の樹形図による２種類の解釈の仕方について考察する．

まず１つ目の解釈の仕方は，等比的な樹形図のもつ再帰的な構造に基づくものである．ｒ＝２，ｎ＝３の場合の(2−1)S法では，等式①の左辺の２倍からもとの左辺をひく操作を行うわけであるが，これを樹形図で解釈する１つの方法は，等式①の左辺を図７における実線の三角で囲んだ第１段から第３段までの頂点の総数と解釈し，左辺の２倍に相当する部分を，図７における破線の三角形２つで囲んだ頂点の総数と見るものである．この２つの破線三角形内の頂点から，もとの実線三角形内の頂点を取り除く場合，第４段が残って第１段分が不足する，と見ることができる．この解釈により等式①の右辺2^3-1が導かれる．

もう１つの解釈の仕方は，図９において，等式①の左辺を表す実線三角形内の頂点の数を２倍にすると，各頂点が２つずつに分岐し，右に

ちょうど１段ずつずれ，破線の台形で囲んだ部分の頂点数となる，と見るものである．この破線台形内の頂点からもとの実線三角形内の頂点を取り除くと，やはり第４段が残って第１段分が不足する，と見ることができ，この解釈によっても等式①の右辺2^3-1が導かれる．

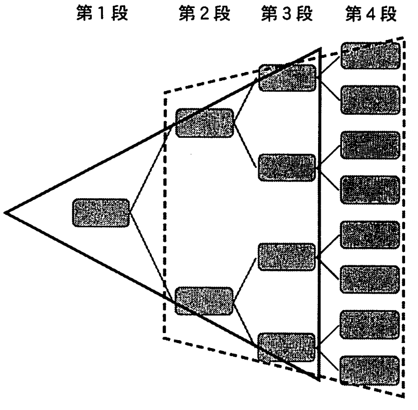

図９

これと同様に，ｒ＝３，ｎ＝３の場合の(3−1)S法を樹形図で表したものが図10であり，ｒとｎが一般の場合も，これらの樹形図から図的に類推することができる．

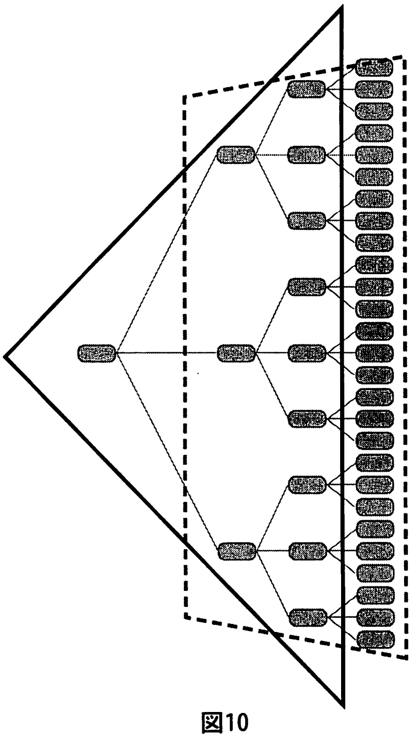

図10

５．樹形図とその他の題材

ここでは，これまで考察してきた「等比数列の和」以外の数学的題材について，樹形図の活用の観点から考察する．

(1) 樹形図とフラクタル図形

例えば図２のような樹形図は，段数を増やせば増やすほど，現実的には右方向および上下方向に拡がって行くように描かざるを得ない．しかし，樹形図の再帰性あるいは自己相似性を考慮すれば，理論上は有限の範囲内に描くこともできる．すなわち，各段の間にある辺の長さを，例えば，一つ左の辺の長さの半分に短縮しながら描いて行けばよい．図２のような樹形図において，分岐の角度を60°に保ちながら上記のように描いて行けば，それはよく知られた「シェルピンスキーの鏃」の境界線の一部になる．

(2) 二項定理，最短経路，パスカルの三角形

二項定理は，例えば$(a+b)^3$のような式の展開について，$(a+b)(a+b)(a+b)$の各因数からａないしｂを１つずつ選ぶ方法の数，すなわち組合せの数から求められる．そして，導かれた二項定理において，ａ＝ｂ＝１とすることにより，

$$ {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \quad \cdots ④ $$

という等式が得られる．この等式にはある種の不思議さや美しさが感じられるが，上記の説明では，その等式の成り立つ仕組みが「見てそれとわかる」とは言い難い．そこで，ｎ＝３の場合の文字の選

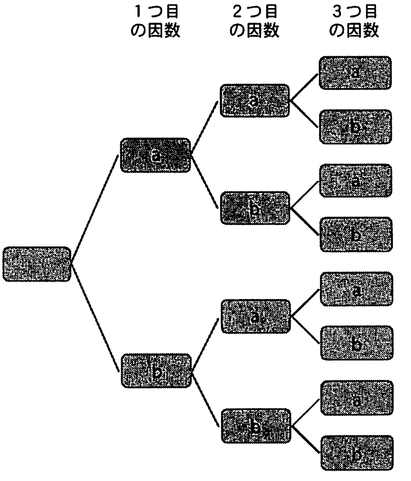

図 11

択の仕方を樹形図で表してみると，図11のようになる．この中で，順序を除いて同等な選択方法の数が左辺の二項係数 ${}_3C_0$，${}_3C_1$，${}_3C_2$，${}_3C_3$であり，それらを分類する前の全選択方法の数が最右段の頂点の総数 2^3 であり右辺に等しい．この樹形図により，等式④の仕組みが図的に捉え易くなってくるが，どの頂点同士が同類項に相当するのかについては未だ判然としてはいない．そこで，さらに表現方法や解釈の仕方の工夫が必要となる．

まず，図12は，図11を（1）で述べた方法を用いて格子上で描き換えた樹形図である．例えば図中の③は a^2b に相当する．

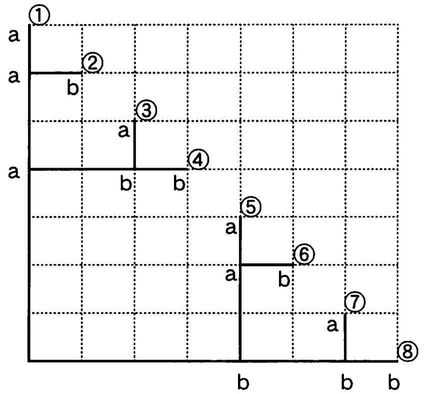

図12

一方，これとは別に，図13において，各格子点の横に書かれた数字は，Oからその格子点へ至る最短経路の数であり，これらはいわゆる「パスカルの三角形」を成していることはよく知られている．図12の①から⑧に相当する文字式の各同類項の数が，図13の「1，3，3，1」と等しいわけである．

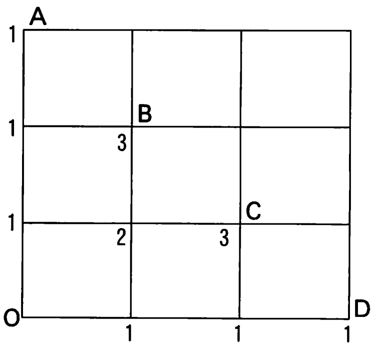

図13

では，図12の樹形図と図13の最短経路ないしパスカルの三角形とはどのような関係になっているのであろうか．それを直観的に理解する方法の１つは，樹形図である図12の頂点①から⑧のいくつかが重なって図13のようになると考え，その仕組みを視覚的に捉える表現や解釈の仕方を工夫することである．そこで，半分，半分と短縮しつつ描いてある図12の辺の長さを，頂点の重なりをあえて許し，格子上で全て同じ長さに戻してみる．すると，例えば図14の頂点②，③，⑤は同じ格子点上で重なり，図15のようになる．これにより，図13と同じパスカルの三角形が得られ，等式④や二項定理等の仕組みが見えてくる．

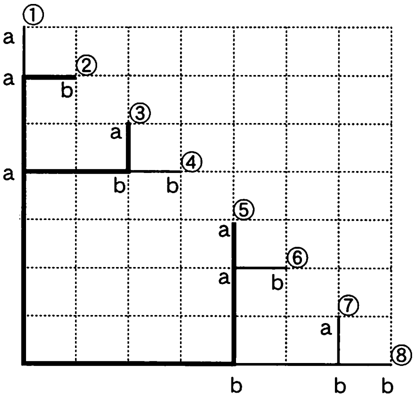

図14

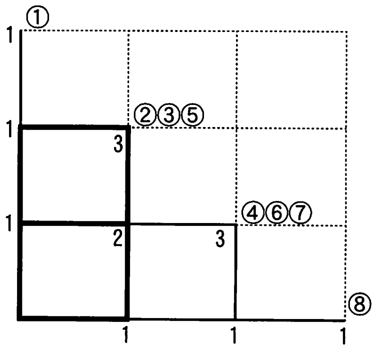

図15

6．まとめと今後の課題

はじめに述べたように，数学的な思考力と表現力は密接な関係にあり，また，認知面と情意面についても同様である．従って，他の側面を

切り捨てていずれか一方の側面のみを育むということは難しい．答申や根上・中本，Nelsenらが述べていることは，ややもすると一面的になりがちな算数・数学の学習指導への警鐘として読むこともできる．本研究では上記の認識に基づき，学校教育の中でよく扱われているいくつかの数学的題材を取り上げ，そこに新たな角度からの光を多面的にあてることを試みてきた．中でも，視覚的，直接的に意味や仕組みを把握することに重点を置き，そのための手段として，樹形図の活用による表現と解釈の工夫を提示してきた．それは，「観察者の数学的思考を刺激するために，視覚的な手がかりを与えること」や「見てそれとわかる」ことで「構造や原理を直接的に理解する」ことができ，思考力と表現力が相乗的に高まるであろうと考えるからである．また，「視覚に訴えるエレガントな証明を発見する喜びを味わう」ことにより，「その楽しかった記憶は，やがて学習した知識をもう一度やり直すとか，より発展させるとかするときの動因になるであろう」と考えるからである．NelsenはPWWの活用の仕方として下記の例をあげているが（Nelsen，秋山他訳，2003，p.v），これらは，上記のような理念を具体化する際の１つの枠組みを与えているものと考えることができる．

・教科書などに載っている証明を補うもの，あるいはそれに代わる証明として
・通常の宿題として
・特別課題として
・授業中に生徒に発表させる課題として
・レポートやプロジェクト学習の課題として

本稿では，題材の配列や考察のプロセスを，それを教材化したり実践したりする際の参考となるよう，教材化の１つのモデルを想定しながら進めてきた．その結果として，Nelsenが述べているような活用方法の対象となり得る教材ないし学習場の素描が得られたものと考えている．また，授業づくりにおいては，はじめから証明や説明方法をほぼ内包した表現を提示してそれを読み取らせるだけではなく，例えば，「(r－1)S法を樹形図で説明することができるだろうか．できるとすればどのような説明が可能だろうか．」といった，ややオープンな課題設定をして，表現方法自体を自ら工夫する活動をデザインすることも可能であり，重要であると考える．

今後の課題としては，本研究で考察した題材を，より実践的な教材とすること，そしてその実践から，学習指導に関する具体的な示唆を得ることである．また，本研究で考察した題材をより深く豊かな学習場として行くことも課題である．例えば，授業実践でよく取り上げられている「ハノイの塔」は，再帰的な構造をもつ題材であるため，本研究の知見を活かして研究中であるが，別の機会に考察を提示したい．さらに，本研究の趣旨に沿った新たな教材を開発して行くことも課題である．

【引用・参考文献】

平林一榮．2004．高等学校数学教育理念の問題．授業研究に学ぶ高校新数学科の在り方．長崎栄三他編著．p.170

根上生也，中本敦浩．2003．基礎数学力トレーニング―Nの数学プロジェクト．日本評論社

Roger B. Nelsen，秋山仁他訳．2002．証明の展覧会Ⅰ－眺めて愉しむ数学．東海大学出版会

Roger B. Nelsen，秋山仁他訳．2003．証明の展覧会Ⅱ－眺めて愉しむ数学．東海大学出版会

何森　仁，塩沢宏夫．1990．旅館の間取り考．数学セミナーリーディングス－新しい高校数学の展望．日本評論社．p.11，p.24

駒野　誠．2006．樹形図の自己相似構造に漸化式を見いだす：多角的視点に立った教材開発．日本数学教育学会誌 88(1)．pp.2-10

鈴木勇一．2006．「場合の数」と「数列」の関連に着目した教材について：解をむすびつける考えに焦点をあてて．数学教育論文発表会論文集 39．pp.553-558

藤原大樹．2008．図形の美しさと有用性を実感させる数学的活動の授業：シェルピンスキー四面体を題材として．数学教育論文発表会論文集 41．pp.387-392

Vincent P.Schielack,Jr. 1993. Tournaments and Geometric Sequences. Mathematics Teacher 86 (February 1993), pp.127-129

Woodward, Ernest. 1989. How Many Games in a Tournament ? . Mathematics Teacher 82 (May 1989), pp.332-335

文部科学省. 2009. 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編