

琉球大学学術リポジトリ

移動最小自乗法を用いた地盤・岩盤の高精度破壊力学シミュレータに関する研究

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学 公開日: 2016-04-14 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 江戸, 孝昭, Edo, Taka-Aki, Edo, Takaaki メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/33585

博士（工学）学位論文

移動最小自乗法を用いた地盤・岩盤の
高精度破壊力学シミュレータに関する研究

琉球大学大学院理工学研究科

江戸 孝昭

博士（工学）学位論文
Doctoral Dissertation of Engineering

移動最小自乗法を用いた地盤・岩盤の
高精度破壊力学シミュレータに関する研究
Study on High-Accuracy Numerical Simulators based on Moving Least
Squares Method in Fracture Geomechanics

2016年3月
March 2016

江戸 孝昭
Taka-Aki Edo

琉球大学
大学院理工学研究科
生産エネルギー工学専攻
生産開発工学講座

Processing Development Engineering
Material, Structural and Energy Engineering Course
Graduate School of Engineering and Science
University of the Ryukyus

指導教員：准教授 松原 仁
Supervisor: Associate Prof. Hitoshi Matsubara

本論文は、博士（工学）の学位論文として適切であると認める。



論文審査会


印 

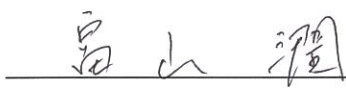

(主 査) 松原 仁


印 

(副 査) 藍檀 オメル


印 

(副 査) 中村 真也


印 

(副 査) 富山 潤

論文要旨

論文題目

移動最小自乗法を用いた地盤・岩盤の高精度破壊力学シミュレータに関する研究
Study on High-Accuracy Numerical Simulators based on Moving Least Squares Method in Fracture Geomechanics

論文要旨

本論文は、地盤・岩盤における大変形、流動化、崩壊、破壊現象等を高精度に解析できる数値計算手法の開発を目的としたものである。

はじめに、日本国内外で発生した地盤・岩盤における崩壊現象が人類へ及ぼす影響や被害状況を示し、高精度な斜面評価手法の確立意義を述べた上で、当該分野における昨今の研究動向が示されている。次に、亀裂性岩盤を対象とした高精度亀裂進展解析手法を開発している。具体的には、亀裂ネットワークモデル (DFN) により亀裂形状を決定し、岩盤における亀裂を要素 (有限要素) の辺/面で表現する。このとき、回転自由度を有する一般化有限要素法と移動最小自乗法 (MLSM) を亀裂性岩盤モデルに適用することで、無数の不連続面を有する岩盤の弾性状態から破壊に至る過程が解析可能となる。上記の手法では、亀裂性岩盤のマクロな亀裂の表現は可能となったものの、不連続面を要素辺/面で直接表現することから、岩盤のミクロ構造 (粒状構造) を反映させることは難しい。そこで、本研究では碎屑性の堆積岩を対象とし、その粒状構造を直接的に考慮できる手法を新たに開発している。具体的には、亀裂性岩盤モデルに、弾性問題において高精度な解が得られる EFMM (Enriched Free Mesh Method) と多次元型移動最小自乗法 (C-MultiMLSM) を適用することで岩盤の粒状構造を考慮している。結果として、亀裂性岩盤モデルにおいて、粒状構造を考慮した亀裂進展解析を実現し、実験結果との整合性も良いことを確認した。次に、地盤の崩壊現象に関しては、MPM (Material Point Method) と呼ばれる手法に着目し、本手法における弾性エネルギーの変動問題を抑制する。具体的には、移動最小自乗法 (MLSM) を用いてひずみ増分値をスムージング化することで、エネルギー変動の抑制を図った。その結果、応力値の異常変動を抑えることができ、ロバストな解析を実現している。さらに、実地盤・岩盤を対象とした幾何モデリング手法に関しては、多面体形状を有する幾何モデリングシステムを新たに構築している。本手法を用いることで数 10 万ブロックを有する超大規模な地形モデルの生成が可能となり、また多種多様なブロック形状のモデリングも可能となる。最後に、本研究の総括ならびに妥当性を示し、今後の展望を述べる。

目次

第 1 章 序論

1.1 研究の背景	2
1.2 研究の目的および論文構成	19
参考文献	23

第 2 章 岩盤の亀裂ネットワークを考慮した不連続体解析手法の提案および亀裂進展解析

2.1 緒言	35
2.2 回転自由度を有する一般化有限要素法	37
2.3 移動最小自乗法 (MLSM: Moving Least Squares Method) による亀裂の表現	
2.3.1 三角形辺上の亀裂を考慮した変位場	40
2.3.2 亀裂発生条件と亀裂進展アルゴリズム	42
2.4 亀裂進展パターン解析法の性能評価	
2.4.1 弾性状態における精度	46
2.4.2 GFEM と MLSM 混在時における一定ひずみ場の表現	48
2.4.3 中央切欠きを有する梁の曲げ問題	50
2.4.4 円孔を有する試験体の一軸圧縮問題	50
2.4.5 貫通切欠きを有する試験体の圧縮問題	54
2.5 不連続岩盤モデルの亀裂進展解析	
2.5.1 回転自由度を有する三角形要素	56
2.5.2 ひずみ自由度を有する三角形要素	60
2.6 結語	63
参考文献	64

第 3 章 粒状構造を有する脆性材料の離散亀裂進展解析手法の開発および性能評価

3.1. 緒言	68
3.2. Enriched Free Mesh Method (EFMM)	

3.2.1	概要	70
3.2.2	評価節点における積分領域	71
3.3.	粒状構造を考慮した離散亀裂進展解析手法	
3.3.1	亀裂進展解手法および粒子界面における亀裂発生応力の算出法	73
3.3.2	亀裂発生後における節点剛性の評価方法：C-MultiMLSMM の導入	
(a)	C-MultiMLSMM における誤差評価	75
(b)	C-MultiMLSMM に基づく節点の変位場	77
(c)	C-MultiMLSMM に基づいた節点剛性マトリックス	79
(d)	影響領域の動的設定	80
3.4.	静弾性問題における EFMM の精度	
3.4.1	片持ち梁における精度評価	82
3.4.2	積分領域の変形と精度の関係	84
3.5.	離散亀裂進展解析手法の性能評価：亀裂進展経路に関する検討	
3.5.1	中央切欠きを有する梁の曲げ試験	87
3.5.2	複数の円孔を有する試験体の一軸圧縮試験	87
3.6.	先在亀裂を含む試験体の破壊プロセス解析	92
3.7.	結語	95
	参考文献	96

第 4 章 Material Point Method (MPM) におけるエネルギー変動問題に対する抑制手法の提案とその検証

4.1.	緒言	100
4.2.	MPM および GIMP の概要	
4.2.1	支配方程式および弱形式化	102
4.2.2	支配方程式の離散化	103
4.3	MPM を用いた地盤の大変形解析（北上原斜面崩壊）	
4.3.1	北上原斜面崩壊の地質特製および地すべり発生時の環境特性	107
4.3.2	北上原斜面崩壊の解析モデル	109
4.3.3	摩擦面上における接触アルゴリズム	109
4.3.4	数値解析結果	112
4.4.	エネルギー変動に関する抑制法	
4.4.1	Moving Least Squares MPM (MLS-MPM)	
(a)	MLSMM における評価関数	117
(b)	修正ひずみ増分値の導出	117

4.4.2	MLS-MPM のアルゴリズム	118
4.5.	数値解析例	
4.5.1	棒の準静的問題	121
4.5.2	棒の動的問題	123
4.5.3	物体の平行移動問題	123
4.6.	結語	127
	参考文献	128

第 5 章 多面体形状を有する幾何モデリングシステムの開発

5.1.	緒言	133
5.2.	多面体ブロックのモデリングシステムの開発	
5.2.1.	任意形状の要素分割	135
5.2.2.	ブロック構造のモデリングシステム	
	(a) 2次元多面体ブロック	136
	(b) 3次元多面体ブロック	142
5.3.	3次元地形のモデル化	
5.3.1.	移動層のモデル化	146
5.3.2.	不動層および移動層から成る地形のモデル化	153
5.4.	3次元大規模地形モデルの構築	158
5.5.	結語	165
	参考文献	166

第 6 章 結語

6.1.	研究のまとめおよび今後の課題	170
------	----------------	-----

付録	174
謝辞	201

第 1 章 序論

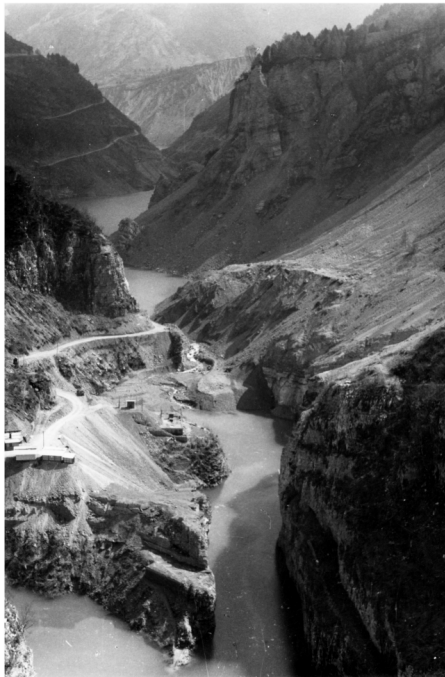
Introduction

1.1 研究の背景

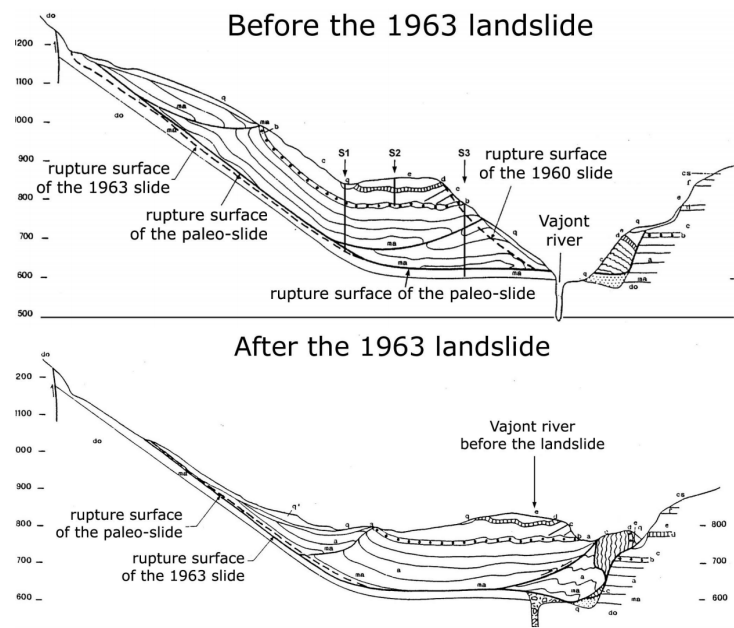
地球規模の気候変動に伴い、各地で突発的かつ局所的な降雨（ゲリラ豪雨）が確認され、斜面崩壊ならびに地すべり、落石等が発生し、また地盤においては液状化、浸透破壊等の崩壊現象も多発化している。地盤・岩盤の大変形、崩壊現象と降雨や地震外力とは密接な関係があり、一般的にこれらの外的要因によって地盤・岩盤の安定を保つことが困難となり発生するとされている。このような崩壊現象は国内外問わず、数多くの事例が存在する。以下に、日本国内外で発生した地盤・岩盤の変形、流動化、崩壊現象に関する事例を示す。

日本国外にて発生した地盤・岩盤における崩壊現象の事例として、バイオントダムで発生した地すべりが挙げられる。1963年10月9日午後10時39分（現地時刻）、イタリア、ベニスの北100kmに位置し、イタリア北部アルプス・ドロミテ（Dolomite）地域にあるバイオントダムで巨大地すべりが発生した^{1.1), 1.2)}。Fig.1.1 にバイオントダムで発生した地すべりの様子を示す。本ダムは1956年に竣工され、その4年後である1960年に完成したダムであった。標高261.6 mにあり、 $150 \times 10^6 \text{ m}^3$ もの貯水量を誇るダムであった。1960年から水の貯留が開始され、その年の10月には水深170 mまで達し、11月4日には180 mとなり、貯水量が700,000 m^3 となった。それと同時に、斜面においてゆっくりとした滑りが確認されている。1963年4月から5月にかけて、ダムの水深が195 mから230 mまで急速に増加し、この時の斜面のすべり速度は0.3 cm/dayであったとされている。7月中期には水深が240 m、すべり速度が0.5 cm/dayとなり、8月には0.8 cm/dayまで上昇した。10月9日に水深が235 mと下がった後、すべり速度は20 cm/dayと上昇し、同日午後10時39分（現地時刻）に地すべりが大滑動した。270 $\times 10^6 \text{ m}^3$ もの非常に巨大な土石流が20~30 m/sの速度で滑り落ちたと報告されている。

2005年10月8日午前8時28分（現地時刻）、パキスタンが実効支配しているヒマラヤ北西部のカシミール地方を震源としてマグニチュード7.6、震源深さ26 kmの地震が発生した^{1.3) - 1.7)}。Fig.1.2 にこの地域における断層の概念図ならびに地すべりの様子を示す。この地域はインド亜大陸プレートとユーラシア大陸プレートの境界に位置し、周辺には活動層が広く分布しており、歴史的に繰り返しマグニチュード7~8の地震が発生している地域である。この地震により多数の斜面崩壊が確認され、チックールから稜線沿い東側2 kmに位置するダンベ地区では、全長2.5 km、最大幅500 m、深さ50 m程度のすべり面を有する地盤が崩壊し、ジェラム川の支流を堰き止め、堤長500 mの天然ダムを形成した。崩壊後における土塊幅は、崩壊域上部で500 m、下部で900 mもあり、堆積域は1.5 km、堆積物の厚さは250 m程度と見積もられている。また、この地すべりによる移動土塊量は2700万 m^3 と推定されており、極めて大規模な地すべりであった。この斜面崩壊は他の地域の斜面に比べ、広い範囲で比較的浅い初期のすべりが全体に発生していたことが確認されており、冠頂部の稜線上部には多数のクラックの存在も確認されていた。同時期に発生したその他の地すべりとして、幅120 m、長さ200 mの比較的小さな地すべり（Pir Bandiwala landslide）も発生している。ハティアンでは、長さ2.0 km、平均幅



(a) Vajont valley after landslide occurred
(from Panizzo, A. *et al.* 2005)

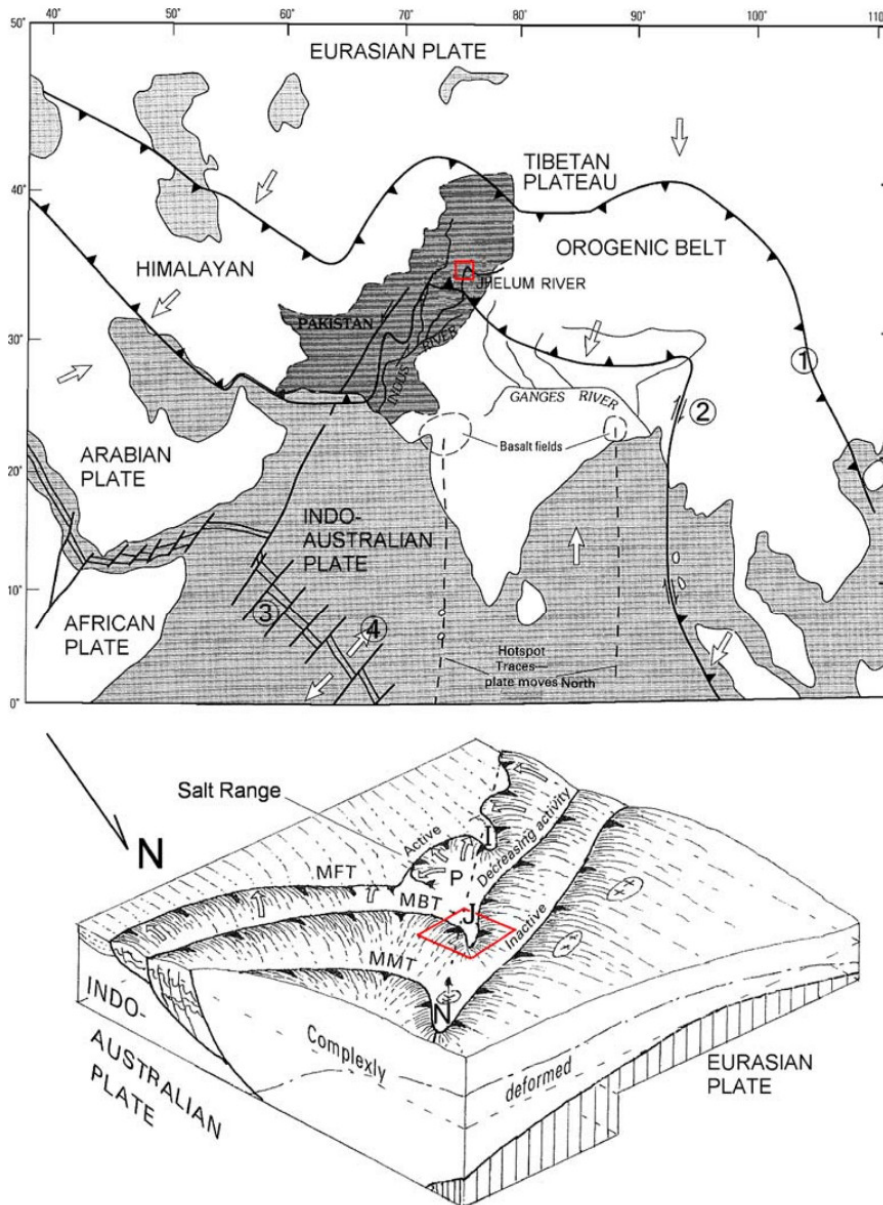


(b) The landslide model of Vajont landslide before and after
(from Panizzo *et al.* 2005)



(c) The aerial view of Vajont valley (from Poisel 2013)

Fig.1.1 The large-scale landslide occurred in Italy on 9th October, 1963



(a) Index map of Northern Pakistan earthquake (from Sato *et al.* 2007)



(b) Landslide of north of Muzaffarabad in Neelum Valley was caused by earthquake (from Aydan *et al.* 2009)

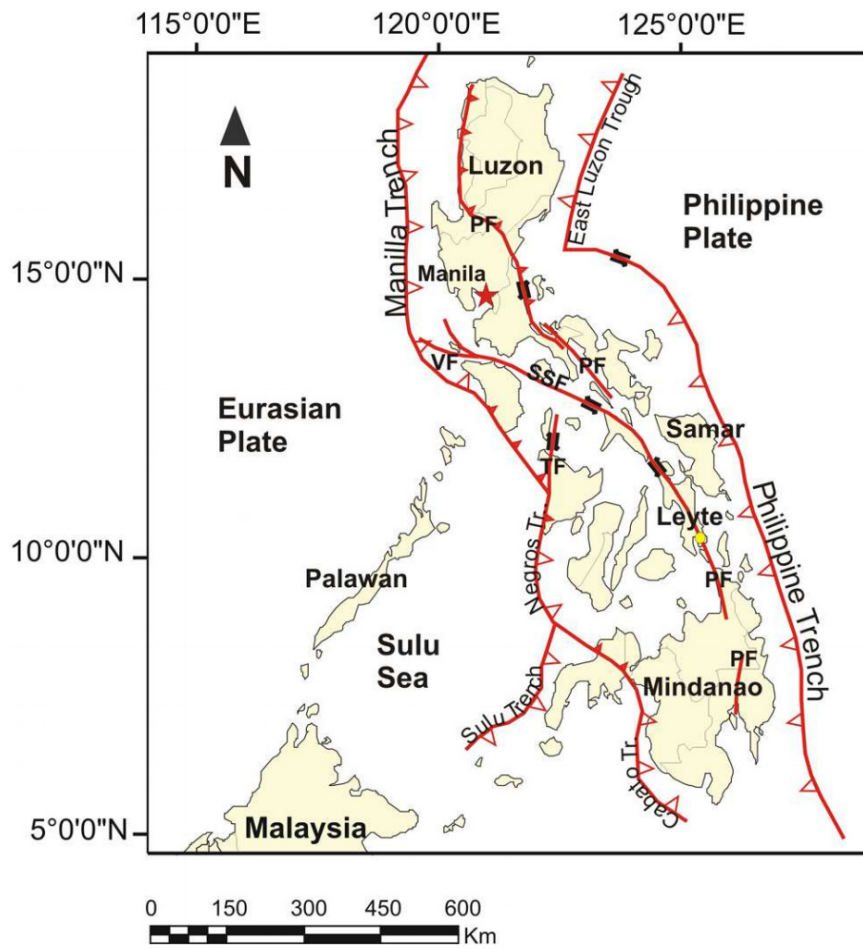
Fig.1.2 The slope failure caused by Northern Pakistan earthquake

500 m, 最深部 100 m 以上, 移動土塊量 10^7 m^3 以上と大規模な崩壊が発生し, この崩壊により 2 つの地すべりダムが形成されている。また Schneider^{1.5)}は, この地すべりは初生すべりではなく, 既存の地すべり地形斜面で再滑動としていると報告しており, また Sato *et al.*^{1.6)}の画像解析によると, この地震における斜面崩壊は起震断層であるバラコットーガリ断層 (Balakot-Garhi fault) の上盤側で頻発し, 約半数がその断層から 2 km 以内に分布する特徴があると報告している。この地震によりパキスタンなたびにインドでは数千名もの死者数が出ており, また両国ともに多くの住宅や医療機関, 政府機関の建物が損壊した。

カシミール地方で発生した地震の翌年, 2006 年 2 月 17 日フィリピンのレイテ島にある Guinsaugon において, 午前 10 時 30 分~45 分 (現地時刻) の僅か数分間で, 大規模な地滑りが発生した^{1.8) - 1.11)}。Fig.1.3 にフィリピン直下に存在するプレートの位置ならびにレイテ島にて発生した地すべり様子を示す。標高 810 m, 斜面角度約 12° の山岳地において, $15 \times 10^6 \text{ m}^3$ の土石流が 27~38 m/s の速さで滑り, 大規模な崩壊を起こした。総死者数は 1100 名以上と報告されている。崩壊現象が発生する数日前にかなりの雨量が確認されている。Guinsaugon の西部に位置する Otikon にて 2 月 8 日~12 日の間に 571.2 mm (一日平均 114 mm) のかなりの規模の降雨が観測され, またレイテ島南部にて小さい地震も確認されている。午前 6 時 07 分 (現地時刻) にマグニチュード 2.3, 午前 10 時 36 分にマグニチュード 2.7 の地震が観測されている。この地帯には以前よりクラックの存在が報告されており, そのような状況下において, 降雨および地震が発生したことで崩壊したのではないかと推定されている。

我が国, 日本においても 1997 年 5 月 11 日に秋田県鹿角市八幡平の澄川温泉で高速土砂移動現象が発生した^{1.12) - 1.16)}。Fig.1.4 に秋田県で発生した斜面崩壊時の様子ならびに概念図を示す。斜面崩壊発生の前日である 5 月 10 日に地すべり活動の活発化が確認され, 翌日である 11 日に土砂が一気に滑り落ちた。旧地すべり地形を持つ斜面が再活動し, その地すべりの末端の土塊が約 1.7 km 流下する長距離土砂移動となった。一般的に一回の移動距離が小さいとされている再滑動地すべりが, その地すべり末端部の土塊と相俟って高速長距離移動したことや, この斜面崩壊に伴い水蒸気噴出, 爆破が発生時刻である午前 8 時前後の短い間に発生したことにより注目を集めた。この地すべりは, 斜面全長約 700 m, 幅 150~350 m, すべり面深度 50~70 m, 滑動面積約 0.17 km^2 , 地すべり土塊量約 600 万 m^3 の大規模な地すべりであった。発生当初は, 崩壊土砂内に多量の水を伴うことから, 斜面崩壊は土石流とされていたが, 地すべり末端部の崩壊地形, 流下域での流れ山地形, 河床沿いに残された堆積物等の検討より, 土砂移動現象の主な要因として, 水による攪拌の影響はあまりなく, 地山での構造をある程度保持した状態で長距離移動したことから, 岩屑なだれ (あるいは山津波) と推定され, 流動性の高い斜面崩壊現象とは区別された。岩屑なだれは複数回発生し, 多量の水を含む土石流は後続の地すべりにより発生したとされている。

2004 年 10 月 23 日午後 5 時 56 分, 新潟県中越地方をマグニチュード 6.8 (震源の深さ 13 km) の地震が発生した^{1.17) - 1.19)}。Fig.1.5 に中越地震の被害の様子を示す。



(a) Tectonic of Philippine and Eurasia plate, and location map of Leyte landslide

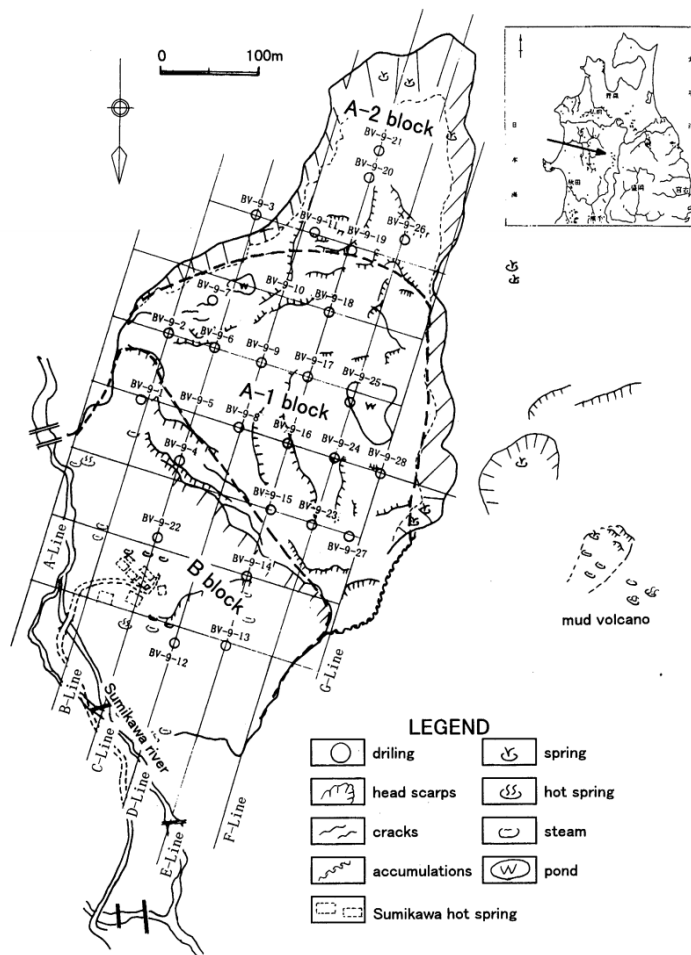


(b) Picture of Leyte island after landslide

Fig. 1.3 Leyte landslide occurred on 17th February, 2006 (from Evans *et al.* 2007)



(a) The aerial view of landslide in Akita (from 小野ら 2006)



(b) The Plane view of landslide in Akita (from Ogawauchi *et al.*1998)

Fig. 1.4 The large-scale landslide at Sumikawa in Akita (11th May, 1997)

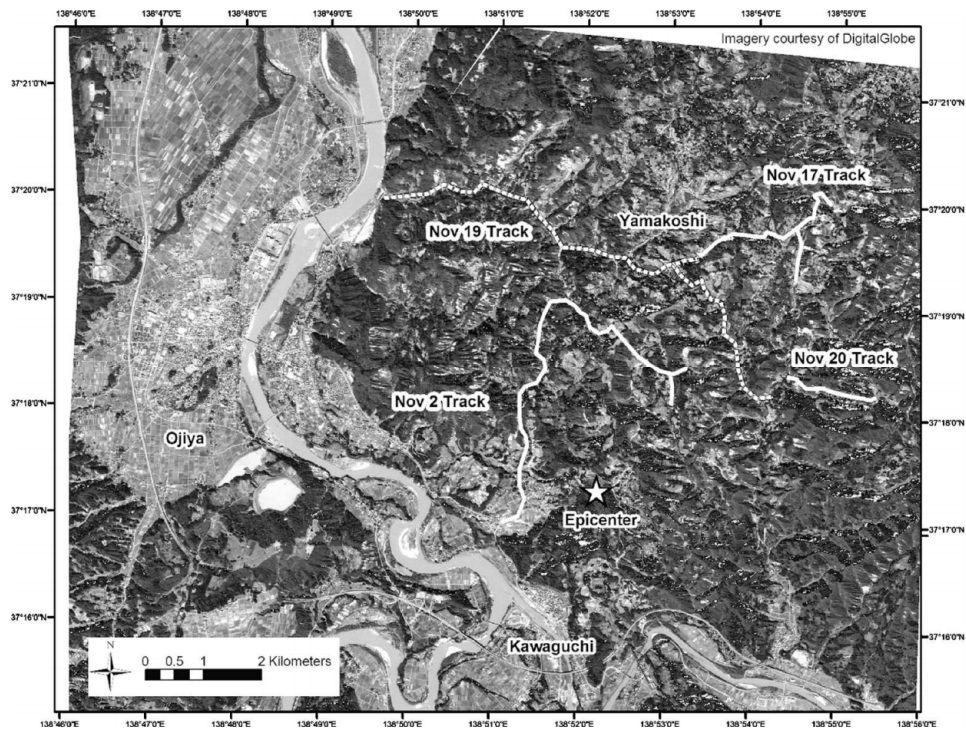
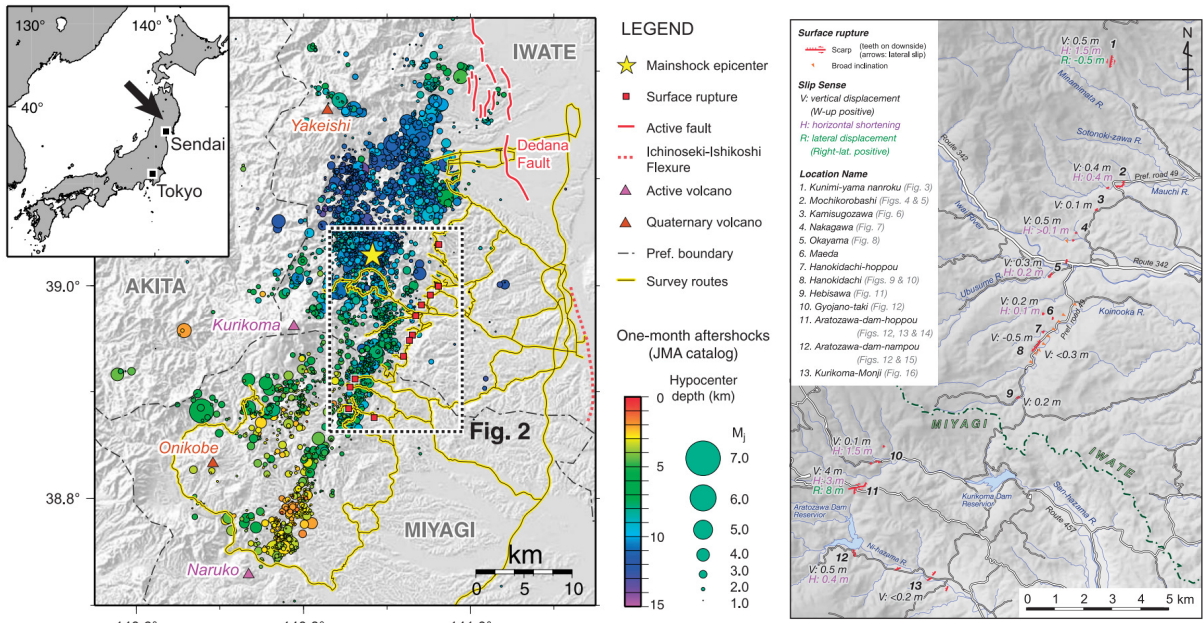


Fig.1.5 Satellite image and pictures of Mid-Niigata Prefecture Earthquake in 2004
(from Kieffer *et al.* 2006)

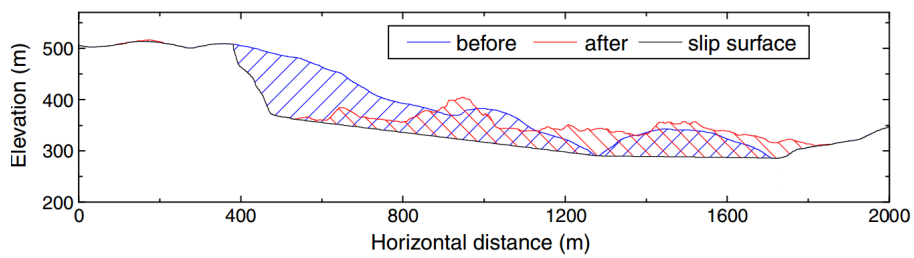
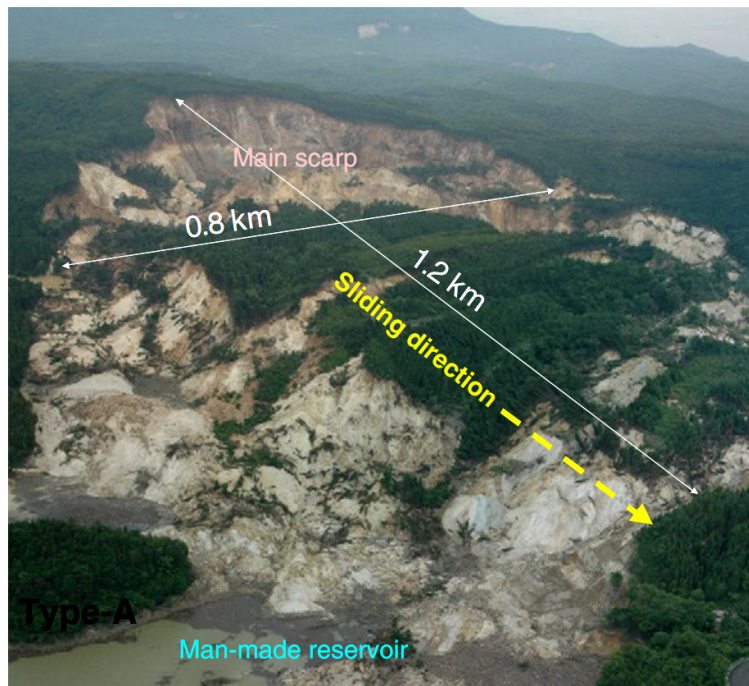
関口，佐藤^{1.17)}は，地震断層は北北西－南南東方向に延び，深さ 2.8 km の東側から西側に向かって傾斜約 53° で深くなる面に沿って，西側地塊が東側地塊に対して隆起した逆断層と推定している。また上盤側でより大きな地震動が発生し，斜面崩壊が集中したとしている。初期の地震に続き，午後 6 時 3 分にマグニチュード 6.3，午後 6 時 11 分にマグニチュード 6.0，午後 6 時 34 分にマグニチュード 6.5 の地震が継続して発生した。震源の中越地域では震度 6 弱～7，新潟市においても震度 4～5 弱の揺れがあったと報告されている。旧山古志村，小千谷市，長岡市，川口町周辺では地すべり，落石，崩壊現象が頻発し大きな被害を受けた。旧山古志村では村の中心を流れる芋川沿いで大規模な地すべりが発生したため，川の流れが堰き止められ，川沿いに点在する集落が水没するなど 2 次的被害も生じている。事実，全壊家屋 2874 棟，死者数 40 名と報告され甚大な被害を出している。森脇，佐々木^{1.18)}によると，この地震より発生した比較的大きな地すべりは，過去に地すべり活動があった痕跡を地形的に示している斜面で発生していることが明確であるとしている。すなわち，この地すべりは 1997 年に秋田県で発生した澄川地すべりと同様，地すべり地形斜面の再滑動によるものと現地調査から明らかにされている。

2008 年 6 月 14 日午前 8 時 34 分，岩手県南部の奥州市（岩手県，宮城県の県境付近に位置する奥羽脊梁山脈東麓付近）を震源とする，マグニチュード 7.2 の内陸直下型地震（岩手・宮城内陸地震）が発生した^{1.20)-1.24)}。この揺れにより岩手県奥州市，宮城県栗原市で最大震度 6 強と強く揺れ，震央から 80 km に位置する秋田県羽後本荘市で震度 3，山形県中山町で震度 4 であった。この地震により 3000 ヶ所以上の地点で斜面崩壊が発生した。震源の深さは 8 km と浅く，周辺の山地を主体として斜面崩壊が多発し，この崩壊は震源断層の上面に位置する岩盤で集中し，9 割以上が上盤側で発生した報告されている。また崩壊による移動土塊は溪床を埋積し土砂ダムを形成し，一部では大規模な土石流となり被害を拡大させ，溪床，山腹内にも多量の土砂が残留した。この地震より発生した荒砥沢ダム上流域（宮城県栗原市）で大規模地すべり（荒砥沢地すべり）が発生した。Fig.1.6 に岩手・宮城内陸地震の発生箇所ならびに荒砥沢地すべりの発生箇所，荒砥沢地すべりの様子を示す。荒砥沢地すべりの規模として斜面長約 1.4 km，最大幅約 0.9 km，最大すべり深度 100 m と我が国の地すべりの中でも最大級の大規模地すべりであった。すべり面勾配は 2° 程度と著しく平坦で移動距離は 300 m とされ，移動体の変形構造から推定される地すべり挙動は，ブロックスライド型の地すべり変動であった。この斜面崩壊の発生要因として，旧地すべり地形内で発生していることから，秋田県澄川地すべりならびに新潟県中越地方で発生した地すべり同様，初生地すべりではなく過去の地すべりが強振動により再滑動した再滑動地すべりであると示唆された。この地すべりにおいても，斜面崩壊による複数の死者，負傷者の人的被害ならびに全壊，半壊，一部損壊の建物被害を生じている。

このように，日本国内外において多数の地盤・岩盤の大変形，崩壊，流動化現象が生じている。また上記以外の事例として，国外においては中国四川省^{1.25)-1.27)}や国内においては福島県白河市^{1.28)}，いわき市^{1.29)}などにおいて，地盤・岩盤の崩壊現象，それに伴う人的被害は多数存在する（Fig.1.7 に中国四川省で発生した斜面崩



(a) Location map of Iwate–Miyagi Nairiku earthquake and Aratozawa dam (from Toda *et al.* 2010)



(b) The aerial view of Aratozawa landslide and cross section before and after (from Kokusho *et al.* 2011)

Fig.1.6 Landslide occurred by Iwate-Miyagi Nairiku earthquake in Aratozawa dam



Fig..1.7 The large-scale landslide in Sichuan Province, China
(from Chen *et al.*2014)

壊を示す)。これらの現象は我々の生活域の傍で発生するものもあり災害ポテンシャルは非所に高い。我々の生活の安全性を確保するためにも地盤・岩盤における流動化挙動，崩壊挙動，変形挙動等の解明は極めて重要である。さらに上記の事例（カシミール地震，秋田県澄川地すべり等）のように，現在は安定している地すべり（過去に地すべりを起こしている斜面）においても直近で強震動が発生した場合，再滑動する可能性がある。過去に斜面崩壊を生じた地形において，地すべり先端部などが浸食されて深い谷が開折し移動層が移動できる空間ができている場合，地震外力等により移動ポテンシャルが生じ崩壊する危険性が極めて高い。また，岡田ら^{1.30)}によると，将来，異常気象により日本のほとんどの地域において豪雨の発生頻度が増加傾向にあり，主に夏季における発生頻度の増加が大きいとしている。さらに，地球規模の気候変動による梅雨期の湿舌の増加や台風の強大化，進路変化に起因し，将来，極端な降雨強度の大きな事例も示唆されている。一般に，降雨と斜面崩壊には関係があると見なされていることから^{1.31)}，地盤・岩盤の崩壊時における挙動の解明は急務であると思われる。

これらの現象は，上述したように，降雨や地震等の外的要因と地盤・岩盤の地形形状，それらが有する亀裂などの地形的要因により発生するマルチフィジックスな現象であり，極めて複雑な現象である。そのため，これらの現象を精度よく評価することは非常に難しく，現在でも地盤・岩盤における斜面評価方法には多くの方法が提案され続けている。斜面の安定性評価モデルとして，Wilkinson *et al.*^{1.32) - 1.35)}は植物の植生，水の蒸発過程の影響等を考慮した斜面の評価方法を提案している。Fig.1.8 に斜面モデルの概念図を示す。その他にも，斜面崩壊の予測法には Ishihara and Kobatake^{1.36)}のタンクモデルを用いた方法を始めとし種々の物理モデル^{1.37) - 1.41)}によるものや統計モデル^{1.42)}による方法などがある。一方，地盤岩盤分野においても，これまで多くの研究者が地盤・岩盤の斜面安定評価手法を提案してきた。斜面内部のすべり面（弱面）を円弧と仮定し，そのすべり土塊を複数個に分割し，そのブロック間に作用する応力を考慮せず極限状態を単純化し，地盤のせん断応力，有効応力，間隙水圧，せん断強さを用いてその斜面の安定性を評価するフェレニウス法（Fellenius 法）^{1.43)}やブロック間に作用する応力をモデル化したビショップ法（Bishop 法）^{1.44)}，すべり土塊を剛体とみなし土塊の変形量を算定するニューマーク法（Newmark 法）^{1.45)}，さらにその改良手法^{1.46), 1.47)}などが提案されてきた。特に地震時の盛土斜面に関する安定性評価には，ニューマーク法を用いるケースが多い。ニューマーク法はすべり面を仮定し，このすべり面に沿う変位量を算出することで安定性評価を行うため，繰り返し発生する地震外力を考慮することも比較的容易であるため頻繁に用いられる。しかしながら，従来のニューマーク法は地震発生以前にすべり面を仮定するため，このすべり面に沿う永久変位量を求めるものであり，地震による最大変位量等は考慮することはできないが，現行として，これらの簡易法を用いて斜面の安定性を評価する場合が多数である。これらの方法は簡易的なものであり，材料特性が複雑な場合におけるすべり面の算定は極めて難しく，さらに岩盤中における不連続面の分布特性や微細な先在亀裂を考慮した破壊性状の表現や岩盤のブロック構造を考慮した破壊パターンの表現は不可能である。地盤・

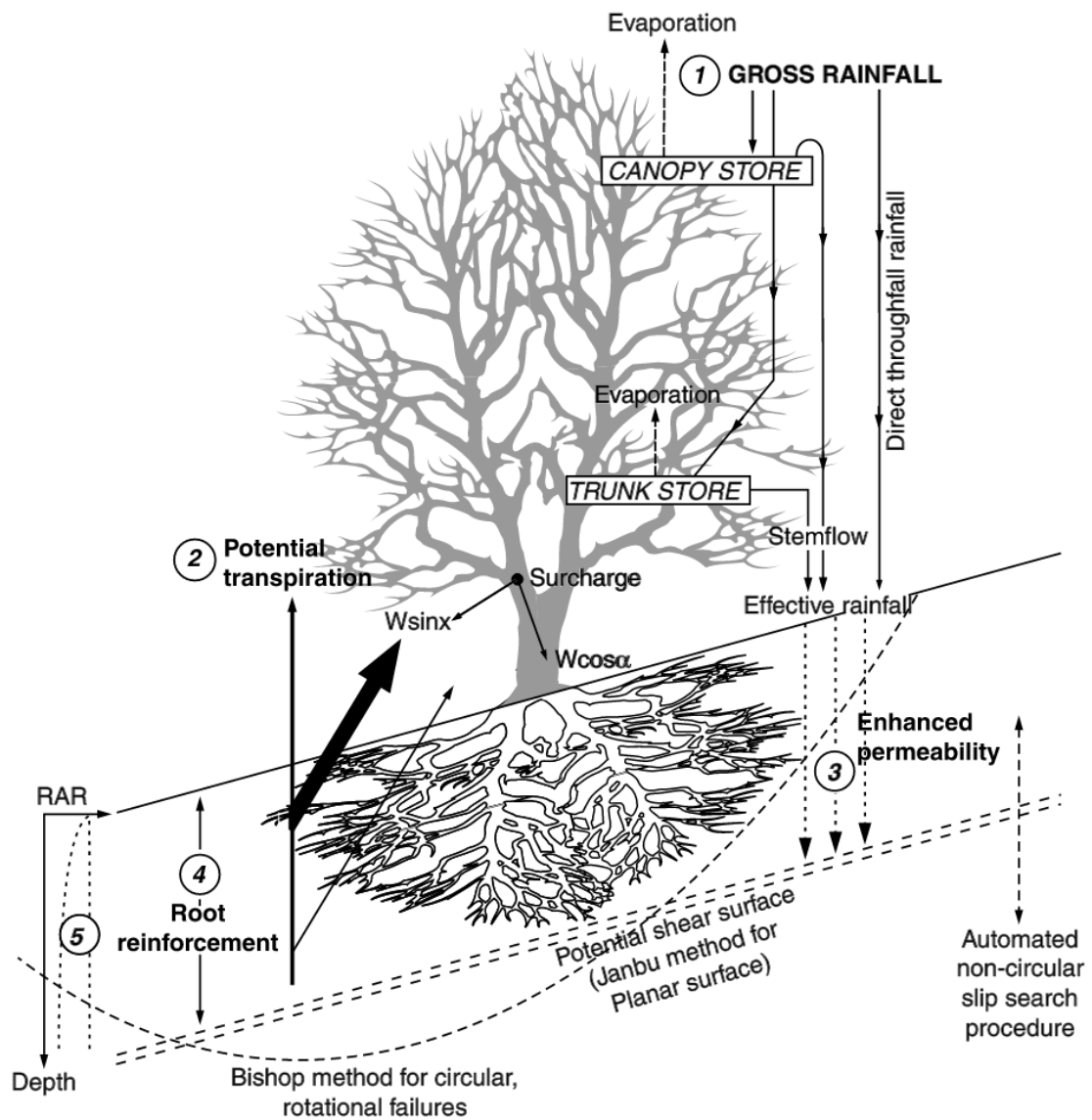


Fig.1.8 Illustration of slope failure model (from Wilkinson *et al.* (2000))

岩盤の地形特性や材料特性は地域により様々であり、またそれらに微細亀裂などを含む場合、対象とする物体はより複雑となり多種多様な構造を呈する。これらの特性を考慮し破壊性状、変形挙動を高精度に解析できるモデルの開発は、今後、これらの変形挙動、崩壊挙動を把握するために不可欠である。

これまでに、地盤や岩盤の崩壊、変形、移動挙動等の物理特性を評価するための様々なモデルが開発されてきた^{1.48)}。地盤・岩盤を対象とした不連続体の解析手法として、土粒子をそのままモデル化し、その集合体である地盤や岩盤の挙動を解析する手法、岩盤内の結晶や亀裂をブロックとしてモデル化し、岩盤全体のマクロな応答を解析する手法がある。前者には、Zienkiewicz and Cheung^{1.49)}により開発され

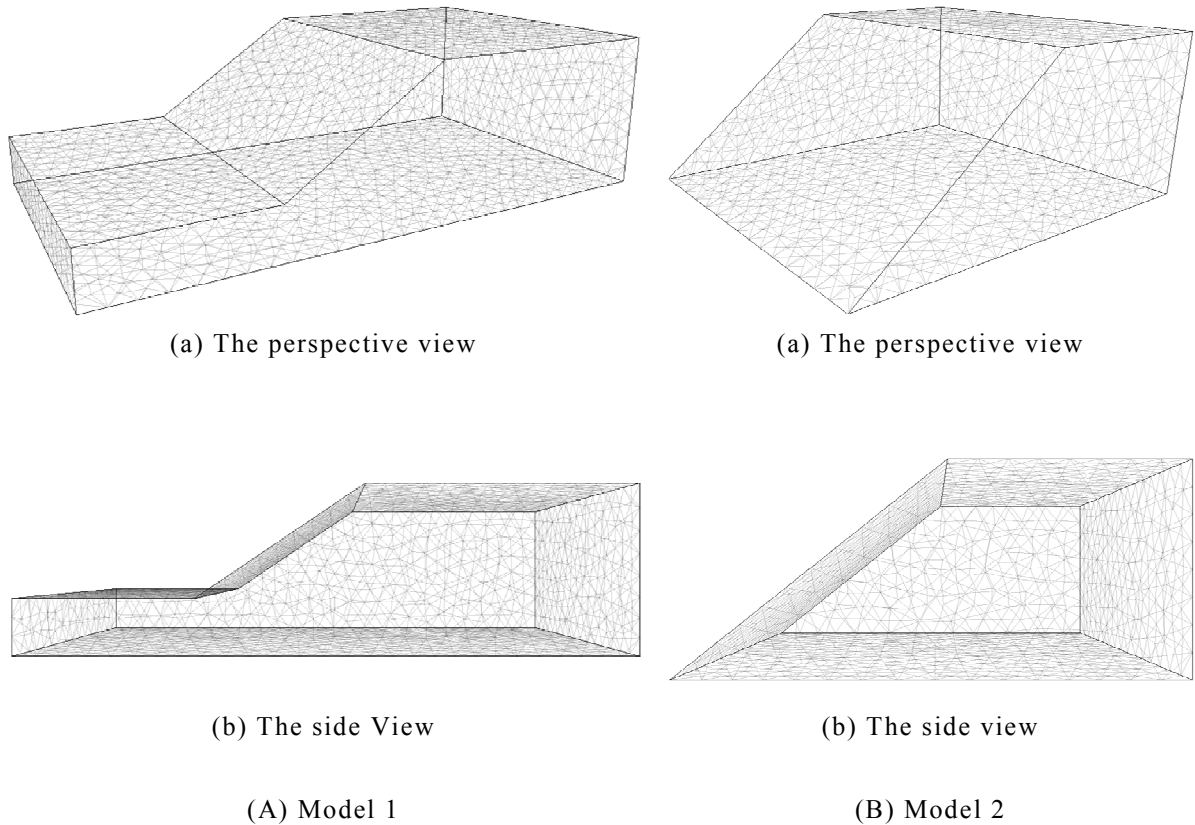


Fig.1.9 Examples of slope model for FEM mesh

た有限要素法（FEM：Finite Element Method）がある。有限要素法は対象となるモデルを有限個の要素に分割し、要素内の変位場や応力場を近似的に解くことで、対象とするモデルの変形挙動、応力状態（浸透解析においては浸透特性）を表現する手法である。Fig.1.9 に有限要素法による斜面安定解析で用いられる一般的なモデル形状を示す。同図に示す有限要素モデルは、アースフィルダムの形状を想定される場合や盛土等の法面を考慮した解析で用いられる。有限要素法を用いて地盤の変形挙動を評価する場合、Roscoe *et al.*^{1.50)}の Cam-clay モデル、Sekiguchi and Ohta^{1.51)}の関口-太田モデル、橋口ら^{1.52)}の下負荷面モデル、Asaoka *et al.*^{1.53), 1.54)}の上下負荷面モデル（SYS Cam-clay model）等による弾塑性構成式が用いられる。その結果、極めて微小な変形を精度よく評価することができ、圧密挙動等の地盤の変形挙動を考慮することが可能となってきたが、地盤の斜面崩壊等の大変形を考慮する場合、要素形状が大きく歪み、計算破綻の問題が生じる。これは、要素内の積分において、ガウス積分の精度が極端に低下し、解析精度も低下するためである。この問題に対して、Total Lagrangian 法や Update Lagrangian 法^{1.55)}が用いられるが、要素が極めて大きく変形してしまう場合、計算が破綻する。

一方、岩盤内の結晶や亀裂をブロックとしてモデル化する手法は、粒子同士あるいはブロック同士の相互作用すなわちミクロ的な関係を考慮することでマクロな挙動が表現でき、単純なミクロモデルを用いた場合でもマクロな複雑挙動も解析で

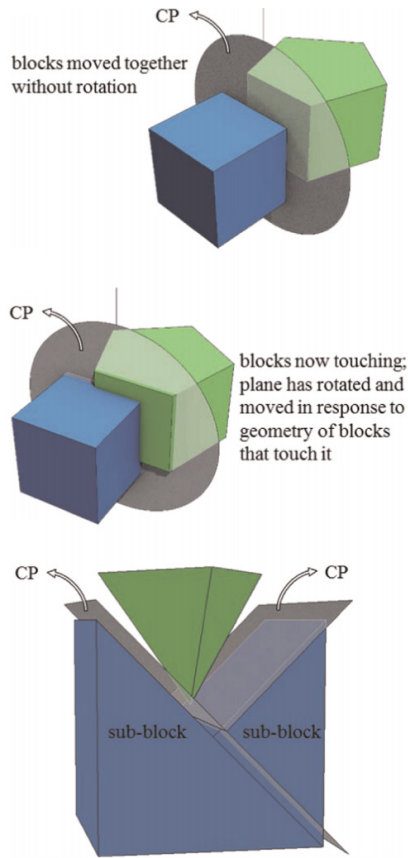
きる。マイクロモデルを用いた研究は、古くは 1960 年代ごろから行われ、物理学分野や他の分野において、複数の粒子またはブロック同士の相互作用を考慮した計算を行いマクロ的な挙動が調べられてきた。それらの研究の中には、分子動力学に基づき引力が作用しない剛体の結晶シミュレーション^{1.56)}や分子動力学シミュレーション^{1.57)}、回転運動を考慮した水分子のシミュレーション^{1.58)}等が挙げられる。地盤分野においても複数のブロックを用いた斜面崩壊シミュレーションが行われてきた。このブロックは円形／球形要素で表現され、ブロック同士の接触に関してばね - ダッシュポッド - スライダーが考慮されている^{1.59), 1.60)}。この手法は、個別要素法 (DEM : Discrete Element Method あるいは Distinct Element Method) と呼ばれ、マクロな離散体を構成するブロック群は剛体仮定された円形／球形要素の集合体で表現され、ブロックの間の相互作用を考慮することで、ブロック群の集合体挙動であるマクロな挙動を表現する手法である。しかしながら、粒子数あるいはブロック数を増やすと自由度数も増え、計算子コストがかかり、その当時、計算機性能も未発達であったことから比較的シンプルな問題を対象とし簡易的な解析が一般的であった。計算機性能の進歩に伴い、個別要素法を用いてより複雑な現象を対象とした解析^{1.61), 1.62)}が行われるようになってきた。またマイクロ構造モデルにおいても、粒子間の粘着力のモデル化^{1.63)}、楕円形状ならびに任意形状のブロックにおける接触判定のモデル化^{1.64), 1.65)}、粒子粉砕モデルの開発^{1.66)}が行われてきた。その結果、個別要素法を用いてより複雑な挙動を対象とした解析が行われるようになった。Hakuno and Tarumi, Nakese and Takeda は間隙流体を考慮した液状化解析^{1.67), 1.68)}、川口らにより流動層解析^{1.69), 1.70)}も行われた。近年においては、ブロック、粒子形状のモデリング^{1.71)}、粒子粉砕モデルを用いた要素試験シミュレーション^{1.72), 1.73)}等が行われ、より高度な解析手法が提案され地盤・岩盤のマクロな挙動、応力評価が検討されている。また、粘土の圧縮挙動を対象としたマイクロ解析^{1.74)}、爆破挙動^{1.75), 1.76)}、落石といった複雑な現象を対象とした解析も行われている。さらにより計算手法が高度化し、Minchinton and Lynch^{1.77)}は Finite Element - Discrete Element Model の拡張手法である Blasting Model を用いて亀裂、爆破挙動を再現しており、個別要素法と流体解析手法とカップリング手法^{1.78), 1.79)}も提案されている。しかしながら、個別要素法を用いた場合、土粒子や岩盤ブロックを剛体と仮定しているため、ブロックの変形を考慮することができない。さらに、ブロック同士の接触に関して力学的に曖昧な定義が使われているため、土石流を含む流砂のような現象においては粒子間の衝突や回転、エネルギー保存等の問題があり、解の安定性が得られない場合がある。また個別要素法で取り扱う要素は、これまで球形または楕円形要素が用いられていたが、ブロック構造のモデリング技術の進歩によりブロック形状が多面体構造となり接触判定がより複雑化している。このようなブロック同士の接触判定のアルゴリズムには直接的な方法と間接的な方法がある。前者には Referential Plane method (RP 法)^{1.80)}、その改良手法である Main Plane method (MP 法)^{1.81)}が挙げられ、これらの方法はブロックの辺、面、頂点座標を用いて多面体ブロック間の幾何学的な関係に基づき正確に接触面が求められる。後者には、Common Plane method (CP 法)^{1.82)}や改良手法である Fast Common Plane method^{1.83)}、

Shortest Link method^{1.84)}などが挙げられる。間接的な接触判定法は、複雑な接触判定アルゴリズムを避けるために、ブロック間に仮想的にブロックを2分する面を設けることでブロック同士の接触判定が行われる。さらに、多面体ブロックの凸頂点と辺に内接球や円柱を設置し、ブロック同士の判定を簡素化する方法^{1.85), 1.86)}もある。この方法では、接触を球-面、円筒-球、球-球、円筒-円筒に分けて接触が判定される。また、ブロック同士の接触判定をより簡素化するために、接触の判定の前処理として、近傍に存在するブロックの検索手法の開発も行われている。Fig.1.10 にブロック間における接触の概念図を示す。同図 (a), (b) には直接法および間接法における接触アルゴリズムを示し、同図 (c) には近傍ブロックの検索である Sphere-Shell Cover (SSC)^{1.87)}, Cuboid-Shell Cover (CSC)^{1.88)}, Multi-Shell Cover (MSC)^{1.89)}の概念図を示す。このように、様々なブロック間の接触手法が提案されてきているが、凸面の接触に関してある程度の精度はあるものの、そのアルゴリズムは複雑で計算コストがかかり、凹面の接触判定は難しく、未だ確立されていないのが現状である^{1.90)}。すなわち、凹凸面を有するブロックを対処とした場合、精度よく解析を行うことは難しく、このような問題が個別要素法のようにブロック間の接触を扱う手法の足かせとなっている。

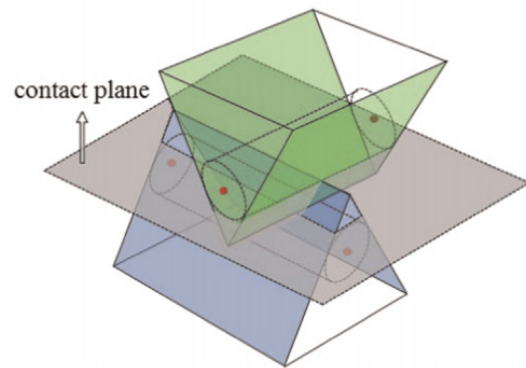
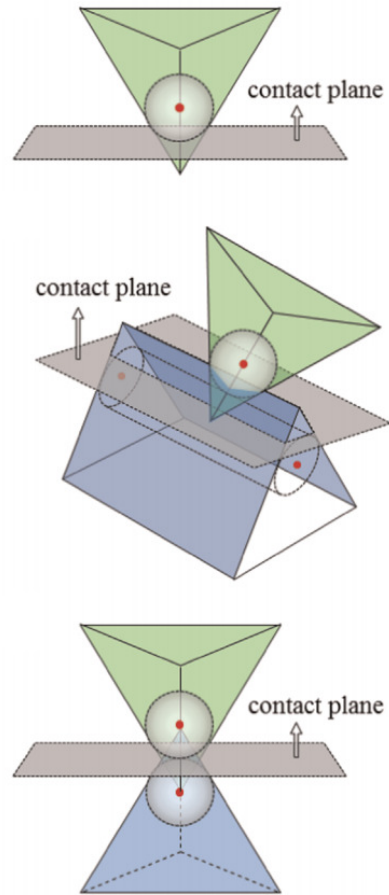
一般的に地盤・岩盤分野において、数値計算技術を用いて大変形、崩壊、破壊現象を数値的に解析する場合、上述した有限要素法や個別要素法が用いられることが多いが、その他にも離散体解析手法として様々な手法が開発されている。例えば不連続性岩盤の変形および破壊挙動を評価する手法として、

- 離散的に亀裂をモデル化する方法
- 等価な連続体に置き換える方法

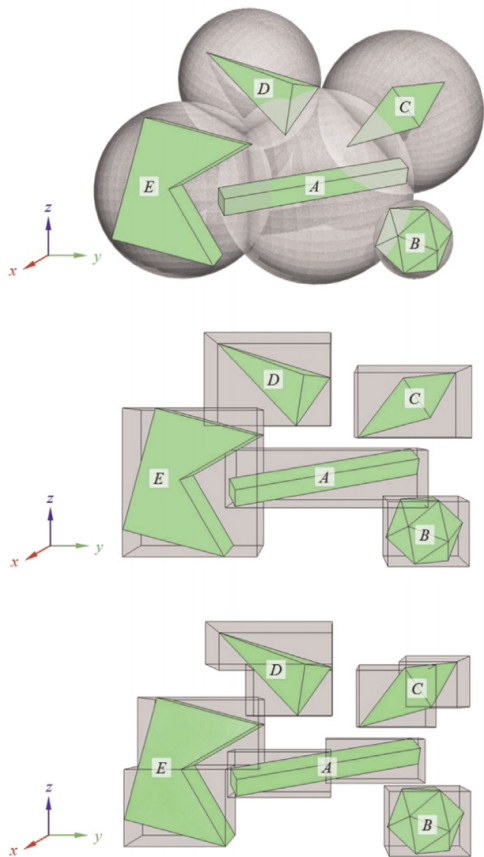
に大別することができる^{1.91)}。前者には Goodman and Shi により提案されたジョイント要素を用いた有限要素法^{1.92), 1.93)}を始め、不連続変形法 (DDA: Discontinuous Deformation Analysis)^{1.94), 1.95)}, 剛体ばねモデル (RBSM: Rigid-Body-Spring Model)^{1.96) - 1.98)}, FESM (Finite Element Spring Model)^{1.99)}が挙げられる。上述した個別要素法もこれに属す。後者には等価弾性体モデル^{1.100), 1.101)}, クラックテンソル理論^{1.102)}, 損傷力学理論^{1.103), 1.104)}などがある。離散的に亀裂をモデル化する手法は、ブロック内部の応力・ひずみ分布を評価することができず、解析精度の面で問題を抱えている場合が多く、対象とする岩盤が膨大な亀裂を有する場合、そのモデル化ならびに計算処理が煩雑になることから、多数の不連続面を考慮することは難しい^{1.91)}。不連続変形法においては、緒方ら^{1.105)}は発破による飛石の2次元シミュレーションを行い解析的検討を行っているものの、個別要素法同様にブロック構造を考慮した要素形状を用いた解析や3次元問題へ拡張すると、接触判定がより複雑化する問題が生じる。また等価な連続体に置き換える手法は、異方的に挙動する岩盤のマクロな変形特性を表現するには適しているが、不連続面の幾何学特性と岩盤の力学特性を結びつける理論が不十分であることが指摘されている^{1.91)}。また、地盤・岩盤の大変形、破壊現象を評価する場合においても、上述したジョイント要素を用いた有限要素法や不連続変形、その他にも境界要素法 (BEM: Boundary Element Method)^{1.106), 1.107)}, 有限被覆法 (FCM: Finite Cover Method)^{1.108)}, マニフォール



(a) Direct approaches of contact



(b) Indirect approaches of contact



(c) Preprocessing of contact SSC, CSC and MSC

Fig.1.10 Illustration of direct – indirect approach that polyhedral blocks' contact method and searching neighbor block methods that are called as the sphere-shell cover (SSC) method, cuboid-shell cover (CSC) method and multishell cover (MSC) method. (from Zhang *et al.* 2015)

ド法 (Manifold method) ^{1.109)}などが用いられる。さらに近年においては、要素 - 節点コネクティビティーを必要としない粒子法やメッシュフリー法と呼ばれる手法の研究が盛んに行われている。これらの手法はメッシュ生成を必要としない、あるいは意識させないため、亀裂進展解析などの様に、不連続面が任意に生成・進展する問題や無数の不連続面を有する問題、大変形を伴うような問題に対しても、少ない労力で安定した計算を行うことができる。そのため、地盤・岩盤分野においてもその適用範囲が急速に拡大されつつある ^{1.110) - 1.113)}。粒子法、メッシュフリー法の代表的なものとして SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) ^{1.114) - 1.116)}、EFGM (Element-Free Galerkin Method) ^{1.117), 1.118)}、RKPM (Reproducing Kernel Particle Method) ^{1.119), 1.120)}などのガラーキン法を基本原理としたものと、我が国において開発された MPS (Moving Particle Semi-implicit method) ^{1.121), 1.122)}と呼ばれる手法がある。粒子法は連続体を粒子の集合体として表現し、SPH では Kernel 関数 (Kernel 積分) を導入し、粒子の物理量を重ね合わせることで偏微分方程式を近似的に解き、MPS では勾配、発散、ラプラシアンモデルを粒子間相互作用により定義することで、支配方程式が近似的に解かれる。そのため有限要素法のように、大変形に伴う要素の歪みによる計算破綻、粒子間相互作用による曖昧な材料定数の定義、無数の不連続面を有する場合においても計算の煩雑化などはない。しかしながら、これらの手法により得られる解に着目してみると、領域境界における精度の低下、圧力振動が頻繁に発生するなどの問題が指摘されている ^{1.122), 1.124)}。さらに連続体を粒子の集合体として表現するために、ディリクレ型境界条件の厳密な設定が難しいことも指摘されている ^{1.125)}。

以上のように、これまで多くの数値解析手法が提案されてきたが、地盤・岩盤による大変形、崩壊現象のような極めて不確実な力学的挙動を評価する手法は未だ確立されていないのが現状である。上記の各手法を用いて評価できる現象は極めて僅かな範囲であり、例えば有限要素法に弾塑性構成則を導入した場合、対象とする物体が微小変形挙動を呈している範囲ではその挙動を精度よく評価できるが、大変形挙動を呈した場合、精度は極めて低下する。また、対象物体が呈する挙動をある程度評価できた場合においても、粒子間相互作用における材料特性の曖昧な定義や物理的に意味を持たず理論的な根拠が不十分なパラメータの導入など数値計算上のテクニックを必要とする場合がある。したがって、地盤・岩盤に大変形、崩壊挙動等の不確実な挙動を精度よく評価できる手法を構築することは、地盤・岩盤の複雑な挙動を評価する上で極めて重要であり、解決すべき課題である

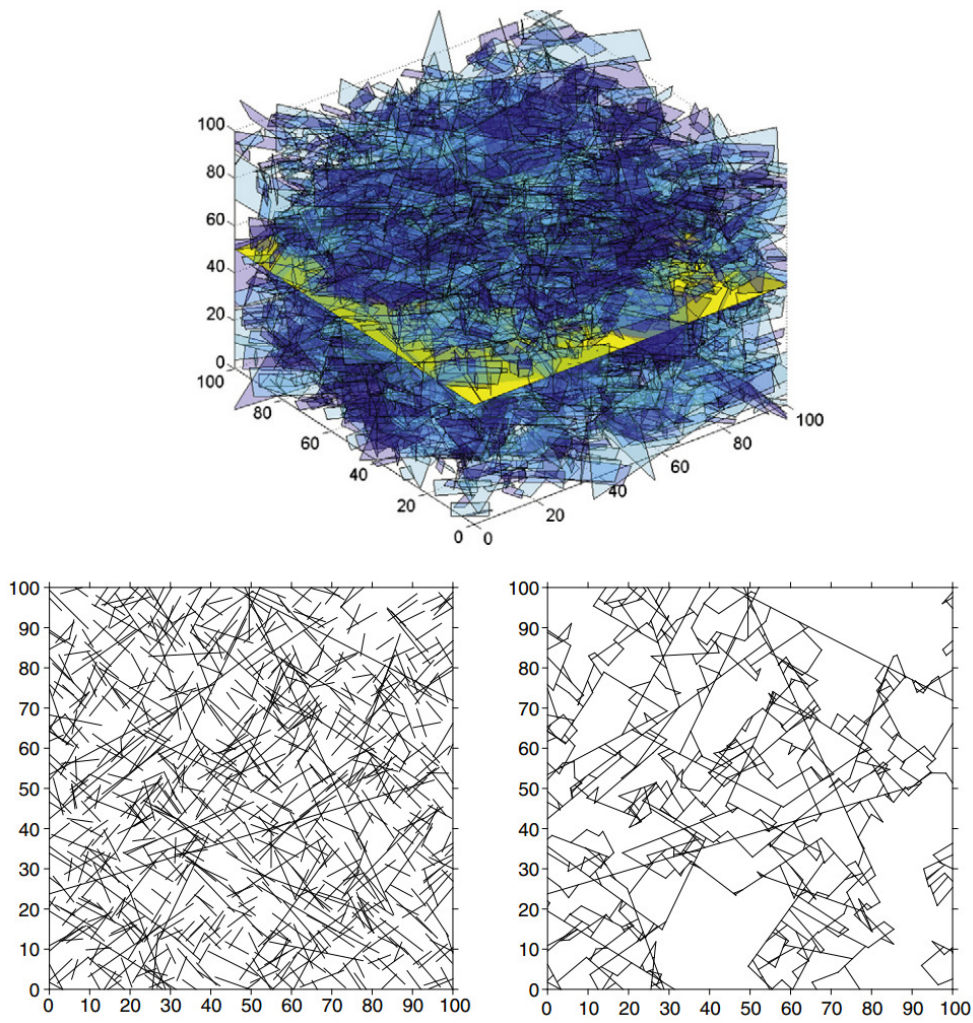
1.2 研究の目的および論文構成

本研究では、Lancaster and Salkauskas により開発された移動最小自乗法 (MLSM : Moving Least Squares Method) ^{1.126)}をベースに、地盤・岩盤の大変形、流動化、崩壊挙動等の極めて不確実な挙動を精度よく評価できる手法の開発を目的とする。具体的には、亀裂性岩盤を対象とし、岩盤中の先在亀裂を直接的に考慮でき、それらが進展、結合する様子を高精度かつロバストに解析することができる数値解析技術を開発する。岩盤内には多数の亀裂（断層、割れ目などとも呼ばれ、広義的には変位量・規模が大きな断層を含む）が3次元空間的に分布しており、これにより強度低下や透水性が大きくなるなどの問題が生じる。これらの特性・分布を定性的かつ定量的に把握・モデル化することは極めて重要であるとされ、様々な野外調査、野外観測が行われ、観測データに基づきモデル化手法が提案されている。1980年以降、亀裂の分布特性にフラクタル理論 (Fractal theory) ^{1.127), 1.128)}が適用され亀裂の数値モデル化手法が提案されてきた。その後、亀裂のフラクタル性に関する研究が盛んに行われ ^{1.129)}、観測データに基づき亀裂の特性（空間分布特性、長さ、幅、頻度分布、表面形状等）をモデル化する手法として亀裂ネットワークモデル (DFN model : Discrete Fracture Network model) ^{1.130)}が提案された。そこで本研究においても亀裂のモデル化に関して、岩盤中に無数にある先在亀裂は亀裂ネットワークモデルにて表現する。一般的に亀裂長さは、フラクタル理論に基づき、次式に示すべき乗分布に従うことが知られている ^{1.131) - 1.134)}。

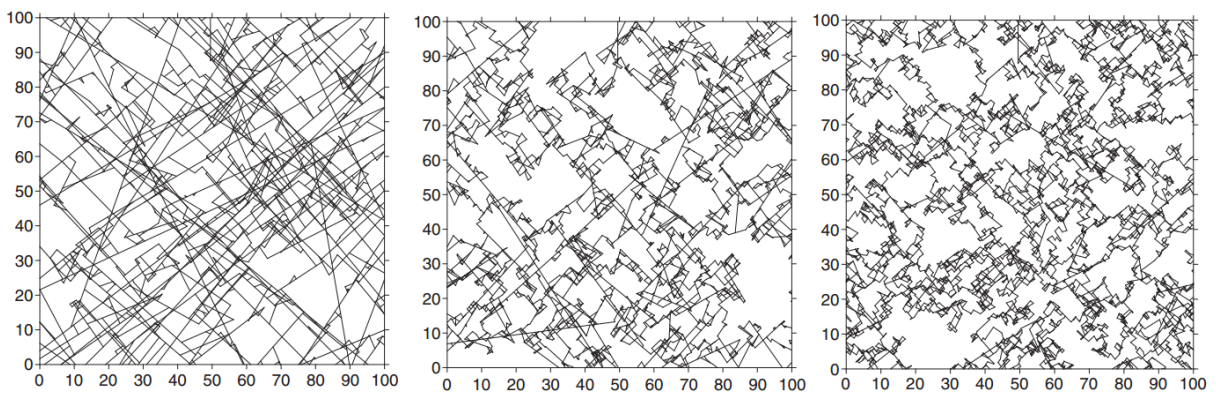
$$P(L) = CL^{-a} \quad (1.1)$$

ここで、 L は亀裂長さ、 C は比例係数、 a はべき乗定数、 $P(L)$ は亀裂長さ L の確率を示す。Fig.1.11 に亀裂ネットワークモデルの概念図を示す。同図 (b) にはべき乗数 a による亀裂ネットワークモデルの違いを示している。べき乗分布に従い亀裂を配置し、亀裂の不連続面に関しては移動最小自乗法を用いた新たな計算値手法を提案する。この手法では、対象とする岩盤の弾性領域には回転自由度を有する一般化有限要素法が適用され、そして亀裂面は要素辺にて表現される。したがって、弾性状態から亀裂が生じ、破壊に至る過程をロバストに解析できる手法を開発する（第2章）。

上記の手法では岩盤のマクロ的な亀裂を対象とした亀裂性岩盤における先在亀裂を考慮できる解析手法を確立するが、第3章では岩盤のミクロ構造に着目する。前章では亀裂は要素辺にて直接的に表現されるため要素形状に大きく依存する。そのため、種々の形状を呈する粒状構造を表現することは難しい。そこで、この粒状構造が考慮できる、亀裂性岩盤の亀裂進展解析手法を開発する。具体的に、第2章で用いた回転自由度を有する一般化有限要素法は要素ベースの手法であったため、先在亀裂等を要素辺で表現する必要があり、亀裂進展が要素形状に依存する形となったことから、節点ベースの手法である EFMM (Enriched Free Mesh Method) ^{1.135) - 1.137)}を用いることとした。本手法は、弾性問題において高精度な解を得ることができる手法である。そして、多次元型移動最小自乗法 (C-MultiMLSM: Multi-dimensional



(a) 3D and 2D discrete fracture network model
 ($a = 2.0$, the bottom left figure is onto slice located in 3D DFN,
 the bottom right is modified based on left one)



(b) Case of study (Left: $a = 1.0$, center: $a = 2.0$, right: $a = 3.0$)

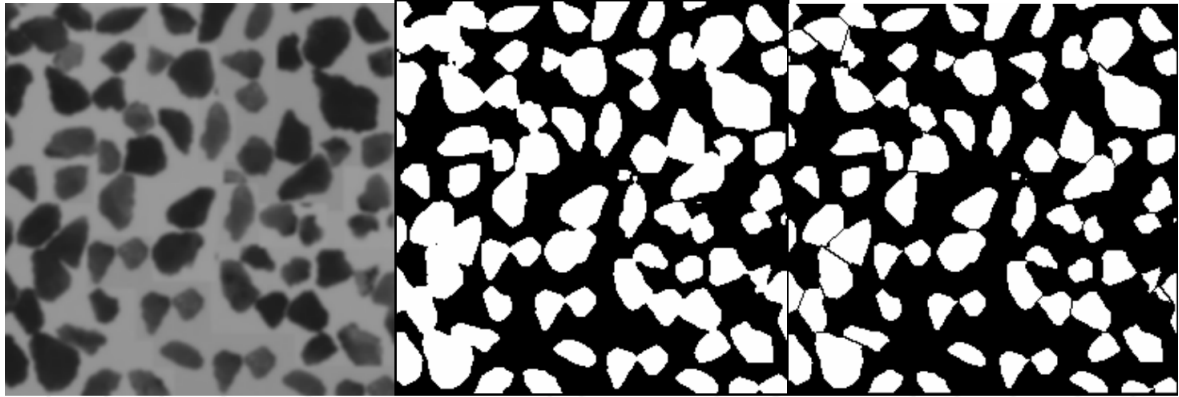
Fig.1.11 Concept of the discrete fracture network model (DFM model)
 (from Reeves *et al.* 2013)

Moving Least Squares Method with Constraint condition)^{1.138)}を用いて亀裂による不連続面を考慮することで、粒子構造を考慮できる解析手法を提案する。

第2章、3章では岩盤のマクロおよびミクロな構造を考慮できる新たな解析手法の開発を行った。そこで第4章では、地盤の大変形、崩壊現象を考慮できる手法の開発を目的とする。前節で述べたように、近年、要素-節点コネクティビティーやメッシュ生成を必要としない手法であるメッシュフリー法や粒子法の研究が地盤・岩盤分野において盛んに研究されている。しかしながら、境界付近において境界条件の設定が難しく精度が低下することが懸念されおり、未だ研究段階である。そこで、第4章ではその粒子法の一つであるMPM (Material Point Method)^{1.139) - 1.141)}に着目する。MPMは流体解析コードであるFLIP (Fluid-Implicit Particle)^{1.142)}の基本原理であるPIC (Particle-In-Cell) 法^{1.143), 1.144)}を弾性問題へ拡張した手法とされている。MPMでは対象となる物体をLagrange粒子の集合体として表現し、支配方程式を粒子群の背面に設けるEuler格子(バックグラウンドメッシュ)で解く、Euler型アプローチとLagrangian型のアプローチを併用した手法である。そのため、他の粒子法と異なり境界条件の設定に曖昧な定義がなく、また境界条件の設定も容易である。近年、MPMは多くの衝撃問題等を対象としその有用性が示されており^{1.145) - 1.147)}、Li *et al.*^{1.148)}は実験値との比較により有用性を検証している。さらにMa *et al.*^{1.149)}によると、衝撃問題を対象とし、MPMとSPHを比較した結果、MPMはSPHに比べ境界条件の設定および物体同士のコンタクトアルゴリズムが容易で、高精度な解を得ることができると報告されている。さらに、MPM同士のカップリングによる流体解析手法の提案^{1.150)}、FDMとMPMのカップリングによる爆破シミュレーション^{1.151)}やFEMとのカップリング手法^{1.152), 1.153)}の提案も行われている。本章では、まず弾塑性構成則を用いてMPMを地盤の大変形挙動へ適用し、弾塑性状態におけるMPMの有効性を示す。そして、MPMは弾性状態が長く継続する場合、弾性エネルギーが変動するという問題が従来より指摘されているため、本章ではこのエネルギー変動の抑制手法の提案を行う。

第2~4章では地盤および岩盤の構造に着目し、それらの変形、破壊、崩壊挙動を解析できる手法が開発された。今後、上記の手法が複雑形状を対象とした場合や3次元問題へ拡張した場合、任意構造をモデリングできる技術が必要であると考えられる。現在、観測機器や映像機器、計算機性能の向上により地盤の土粒子や岩盤のブロック構造をモデリングする技術が研究されている^{1.154), 1.155)}。Fig.1.12にWang *et al.*、Taken *et al.*により行われた写真画像を用いたモデル化の様子を示す。しかしながら、任意多面体を容易にモデリングしブロック構造を構築することは極めて難しく未だ研究段階である。そこで第5章では、多面体形状を有するブロックの幾何モデリングシステムを開発する。近年において有限要素法等で使用可能な自動メッシュ生成技術は急速に進歩しており、極めて複雑な形状を有するモデルを対象とした場合においても要素分割は比較的容易である。本章では、この要素分割技術を用いて2, 3次元におけるブロックモデリングシステムの開発を行う。

そして最終章である第6章では、本研究で得られた知見をまとめ、今後の課題や今後の展開について述べる。



(a) Segmentation result of rock particle (the left is original image, the center is binarization result, the right is modified the center image) (from Wang *et al.* 2008)



(b) Modeling result of imaging from original picture (from Williams *et al.* 2014)

Fig.1.12 Picture of modeling system of blocks from original image

参考文献

- 1.1) Panizzo, A., De Girolamo, P., Di Risio, M., Maistri, A. and Petaccia, A.: Great landslide events in Italian artificial reservoirs, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, Vol.5, pp.733-740, 2005.
- 1.2) Poisel, R.: Failure Prediction in Geotechnics - 50 Years after Vajont, Österreichische Gesellschaft für Geomechanik, *Workshops 2013, Austrian Society for Geomechanics*, pp.1-4, 2013.
- 1.3) 千木良雅弘, 八木浩司, Kausar, A. B., (社)日本地すべり学会調査団: 2005年パキスタン北部地震による崩壊と山体重力変形, 研究発表会講演論文集, pp.1-2, 2007.
- 1.4) 八木浩司, 千木良雅弘: 地震にともなった地すべり・斜面災害 (2005年パキスタン北部地震による斜面被害の概要), SABO, Vol.87, pp.10-13, 2003.
- 1.5) Schneider, J. F.: Seismically reactivated Hattian slide in Kashmir, Northern Pakistan, *Journal of Seismology*, Vol.13, pp.387-398, 2009.
- 1.6) Sato, H. P., Hasegawa, H., Fujiwara, S., Tobita, M., Koarai, M., Une, H. and Iwahashi, J.: Interpretation of landslide distribution triggered by the 2005 Northern Pakistan earthquake using SPOT 5 imagery, *Landslides*, Vol.4, pp.113-122, 2007.
- 1.7) Aydan, Ö., Ohta, Y. and Hamada, M.: Geotechnical evaluation of slope and ground failures during the 8 October 2005 Muzaffarabad earthquake, Pakistan, *Journal of Seismology*, Vol.13, pp.399-413, 2009.
- 1.8) Evans, S. G., Guthrie, R. H., Roberts, N. J. and Bishop, N. F.: The disastrous 17 February 2006 rockslide-debris avalanche on Leyte Island, Philippines: a catastrophic landslide in tropical mountain terrain, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, Vol.7, pp.89-101, 2007.
- 1.9) Gutiérrez, F., Linares, R., Roqué, C., Zarroca, M., Carbonel, D., Rosell, J. and Gutiérrez, M.: Large landslides associated with a diapiric fold in Canelles Reservoir (Spanish Pyrenees): Detailed geological-geomorphological mapping, trenching and electrical resistivity imaging, *Geomorphology*, Vol.241, pp.224-242, 2015.
- 1.10) 桜井亘, 徳永良雄, Jesse C Felizardo: フィリピン共和国南レイテ州で発生した大規模深層崩壊災害について, 砂防学会誌, Vol.58. No.6. pp.39-43, 2006.
- 1.11) Sassa, K., Nagai, O., Solidum, R., Yamazaki, Y. and Ohta, H.: An integrated model simulating the initiation and motion of earthquake and rain induced rapid landslides and its application to the 2006 Leyte landslide, *Landslides*, Vol.7, pp.219-236, 2010.
- 1.12) 佐々恭二, 福岡浩, 汪発武: 秋田県澄川地すべり, 鹿児島県針原川土石流における高速長距離土塊移動のメカニズムについて, 地すべり, Vol.35,

- No.2, pp.29-37, 1998.
- 1.13) 佐々木健司, 石井学, 南哲行, 山田孝: 1997年5月11日秋田県鹿角市八幡平で発生した澄川地すべり・土石流の発生時系列と発生形態, 地すべり, Vol.35, No.2, pp.46-53, 1998.
 - 1.14) 堀伸三郎, 中島北夫: 1997秋田県澄川地すべりで発生した高速土砂移動現象の解析, 財団法人深田地質研究所年報, Vol.1, pp.97-111, 2000.
 - 1.15) 小野由紀光, 磯貝尚弘, 江坂文寿: 澄川地すべりにおける大口徑鋼管杭施工事例, 日本地すべり学会誌, Vol.43, No.2, pp.68-74, 2006.
 - 1.16) Ogawauchi, Y., Yamazaki, T., Yamasaki, T., Kikuchi, A., Obara, Y. and Hosaka, K.: Failure Mechanism of Sumikawa Landslide: Results of Sumikawa Landslide Investigation and Outline of Landslide Control Works, *Landslides*, Vol.35, No.2, pp.38-45, 1998.
 - 1.17) 関口辰夫, 佐藤浩: 新潟県中越地震における斜面崩壊の特徴と分布, 日本地すべり学会誌, Vol.43, No.3, pp.142-154, 2006.
 - 1.18) 森脇寛, 佐々木良宜: 平成16年新潟県中越地震における地すべり地形斜面の再滑動の実態と移動・堆積特性, 日本地すべり学会誌, Vol.45, No.5, pp.367-375, 2008.
 - 1.19) Kieffer, D. S., Jibson, R., Rathje, E. M. and Kelson, K.: Landslides Triggered by the 2004 Niigata Ken Chuetsu, Japan, Earthquake, *Earthquake Spectra*, Vol.22, pp.s47-s73, 2006.
 - 1.20) 山科真一, 山崎勉, 橋本純, 笠井史宏, 我妻智浩, 渋谷研一: 岩手・宮城内陸地震で発生した荒砥沢地すべり, 日本地すべり学会誌, Vol.45, No.5, pp.392-397, 2008.
 - 1.21) 森屋洋, 阿部真郎, 荻田茂, 檜垣大助: 2008年岩手・宮城内陸地震に伴って発生した荒砥沢ダム上流の大規模地すべり構造, 日本地すべり学会誌, Vol.47, No.2, pp.77-83, 2010.
 - 1.22) 大野亮一, 山科真一, 山崎孝成, 小山倫史, 江坂文寿, 笠井史宏: 地震時大規模地すべりの発生機構: 荒砥沢地すべりを例として, 日本地すべり学会誌, Vol.47, No.2, pp.84-90, 2010.
 - 1.23) Toda, S., Maruyama, T., Yoshimi, M., Kaneda, H., Awata, Y., Yoshida, T. and Ando, R.: Surface Rupture Associated with the 2008 Iwate-Miyagi Nairiku, Japan, Earthquake and its Implications to the Rupture Process and Evaluation of Active Faults, *Zisin (Journal of the Seismological Society of Japan. 2nd ser.)*, Vol.62, No.4, pp.153-178, 2010.
 - 1.24) Kokusho, T., Ishizawa, T. and Koizumi, K.: Energy approach to seismically induced slope failure and its application to case histories, *Engineering Geology*, Vol.122, pp.115-128, 2011.
 - 1.25) Tang, C., Ma, G., Chang, M., Li, W., Zhang, D., Jia, T. and Zhou, Z.: Landslides triggered by the 20 April 2013 Lushan earthquake, Sichuan Province, China, *Engineering Geology*, Vol.187, pp.45-55, 2015

- 1.26) Chen, X. L., Yu, L., Wang, M. M., Lin, C. X., Liu, C. G. and Li, J. Y.: Brief Communication: Landslides triggered by the $M_s = 7.0$ Lushan earthquake, China, *Natural Hazards and Earth System Sciences*, Vol.14, pp.1257-1267, 2014.
- 1.27) Li, Y., Zhou, R., Zhao, G., Li, H., Su, D., Ding, H., Yan, Z., Yan, L., Yun, K. and Ma, C.: Tectonic uplift and landslides triggered by the Wenchuan earthquake and constraints on orogenic growth: A case study from Hongchun Gully, Longmen Mountains, Sichuan, China, *Quaternary International*, Vol.349, pp.142-152, 2014.
- 1.28) 千木良雅弘, 中筋章人, 藤原伸也, 阪上雅之: 2011年東北地方太平洋沖地震による降下火砕物の崩壊性地すべり, *応用地質*, Vol.52, No.6, pp.222-230, 2012.
- 1.29) 中村晋, 仙頭紀明, 梅村順, 大塚悟, 豊田浩史: 2011年東北地方太平洋沖地震による福島県中通りおよびいわき地域における地盤災害: 造成盛土や自然斜面の崩壊と変状, および液状化, *地盤工学ジャーナル*, Vol.7, No.1, pp.91-101, 2012.
- 1.30) 岡田翔太, 鈴木善晴, 喜田智也: GCM出力に基づいた日本域における降雨イベントの将来変化に関する研究, *土木学会論文集 B1 (水工学)*, Vol.69, No.4, pp.I_373-I_378, 2013.
- 1.31) 鈴木雅一, 小橋澄治: がけ崩れ発生と降雨の関係について, *砂防学会誌*, Vol.34, No.2, pp.16-26, 1981.
- 1.32) Wilkinson, P. L., Anderson, M. G. and Lloyd, D. M.: An integrated hydrological model for rain-induced landslide prediction, *Earth Surface Processes and Landforms*, Vol.27, pp.1285-1297, 2002.
- 1.33) Rutter, A. J., Kershaw, K. A. and Robins, P. C.: A predictive model of rainfall interception in forests, 1. Derivation of the model from observations in a plantation of Corsican pine, *Agricultural Meteorology*, Vol.9, pp.367-384, 1971.
- 1.34) Monteith, J. L.: Evaporation and Environment, *19th Symposia of the Society for Experimental Biology*, Vol.19, pp.205-234, 1965.
- 1.35) Feddes, R. A., Kowalik, P., Kolinska-Malinka, K. and Zaradny, H.: Simulation of field water uptake by plants using a soil water dependent root extraction functions, *Journal of Hydrology*, Vol.31, pp.13-26, 1976.
- 1.36) Ishihara, Y. and Kobatake, S.: Runoff Model for Flood Forecasting, *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University*, Vol.29, No.260, pp.27-43, 1979.
- 1.37) 道上正規, 小島英児: 豪雨によるがけ崩れ発生予知について, 第17回自然災害科学総合システムシンポジウム論文集, pp.131-134, 1980.
- 1.38) 鈴木雅一, 福嶋義宏, 武居有恒, 小橋澄治: 土砂災害発生の危険雨量, *砂防学会誌 (新砂防)*, Vol.31, No.3, pp.1-7, 1979.
- 1.39) Yagi, N., Yatabe, R. and Yamamoto, K.: Slope Failure Mechanism due to Seepage of Rain Water, *Proc. 7th ARCSMFE*, Vol.1, pp.382-386, 1983.

- 1.40) 高橋保, 中川一: 豪雨性表崩壊の発生とその生産土量の予測, 第30回水理講演会論文集, pp.199-204, 1986.
- 1.41) Michiue, M. and Fujita, M.: Method for Predicting Slope Failure, *Journal of Natural Disaster Science*, Vol.12, No.1, pp.49-62, 1990.
- 1.42) 高橋透, 松岡充宏, 瀬尾克美, 荒木義則, 古川浩平, 水山高久: 地形特性を考慮した土石流警戒避難基準雨量の設定, 砂防学会誌, Vol.53, No.1, pp.35-46, 2000.
- 1.43) Fellenius, W.: Calculation of the stability of earth dams. Proceedings of the 2nd Congress on Large Dams, *International Commission on Large Dams (ICOLD)*, Vol.4, pp.445-462, 1936.
- 1.44) Bishop, A. W.: The use of the slip circle in the stability analysis of slopes, *Géotechnique*, Vol.5, No.1, pp.7-17, 1955.
- 1.45) Newmark, N. W.: Effects of Earthquakes on Dams and Embankments, *Géotechnique*, Vol.15, No.2, pp.139-160, 1965.
- 1.46) Sarma, S. K.: Seismic stability of earth dams and embankments, *Géotechnique*, Vol.25, No.4, pp.743-761, 1975.
- 1.47) Makdisi, F. I. and Seed, H. B.: Simplified Procedure for Estimating Dam and Embankment Earthquake-Induced Deformations, *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, Vol.104, No.7, pp.849-867, 1978.
- 1.48) Obert, L. and Duvall, W.: Rock mechanics and the design of structures in rock, 1st edition, *New York, Wiley*, 650pp, 1967.
- 1.49) Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K.: The finite element method in structural and continuum mechanics, 1st edition, *McGraw-Hill*, 272pp, 1967.
- 1.50) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A.: Yielding of Clays in States Wetter than Critical, *Géotechnique*, Vol.13, pp.211-240, 1963.
- 1.51) Sekiguchi, H. and Ohta, H.: Induced anisotropy and time dependency in clays, *Proc. 9th ICSMFE, Speciality Session 9*, pp.229-238, 1977.
- 1.52) 橋口公一, 上野正実, 陳忠平: 下負荷面および回転硬化の概念に基づく土の弾塑性構成式, 土木学会論文集, Vol.1996, No.547, pp. 127-144, 1996.
- 1.53) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Super Loading Yield Surface Concept for the Saturated Structured Soils, *Application of Numerical Methods to Geotechnical Problems*, Vol.397, pp.233-242, 1998.
- 1.54) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Super Loading Yield Surface Concept For Highly Structured Soil Behavior, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.2, pp.99-110, 2000.
- 1.55) Aydan, Ö., Mamaghani, I. H. P. and Kawamoto, T.: Application of Discrete Finite Element Method (DFEM) to Rock Engineering Structures, *2nd North American Rock Mechanics Symposium (NARMS)*, pp.2039-2046, 1996.
- 1.56) Alder, B. J. and Wainwright, T. E.: Phase Transition for a Hard Sphere System, *The Journal of Chemical Physics*, Vol.27, pp.1208-1209, 1957.

- 1.57) Rahman, A.: Correlations in the Motion of Atoms in Liquid Argon, *Physical Review*, Vol.136, No.2A, pp.A405-A411, 1964.
- 1.58) Rahman, A., Stillinger, F. H. and Chem, J.: Molecular Dynamics Study of Liquid Water, *Journal of Chemical Physics*, Vol.55, pp.3336-3359, 1971
- 1.59) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics (ISRM)*, Vo.1, No.II-8, pp.129-136, 1971.
- 1.60) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L.: A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, Vol.29, pp.47-65, 1979.
- 1.61) Walton, O. R. and Braun, R. L.: Stress calculations for assemblies of inelastic spheres in uniform shear, *Acta Mechanica*, Vol.63, pp.73-86, 1986.
- 1.62) Thornton, C. and Barnes, D. J.: Computer simulated deformation of compact granular assemblies, *Acta Mechanica*, Vol.64, pp.45-61, 1986.
- 1.63) Thornton, C. and Yin, K. K.: Impact of elastic spheres with and without adhesion, *Powder Technology*, Vol.65, pp.153-166, 1991.
- 1.64) Rothenburg, L. and Bathurst, R. J.: Micromechanical features of granular assemblies with planar elliptical particles, *Géotechnique*, Vol.42, No.1, pp.79-95, 1992.
- 1.65) Williams, J. R. and O'Connor, R.: A linear complexity intersection algorithm for discrete element simulation of arbitrary geometries, *Engineering Computations*, Vol.12, pp.185-201, 1995.
- 1.66) Thornton, C. and Sun, G.: Axisymmetric compression of 3D polydisperse systems of spheres, *Association for the Study of Micromechanics of Granular Media in Powders & grains 93*, pp.129-134, 1993.
- 1.67) Hakuno, M. and Tarumi, Y.: A granular assembly simulation for the seismic liquefaction of sand, *Proc. of JSCE*, Vol.1998, No.398, pp.129-138, 1988.
- 1.68) Nakese, H. and Takeda, T.: A liquefaction analysis aim to investigation of the behavior of to the ground surrounding the nuclear power plant during or after strong earth quakes (A simulation study on liquefaction using DEM), *Proceedings of the 7th international conference on nuclear engineering*, pp.19-23, 1999.
- 1.69) 川口寿裕, 田中敏嗣, 辻裕 : 離散要素法による流動層の数値シミュレーション(噴流層の場合), *日本機械学会論文集(B編)*, Vol.58, No.551, pp.79-85, 1992.
- 1.70) Munjiza, A., Owen, D. R. J. and Bicanic, N.: A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids, *Engineering Computations*, Vol.12, pp.145-174, 1995.
- 1.71) Latham, J. P. and Munjiza, A.: The modelling of particle systems with real shapes, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A:*

- Mathematical Physical and Engineering Sciences*, Vol.362, pp.1953-1972, 2004.
- 1.72) Cheng, Y. P., Nakata, Y. and Bolton, M. D.: Discrete element simulation of crushable soil, *Géotechnique*, Vol.53, No.7, pp.633-641, 2003.
- 1.73) Nakata, Y., Bolton, M. D. and Cheng, Y. P.: Relating particle characteristics to macro behavior of DEM crushable material, *Powders and Grains*, pp.1387-1391, 2005.
- 1.74) Yao, M. and Anandarajah, A.: Three-Dimensional Discrete Element Method of Analysis of Clays, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.129, pp.585-596, 2003.
- 1.75) Morris, J. P., Rubin, M. B., Blair, S. C., Glenn, L. A. and Heuze, F.E.: Simulations of underground structures subjected to dynamic loading using the distinct element method, *Engineering Computations*, Vol.21, pp.384-408, 2004.
- 1.76) 石沢浩太, 若月和人, 阿部和久, 紅露一寛: 自由面発破による岩盤破壊過程の個別要素解析, 計算数理工学論文集, Vol.13, pp.61-66, 2013.
- 1.77) Minchinton, A. and Lynch, P. M.: Fragmentation and heave modelling using a coupled discrete element gas flow code, *International Journal for Blasting and Fragmentation*, Vol.1, pp.41-57, 1997.
- 1.78) Renzo, A. D. and Maio, F. P. D.: Homogeneous and bubbling fluidization regimes in DEM–CFD simulations: Hydrodynamic stability of gas and liquid fluidized beds, *Chemical Engineering Science*, Vol.62, pp.116-130, 2007.
- 1.79) Tsuji, T., Yabumoto, K. and Tanaka, T.: Spontaneous structures in three-dimensional bubbling gas-fluidized bed by parallel DEM–CFD coupling simulation, *Powder Technology*, Vol.184, pp.132-140, 2008.
- 1.80) Liu, X. L. and Lemos, J. V.: Procedure for contact detection in discrete element analysis, *Advances in Engineering Software*, Vol.32, pp.409-415, 2001.
- 1.81) Keneti, A. R., Jafari, A. and Wu, J. H.: A new algorithm to identify contact patterns between convex blocks for three-dimensional discontinuous deformation analysis, *Computers and Geotechnics*, Vol.35, pp.746-759, 2008.
- 1.82) Cundall, P. A.: Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol.25, pp.107-116, 1988.
- 1.83) Nezami, E. G., Hashash, Y. M. A., Zhao, D. and Ghaboussi, J.: A fast contact detection algorithm for 3-D discrete element method, *Computers and Geotechnics*, Vol.31, pp.575-587, 2004.
- 1.84) Nezami, E. G., Hashash, Y. M. A., Zhao, D. and Ghaboussi, J.: Shortest link method for contact detection in discrete element method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.30, pp.783-801, 2006.
- 1.85) Ahn, T. Y. and Song, J. J.: New contact-definition algorithm using inscribed

- spheres for 3D discontinuous deformation analysis, *International Journal of Computational Methods*, Vol.02, pp.171-91, 2011.
- 1.86) Ahn, T. Y. and Song, J. J.: New contact resolution algorithm using two-stage contact definition and rounding scheme in 3D DDA, *Advances in Discontinuous Numerical Methods and Applications in Geomechanics and Geoengineering*, pp.101-106, 2012.
- 1.87) Munjiza, A. and Andrews, K. R. F.: NBS contact detection algorithm for bodies of similar size, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.43, pp.131-149, 1998.
- 1.88) Perkins, E. and Williams, J. R.: A fast contact detection algorithm insensitive to object sizes, *Engineering Computations*, Vol.18, pp.48-62, 2001.
- 1.89) Wu, W., Zhu, H., Zhuang, X., Ma, G. and Cai, Y.: A multi-shell cover algorithm for contact detection in the three dimensional discontinuous deformation analysis, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.72, pp.136-49, 2014.
- 1.90) Zhang, H., Chen, G., Zheng, L., Han, Z., Zhang, Y., Wu, Y. and Liu, S.: Detection of contacts between three-dimensional polyhedral blocks for discontinuous deformation analysis, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.78, pp.57-73, 2015.
- 1.91) 土山茂希, 大上俊之, 市川康明: 不連続性岩盤における損傷場の逆解析と地下空洞掘削時の変形予測, *土木学会論文集*, Vol.1993, No.475, pp.49-58, 1993.
- 1.92) Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L.: A Model for the Mechanics of Jointed Rock, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol.94, No.3, pp.637-660, 1968.
- 1.93) Goodman, R. E. and Shi, G. H.: Block theory and its application to rock engineering, *Prentice-Hall*, 338pp, 1985.
- 1.94) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Discontinuous deformation analysis. *Proc., 25th U.S. Symp. on Rock Mechanics, Society of Mining Engineers of AIME*, pp.269-277, 1984.
- 1.95) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Two dimensional discontinuous deformation analysis, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.9, pp.541-556, 1985.
- 1.96) Kawai, T.: New discrete models and their application to seismic response analysis of structures, *Nuclear Engineering and Design*, Vol.48, pp.207-229, 1978.
- 1.97) Bolander, J. E., Hong, G. S. and Yoshitake, K.: Structural Concrete Analysis Using Rigid-Body-Spring Networks, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Vol.15, pp.120-133, 2000.
- 1.98) Gedik, Y. H., Nakamura, H., Yamamoto, Y. and Kunieda, M.: Evaluation of three-dimensional effects in short deep beams using a rigid-body-spring-model,

- Cement and Concrete Composites*, Vol.33, pp.978-991, 2011.
- 1.99) 鈴木隆次, 浜島良吉: 要素変形を考慮した不連続体解析による応力伝達, 変形, 破壊強度解析, 土木学会論文集, No.547/III-36, pp.23-38, 1996.
 - 1.100) Budiansky, B. and O'Connell, R. J.: Elastic moduli of a cracked solid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.12, pp.81-97, 1976.
 - 1.101) Cleary, M. P., Chen, I. W., and Lee, S. M.: Self-consistent techniques for heterogeneous media, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol.106, No.5, pp.861-887, 1980.
 - 1.102) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T.: Elastic compliance for rock-like materials with random, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.4, pp.27-40, 1984.
 - 1.103) 京谷孝史, 市川康明, 川本眺万: 岩盤の力学特性評価における損傷テンソルの適用について, 土木学会論文集, Vol.1985, No.358, pp.27-35, 1985.
 - 1.104) Kawamoto, T., Ichikawa, Y. and Kyoya, T.: Deformation and fracturing behaviour of discontinuous rock mass and damage mechanics theory, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.12, pp.1-30, 1988.
 - 1.105) 緒方雄二, 和田有司, 瀬戸政宏, 勝山邦久: 発破で発生する飛石の飛翔性と制御に関する実験的検討, 資源と素材, Vol.116. No.7, pp.617-622, 2000.
 - 1.106) Brebbia, C. A.: The boundary element method for engineers, *Pentech Press*, 189pp, 1978.
 - 1.107) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C.: Boundary Element Techniques (Theory and Applications in Engineering), *Springer*, 464pp, 1984.
 - 1.108) Terada, K., Asai, M. and Yamagishi, M.: Finite cover method for linear and nonlinear analyses of heterogeneous solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.58, pp.1321-1346, 2003.
 - 1.109) Shi, G. H.: Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, pp.57-76, 1991.
 - 1.110) Jing, L.: A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.40, pp.283-353, 2003.
 - 1.111) 吉田郁政: MPS法を用いた地盤構造物の地震時破壊挙動解析のための基礎検討, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.67, No.1, pp.93-104, 2011.
 - 1.112) 野々山栄人, 中野正樹, 野田利弘: 改良型粒子法による地盤の変形解析に向けた検討, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.70, No.2, pp.I_453-I_462, 2014.
 - 1.113) 応用力学委員会, 計算力学小委員会: 土木工学における計算力学手法の研究動向, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.68, No.1, pp.31-50, 2012.
 - 1.114) Monaghan, J. J.: An introduction to SPH, *Computer Physics Communications*, Vol.48, pp.89-96, 1988.
 - 1.115) Liu, M.B. and Liu, G.R.: Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview

- and recent developments, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol.17, pp.25-76, 2010.
- 1.116) Rafiee, A. and Thiagarajan, K. P.; An SPH projection method for simulating fluid-hypoelastic structure interaction, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.198, pp.2785-2795, 2009.
- 1.117) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 1.118) Pan, X. F. and Yuan, H.: Computational algorithm and application of element-free Galerkin methods for nonlocal damage models, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.77, pp.2640-2653, 2010.
- 1.119) Liu, W. K. and Chen, Y. J.: Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.21, pp.901-931, 1995.
- 1.120) Chen, J. S., Pan, C., Roque, C. M. O. L., and Wang, H. P.: A Lagrangian reproducing kernel particle method for metal form analysis, *Computational Mechanics*, Vol.22, pp.289-307, 1998.
- 1.121) Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear Science and Engineering*, Vol.123, pp.421-434, 1996.
- 1.122) Sun, Z., Djidjeli, J. K., Xing, T. and Cheng, F.: Modified MPS method for the 2D fluid structure interaction problem with free surface, *Computers and Fluids*, Vol.122, pp.47-65, 2015.
- 1.123) Swegle, J. W., Attaway, S. W., Heinstein, M. W., Mello, F. J. and Hicks, D. L.: An analysis of smoothed particle hydrodynamics, *SAND93-2513*, 1994.
- 1.124) 松原仁, 入部綱清, 伊良波繁雄: 粒子法の微分精度に関する一考察および物理自由度を有する移動最小自乗法, *土木学会論文集 A*, Vol.66, No.4, pp.723-736, 2010.
- 1.125) 井島聖也, 入部綱清, 仲座栄三: MPS 法における圧力ポアソン方程式のディリクレ境界条件判定の改善, *土木学会論文集 B2 (海岸工学)*, Vol.68, No.1, pp.17-28, 2012.
- 1.126) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol.37, No.155, pp.141-158, 1981.
- 1.127) Mandelbrot, B. B: *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company (First Edition edition), 468p, 1982.
- 1.128) 高安秀樹: *フラクタル*, 朝倉書店, 181p. 1986.
- 1.129) Bonnet, E. O., Bour, O., Odling, N., Davy, P., Main, I., Cowie, P. and Berkowitz, B.: Scaling of fracture systems in geologic media, *Reviews of Geophysics*, Vol.39, No.3, pp.347-383, 2001.
- 1.130) Reeves, D. M., Parashar, R., Pohl, G., Carroll, R., Badger, T. and Willoughby,

- K.: The use of discrete fracture network simulations in the design of horizontal hillslope drainage networks in fractured rock, *Engineering Geology*, Vol.163, pp.132-143, 2013.
- 1.131) Davy, P.: On the frequency-length distribution of the San Andreas fault system, *Journal of Geophysical Research*, Vol.98, pp.12141-12151, 1993.
- 1.132) Bour, O. and Davy, P.: Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution, *Water Resources Research*, Vol.33, No.7, 1567-1583, 1997.
- 1.133) Renshaw, C.E.: Connectivity of joint networks with power law length distributions, *Water Resources Research*, Vol.20, No.9, pp.2661-2670, 1999.
- 1.134) 茂野博, 佐々木宗建: 「フラクチャー」と「フラクタル」の関係? - 1次元競争成長モデル数値シミュレーションによる検討, *地質ニュース*, pp.22-31, 2005.
- 1.135) Yagawa, G. and Matsubara, H.: Enriched Free Mesh Method: An Accuracy Improvement for Node-based FEM, *Computational Plasticity, Springer*, Vol.7, pp.207-219, 2007.
- 1.136) 松原仁, 矢川元基: Patch by Patch 型混合法における基底関数の応用とその精度, *応用力学論文集*, Vol.10, pp.201-209, 2007.
- 1.137) Matsubara, H. and Yagawa, G.: Convergence studies for Enriched Free Mesh Method and its application to fracture mechanics, *Interaction and Multiscale Mechanics: An International Journal*, Vol.2, No.3, pp.277-293, 2009.
- 1.138) 松原仁, 入部綱清, 伊良波繁雄: 粒子法の微分精度に関する一考察および物理自由度を有する移動最小自乗法, *土木学会論文集 A*, Vol.66, No.4, pp.723-736, 2010.
- 1.139) Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H. L.: A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.118, pp.179-196, 1994.
- 1.140) Sulsky, D., Zhou, S. J. and Schreyer, H. L.: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *Computer Physics Communications*, Vol.87, pp.236-52, 1995.
- 1.141) Bardenhagen, S. G. and Kober, E. M.: The generalized interpolation material point method, *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, Vol.5, pp.477-495, 2004.
- 1.142) Brackbill, J. U. and Ruppel, H. M.: FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations in two dimensions, *Journal of Computational Physics*, Vol.65, pp.314-43, 1986.
- 1.143) Harlow, F. H.: A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems, *Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-1956*, 1955.
- 1.144) Harlow, F. H.: Hydrodynamic Problems Involving Large Fluid Distortions, *Journal of the ACM (JACM)*, pp.137-142, 1957.

- 1.145) Chen, Z. P., Qiu, X. M., Zhang, X. and Lianb, Y. P.: Improved coupling of finite element method with material point method based on a particle-to-surface contact algorithm, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.293, pp.1-19, 2015.
- 1.146) Lian, Y. P., Yang, P. F., Zhang, X. Zhang, F., Liu, Y. and Huang, P.: A mesh-grading material point method and its parallelization for problems with localized extreme deformation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.289, pp.291-315, 2015.
- 1.147) Liu, P., Liu, Y., Zhang, X. and Guan, Y.: Investigation on high-velocity impact of micron particles using material point method, *International Journal of Impact Engineering*, Vol.75, pp.241-254, 2015.
- 1.148) Li, J. G., Hamamoto, Y., Liu, Y. and Zhang, X.: Sloshing impact simulation with material point method and its experimental validations, *Computers & Fluids*, Vol.103, pp.86-99, 2014.
- 1.149) Ma, S., Zhang, X. and Qiu, X. M.: Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems, *International Journal of Impact Engineering*, Vol.36, pp.272-82, 2009.
- 1.150) Bandara, S. and Soga, K.: Coupling of soil deformation and pore fluid flow using material point method, *Computers and Geotechnics*, Vol.63, pp.199-214, 2015.
- 1.151) Cui, X. X., Zhang, X., Zhou, X., Liu, Y. and Zhang, F.: A coupled finite difference material point method and its application in explosion simulation, *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, Vol.98, pp.565-599, 2014.
- 1.152) Lian, Y. P., Zhang, X. and Liu, Y.: Coupling of finite element method with material point method by local multi-mesh contact method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.200, pp.3482-3494, 2011.
- 1.153) Lian, Y. P., Zhang, X. and Liu, Y.: An adaptive finite element material point method and its application in extreme deformation problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.241-244, pp.275-285, 2012.
- 1.154) Wang, W.: Rock particle image segmentation and systems, Pattern Recognition Techniques, *Technology and Applications*, pp.197-226, 2008.
- 1.155) Williams, K. C., Chen, W., Weeger, S. and Donohue, T. J.: Particle shape characterisation and its application to discrete element modeling, *Particuology*, Vol.12, pp.80-89, 2014.

第2章 岩盤の亀裂ネットワークを考慮した

不連続体解析手法の提案および亀裂進展解析

Discontinuous Analysis Model and Crack Propagation Analysis for Fracture Network in Brittle Rock Mass

2.1 緒言

岩盤中における不連続面の分布特性や微細な先在亀裂を考慮した破壊性状を把握することは、地下構造物の建設や防災面において極めて重要である。特に、岩盤中には多数の先在亀裂がランダムに存在しており、岩盤自体の力学特性や水理学特性に多大な影響を与える。また、亀裂性岩盤は地域の違いによって多種多様な構造を呈する。したがって、亀裂性岩盤における基本的な破壊性状について、その弾性状態から破壊に至る過程（パターン）を高精度に解析できるモデルの開発が不可欠となっている^{2.1)}。

一般に、不連続性岩盤の変形および破壊挙動を解析する手法は、主に、

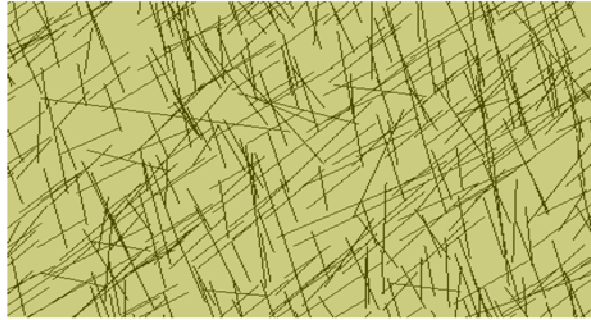
- (1) 亀裂を等価な連続体に置き換える手法
- (2) 離散的に亀裂をモデル化する方法

に大別することができる^{2.2)}。これらの手法のうち前者には、等価弾性体モデル^{2.3)-2.5)}、クラックテンソル理論^{2.6)}などがあり、後者には個別要素法^{2.7)}、不連続変形法^{2.2), 2.8)}、剛体ばねモデル^{2.9)}、FESM (Finite Element Spring Model)^{2.10)}、ジョイント要素を用いた有限要素法^{2.11)}が挙げられる。

等価弾性体モデルでは、微視的な先在亀裂を間接的に加味した巨視的岩盤の力学特性を評価することが可能であるが、基質の破壊を表現することが難しい^{2.12)}。一方、特定の不連続面を仮定する不連続体解析手法では、ブロック内部の応力・ひずみ分布を評価することができず、解析精度の面で問題を抱えている場合が多い。具体的には、例えば、剛体ばねモデルは、粒子の微細構造を疑似的に評価することができる一方で、各ブロックは剛体で定義させていることから、弾性域における挙動の精度に問題が残されている。また、ジョイント要素に関しては、膨大な不連続面が存在する場合には、その処理が極めて煩雑になることから、多数の不連続面を有する問題に適することは難しい^{2.12)}。

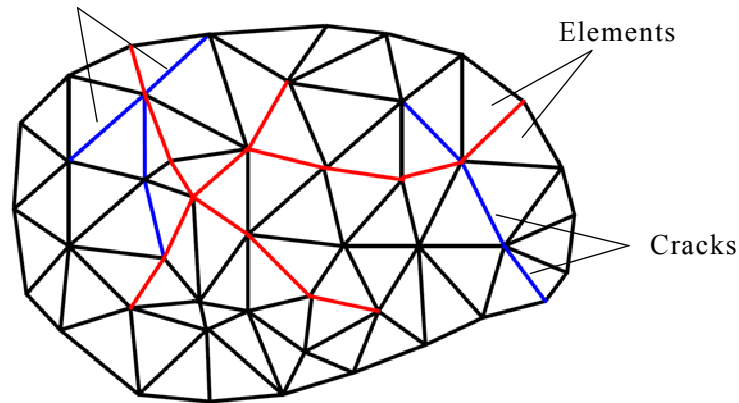
このように、極めて不確実な力学的挙動を示す岩盤に対する数値計算手法は、これまで多くの研究者らによって提案されてきているが、問題点も多い。このような状況下の中、松原らもまた、高精度な解を得ることが数値計算手法の確立を指向し、中間節点を導入しなくとも高精度な解を算出することが可能な一般化有限要素法 (GFEM: Generalized Finite Element Method)^{2.13), 2.14)}や、節点をベースとする高精度な数値解析手法等を提案している^{2.15)-2.17)}。しかしながら、岩盤特有の多数の先在亀裂を直接的に考慮し、かつ、弾性変形から破壊に至るまでの過程をロバストかつ高精度に解析できる手法については未だ確立されていないのが現状である。

さて、近年の計算機性能の発達に伴って、有限要素法等で使用可能な自動メッシュ生成技術は急速に進歩しており、三角形あるいは四面体形状に関しては高精度なメッシュモデルが比較的容易に作製できるようになっている^{2.18), 2.19)}。特に、三角形形状に関しては解析領域の内部に散在する任意の複雑なパッチ形状を考慮したメッシュ分割も可能である^{2.18), 2.19)}。したがって、亀裂性岩盤モデルのひとつである亀裂ネットワークモデル^{2.20)}のようなきわめて複雑に定義される亀裂分布 (Fig2.1(a)を参照) であっても、その亀裂形状をメッシュ境界にて加味し、正三角



(a) Example of DFN model in Rock mass

Pre-existing cracks based on DFN model



(b) Concept of crack propagation

Fig.2.1 Illustration of crack propagation simulation based on Discrete Fracture Network (DFN) model

形に近い形状のメッシュを短時間で作製することが可能である。また、近年の大規模計算技術は加速的に進歩しており、産業界においても積極的に利用できる状況になっている^{2.21)}。以上のことから、岩盤中の先在亀裂を直接的に考慮でき、それらが進展、結合する様子を高精度かつロバストに解析することができる数値解析技術を開発することは極めて重要であると考えられる。ここで、亀裂ネットワークモデルとは岩盤内の不連続面の幾何学的な分布を実岩盤のボーリング調査や数値モデルに基づいて表現した幾何学モデルのひとつであり、一般的には岩盤内部に浸透する地下水の流れ解析に用いられている^{2.20)}。

以上のような背景のもと、本章では、岩盤中に先在する亀裂群を亀裂ネットワークモデルにてモデル化し、複雑な先在亀裂パターンを三角形メッシュの境界で直接考慮し（Fig.2.1(b)を参照）、亀裂の不連続性に関しては移動最小自乗法^{2.22), 2.23)}を用いた近似解放にて考慮する新たな数値計算手法を提案する。本手法では、三角形が健全な状態にある場合は弾性状態を仮定し、高精度解を得ることが可能な回転自由度を有する一般化有限要素法が適用される。すなわち、亀裂ネットワークで定義された岩盤モデルに対して、弾性状態から破壊に至る過程を高精度かつロバストに解析できる手法の確立を目的とする。

2.2 回転自由度を有する一般化有限要素法

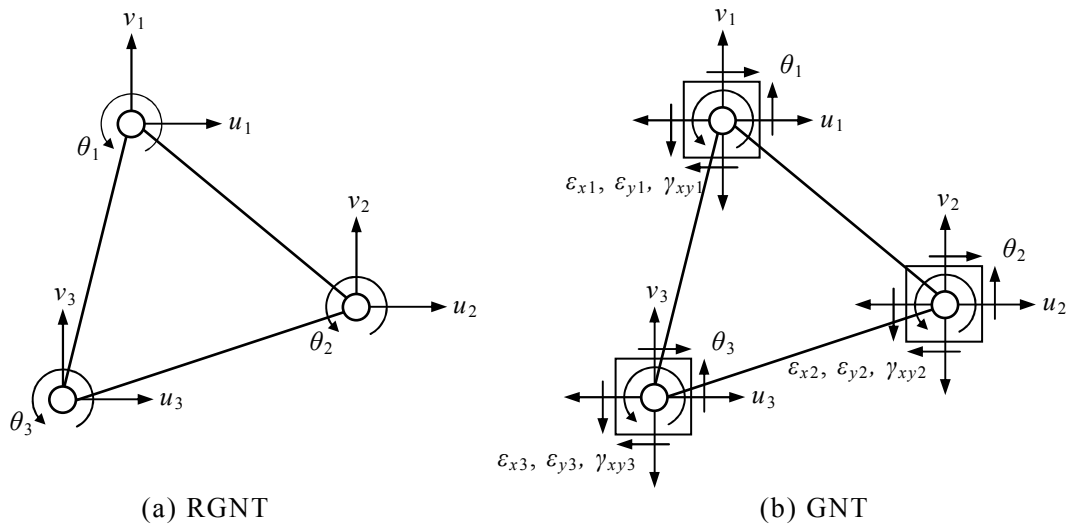


Fig.2.2 Triangular elements with drilling and strain degrees of freedom (RGNT and GNT)

本章では、Fig 2.1(a)に示すような微細な亀裂が複雑に分布したモデルを取り扱うことから、基質部分に関しては、ロバストかつ高精度なメッシュ分割が可能である三角形要素を採用する。一方、本章で扱う対象は亀裂性岩盤であるから岩盤内部の応力状態は膨大な微細亀裂の影響により、極めて複雑であることが考えられる。したがって、三角形領域を直接的に用いる定ひずみ三角形要素を用いると中間節点を付与する等、煩雑な処理を必要とする。そこで、本章では Sekiguchi and Kikuchi^{2,24)}によって開発させた回転自由度を有する四辺形要素 (QDs: Sekiguchi's 4-nodes Quadrilateral element with Drilling degree of freedoms) と同様にして導かれた、回転自由度を有する三角形要素 (TDs: Sekiguchi's Triangular element with Drilling degree of freedoms)^{2,25)}を用いることにする (以後、“RGNT”と称す)。Fig 2.2 に示すように本要素の頂点には並進方向変位に加えて回転自由度が定義されている。回転自由度を追加定義することによって、三角形要素に中間節点を設けなくとも高精度な解を得ることが可能であり、特に、岩盤のように複雑な構造を有しているような対象には適していると考えられる。また、本要素は Tian^{2,14)}らによって開発された超高精度要素である“ひずみ自由度を有する三角形要素”への拡張も容易であることから、複雑な形状をした空洞などが存在するような更に複雑な構造を有する岩盤への展開も期待できる。以下では、回転自由度を有する要素の剛性マトリックスの導出法について概説する。

RGNT の変位場 ($u_{\text{RGNT}}, v_{\text{RGNT}}$) は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} u_{\text{RGNT}} &= \sum_{i=1}^3 (u_i - (y - y_i)\theta_i) N_i \\ v_{\text{RGNT}} &= \sum_{i=1}^3 (v_i + (x - x_i)\theta_i) N_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 u_{RGNT} および v_{RGNT} はそれぞれ x 方向変位場および y 方向変位場、 u_i, v_i および θ_i は i 節点の x 方向変位、 y 方向変位および回転自由度、 x, y は要素内部における任意の座標値、 x_i, y_i は三角形の頂点座標、 N_i は定ひずみ三角形要素における節点 i の形状関数^{2,26)}である (各節点自由度については Fig.2 を参照)。

よって、式 (2.1) から RGNT のひずみ-変位マトリックス (\mathbf{B}_{RGNT}) を得ることができ、次式にて表すことができる。

$$\mathbf{B}_{\text{RGNT}} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -(y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} - (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

以上より、RGNT の剛性マトリックス (\mathbf{k}_{RGNT}) は一般的に用いられるアイソパラメトリック要素の剛性マトリックス同様に、面積座標 ($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$) を用いて次式のように表すことができる。

$$\mathbf{k}_{\text{RGNT}} = t \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \mathbf{B}_{\text{RGNT}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{RGNT}} \det J d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.4)$$

ここで、 t は要素の厚さ、 \mathbf{T} は転置記号、 \mathbf{D} は応力-ひずみマトリックス、 $\det J$ はヤコビアンである。なお下付き添え字は、後述する MLSM により算出される剛性マトリックス (\mathbf{k}_{MLSM}) と区別するために表記している。

また、本要素は 3 次元への拡張も容易であり、以下に回転自由度を有する四面体要素の剛性マトリックスの導出法について概説する。

変位場を 3 次元空間に拡張した場合、回転自由度を有する四面体要素 (以下、RGNQ と称す) における変位場 ($u_{\text{RGNQ}}, v_{\text{RGNQ}}, w_{\text{RGNQ}}$) は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} u_{\text{RGNQ}} &= \sum_{i=1}^4 (u_i + (z - z_i)\theta_{iy} - (y - y_i)\theta_{iz}) N_i \\ v_{\text{RGNQ}} &= \sum_{i=1}^4 (v_i + (x - x_i)\theta_{iz} - (z - z_i)\theta_{ix}) N_i \\ w_{\text{RGNQ}} &= \sum_{i=1}^4 (w_i + (y - y_i)\theta_{ix} - (x - x_i)\theta_{iy}) N_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、 $\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}$ は i 節点に生じる各軸 (x, y, z 軸) 周りの回転自由度である。さらに、回転自由度を有する四面体要素においては

$$\mathbf{B}_{\text{RGNQ}} = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \quad (2.6)$$

なお,

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -(z-z_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & (y-y_i)\frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -(z-z_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & (y-y_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} - (z-z_i)\frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & (y-y_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ & & & (z-z_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} & & -(y-y_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ & & & 0 & & (x-x_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ & & & -(x-x_i)\frac{\partial N_i}{\partial z} & & 0 \\ & & & (z-z_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} & & (x-x_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} - (y-y_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ & & & -(x-x_i)\frac{\partial N_i}{\partial y} & & (x-x_i)\frac{\partial N_i}{\partial z} \\ & & & -(x-x_i)\frac{\partial N_i}{\partial x} + (z-z_i)\frac{\partial N_i}{\partial z} & & -(y-y_i)\frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

である。

よって、体積座標系 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ を用いると回転自由度有する四面体要素の剛性マトリックス $(\mathbf{k}_{\text{RGNQ}})$ は次式となる。

$$\mathbf{k}_{\text{RGNQ}} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \int_0^{1-\xi_1-\xi_2} \mathbf{B}_{\text{RGNQ}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{RGNQ}} \det J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.8)$$

ここで、体積座標系と任意座標値 (x, y, z) とは次式の関係が一般的に成り立つ (2.26)。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

2.3 移動最小自乗法 (MLSM: Moving Least Squares Method) による亀裂の表現

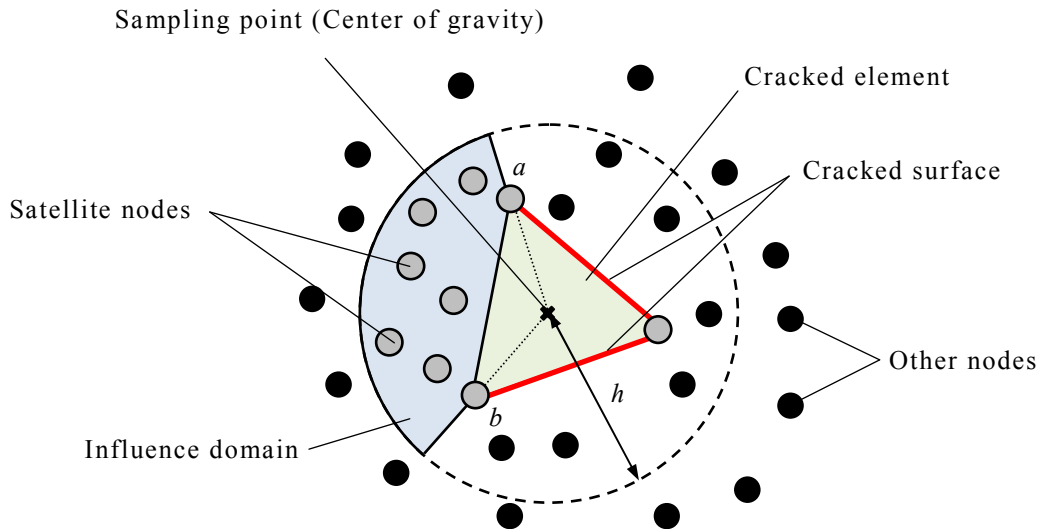


Fig.2.3 Cracked triangular element: Approximation of Moving Least Squares Method (MLSM)

2.3.1 三角形辺上の亀裂を考慮した変位場

ある三角形要素の辺が亀裂面として定義された場合、その辺を共有する隣接要素との変異は不連続となるから、ジョイント要素^{2,11)}等の特殊な要素やリメッシング等の煩雑なメッシュ処理を導入しない限り RGNT に基づいた定式化が不可能である。そこで本節では、このようなメッシュ処理技術を用いなくとも要素の辺上に仮定された亀裂面を容易に考慮することができる手法を提案する。本手法においては、Element-free Galerkin method^{2,23)}に基づいた変位場を採用する。以下にその詳細を述べる。

2.3.1(a) MLSM における誤差評価関数

Fig.2.3 に示すように、三角形要素が亀裂辺を有している場合には、RGNT の変位場は適用せず、三角形の重心を中心とする円領域を新たに定義する。このとき、重心点と衛星節点が亀裂を介して関連付くことはない（これは不連続面が存在することを意味する）。そこで本章では、このような位置に属する節点は“外節点” (Fig.2.3 で“Other nodes”と表記) と再定義することで、これらの節点が三角形領域へ及ぼす影響を排除した。すなわち、Fig.2.3 のケースでは三角形の重心点と未だ亀裂面と認識されていない辺の 2 頂点を結び（重心点と Fig.2.3 の点 a および b を結ぶ）、この線分と円領域とで構成される局所領域 (Fig.2.3 では薄青色で塗られた扇形領域) を着目三角形の影響領域として定義づけた。このとき、扇形領域と三角形要素領域における変位場 $\mathbf{u}_{\text{MLSM}}(\mathbf{x}_l)$ は、その領域内部にある衛星節点の値を用いて、次式の重み付自乗和を最小にできるように求めることができる。

$$J = \sum_{I=1}^n w(r_I) (\mathbf{u}_{\text{MLS}}(\mathbf{x}_I) - \mathbf{u}_I)^2 \quad (2.10)$$

ここで、 J は残差の自乗和、 n は非対象領域（影響領域：Fig.2.3 では薄青色で塗られた扇形領域）の内部にある節点の数、 $w(r_I)$ は重み関数、 r_I は重心点と節点 I の距離、 h は影響領域の半径（Fig.2.3 参照）、 \mathbf{u}_I は節点 I の変位である。なお、重み関数 $w(r_I)$ に関しては、影響半径の内部で 4 次のスプライン関数^{2,23)}を仮定した。具体的には次式にて表すことができる。

$$w(r_I) = \begin{cases} \frac{5}{\pi h^2} \left[1 - 6 \left(\frac{r_I}{h} \right)^2 + 8 \left(\frac{r_I}{h} \right)^3 - 3 \left(\frac{r_I}{h} \right)^4 \right] & (0 \leq r_I \leq h) \\ 0 & (h < r_I) \end{cases} \quad (2.11)$$

2.3.1(b) 亀裂を含む三角形領域の剛性

前項で示した非対称領域における変位場 $\mathbf{u}_{\text{MLS}}(\mathbf{x})$ を次式にて定義する。

$$\mathbf{u}_{\text{MLS}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

ここで、 \mathbf{a} は未定係数、 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ は任意の多項式である。式(2.12)を式(2.10)に代入すれば、 J 値の停留条件により未定係数 \mathbf{a} は次式によって得ることができる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.13)$$

ここで、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w(r_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) = \left\{ w(r_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \quad \dots, \quad w(r_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \right\} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u} = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_n \right\}^T \quad (2.16)$$

である。したがって、式(2.13)を式(2.12)に代入すると、

$$\mathbf{u}_{\text{MLS}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (2.17)$$

が得られる。ただし、

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} \quad (2.18)$$

である。ここで、 m は $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ における多項式の項数である。また、式(2.18)は有限要素法の形状関数に相当するものであるから、亀裂を含む三角形領域の剛性マトリックス (\mathbf{k}_{MLS}) は式(2.4)と同様な形式で次式のように表すことができる。

$$\mathbf{k}_{\text{MLS}} = t \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \mathbf{B}_{\text{MLS}}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{MLS}} \det J d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.19)$$

ここで、 \mathbf{B}_{MLS} は式(2.18)を空間微分することによって得られる変位-ひずみマトリ

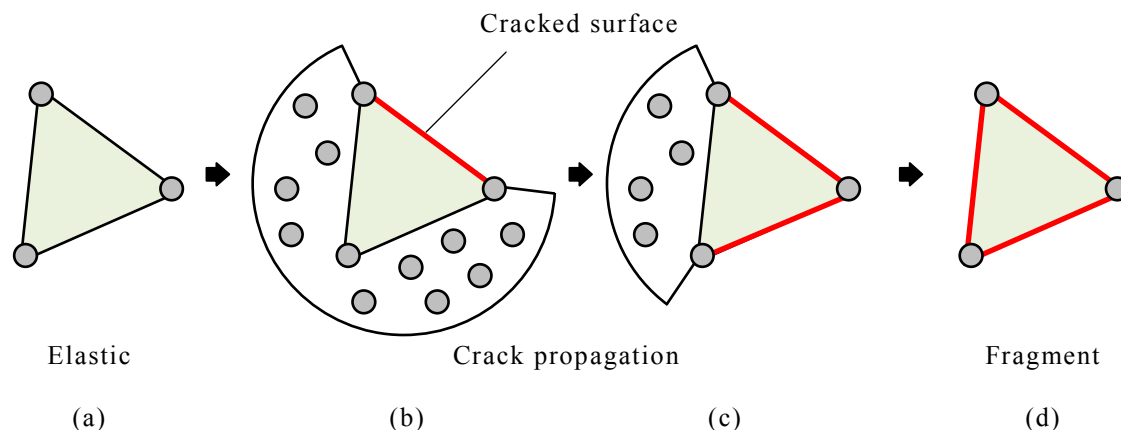


Fig.2.4 Process from the elasticity in an element

ックスである。

以上より，三角形領域が亀裂辺をもたない場合においては式(2.4)，それ以外の場合は式(2.19)に基づいた剛性マトリックスを組み立てることで，着目している三角形領域が完全な連続性を満足する状態（Fig.2.4(a)；弾性状態）から，完全に独立した状態（Fig.2.4(d)；破片）に至る過程をシームレスに解析することが可能となる。ここで，Fig.2.4(d)の破片の状態における剛性は完全に無視されることになる（体積積分を実施しない領域と定義される）。しかしながら，このような状況が起こったとしても隣り合う要素に健全な辺が含まれていれば計算が不安手になることはない。一方，節点に接続している辺の全てが亀裂辺となった場合には連立方程式の求解は不可能である。そこで，本章ではこのような状況が発生した場合にはひとつ前のステップの変位を強制変位としてその節点にあたえることで，システムが発散することを防いだ。

以上のような処理を行うことによって，1) すべての処理を移動最小自乗法で解析した場合に生じる影響領域の検索・設定や剛性行列の計算に係る計算時間が増大する問題，2) 有限要素法等で2重節点を設けた場合に生じる計算自由度が増加して計算規模が大規模化する問題，3) リメッシングなどの高度な付加技術が必要とする問題，などを回避することが可能となる。

2.3.2 亀裂発生条件と亀裂進展アルゴリズム

岩盤の耐力や亀裂の進展挙動を把握するための手法としては増分解析手法が主に用いられており，各増分段階において要素を1つずつ降伏させていく山田の方法（ R_{min} 法）^{2.27)}や幾つかの要素を同時に降伏させ，反復操作にて解を求める Marcalの方法^{2.28)}がある。しかしながら，これらの方法では解析領域全体にわたって降伏する可能性があり，亀裂の局所化を表現することが難しい。

そこで本章では，すべての三角形要素の辺上において最大主応力を静弾性解析によって求め，それらが解析領域全体において最大となっている辺を亀裂発生箇所と

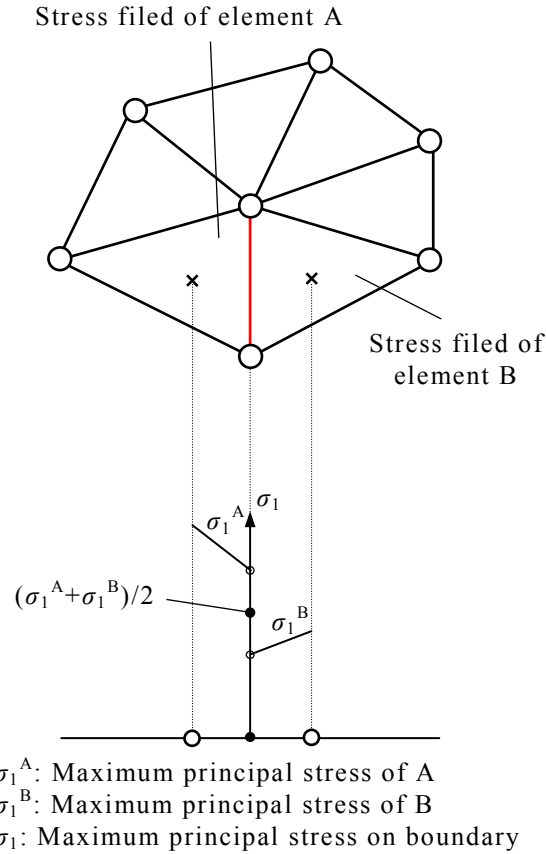


Fig.2.5 Maximum principal stress on element boundaries

定義し、これらを繰り返すことで亀裂進展現象を表現する方法論を採用した。具体的には、本手法では解析対象に任意の外力を作用させ、辺ごとにその中央点の最大主応力を求め、その値が最も大きい辺を検索する。すなわち、

$$r = \frac{f_t}{\sigma_1^{\max}} \quad (\sigma_1^{\max} > 0) \quad (2.20)$$

で定義される r が最も小さい辺を検索する。ここで、 f_t は材料の引張強度、 σ_1^{\max} は辺の最大主応力の最大値である。式(2.20)は亀裂面の候補として検索された辺の最大主応力が材料の引張強度に達する倍率を意味している。本手法では引張破壊のみを考慮している。また、亀裂の主応力方向は考慮していないが、メッシュをより細かくすることでそれらが与える影響は少ないと考える。

2.2 章で示したように、本章では変位法に基づいた定式を行っていることから、三角形の辺上では2つの相異なる応力値が存在する (Fig.2.5 を参照)。そこで本章では、辺の中央部における2つの最大主応力の平均値で式(2.20)を評価した。

さて、各節点における変位や要素における応力値は、式(2.20)で定義される r を用いて次式で修正される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_i^{\text{mod}} &= r\mathbf{u} \\
 \boldsymbol{\sigma}^{\text{mod}} &= r\boldsymbol{\sigma}
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

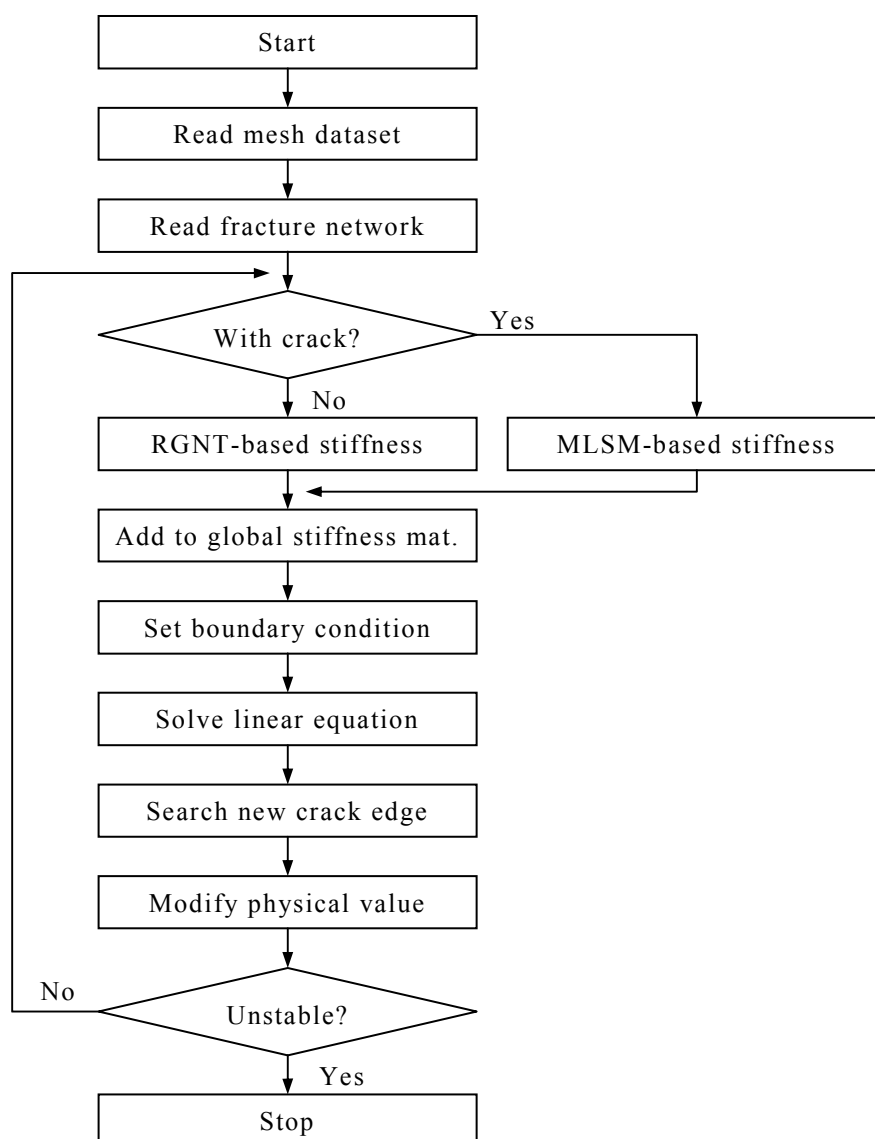


Fig.2.6 Flow-chart of the proposed approach

ここで、 $\mathbf{u}_i^{\text{mod}}$ および $\boldsymbol{\sigma}^{\text{mod}}$ はそれぞれ各節点の修正変位および各要素の修正応力である。以上のことをまとめると以下のようなになる。

- Step1 解析条件に基づいて微細な外力または強制変位を与え，静弾性解析を行う
- Step2 三角形边上の最大主応力を算出し，解析領域全体で最大となる辺を検索し“亀裂面”と定義する
- Step3 Step2 で定義された边上の最大主応力が引張強度に達する倍率を式(2.20)により算出する
- Step4 Step3 の倍率を Step1 の節点変位および要素応力に乗じて真の解とする
- Step5 Step2 で追加された新しい亀裂面を有するモデルを対象とし，Step1 に戻る

以上の操作を解析対象全体のひずみエネルギーが低下するまで繰り返すことで三角形辺にて定義された亀裂が進展することになる。本手法では、静弾性解析を繰り返し実施することになることから、解析が不安定になる可能性は低く、ロバストな亀裂進展解析が期待できる。Fig.2.6 に本手法のフローチャートを示した。なお、本章では解析対象が完全に2分化される等、解析領域が不安定になった場合、すなわち、連立一次方程式の解が求まらない場合を“不安定状態 (Fig.2.6 の Unstable)”と定義して解析を終了することにした。

2.4 亀裂進展パターン解析法の性能評価

本章では、提案手法の弾性領域における精度と得られる亀裂進展パターンの妥当性について考察する。なお、式(2.4)や式(2.19)で用いられる応力-ひずみマトリックスを変えることで三角形領域の内部における非弾性的な挙動も考慮することが可能であるが、本論文では三角形領域内部に関しては弾性状態のみを考えるものとする。また、MLSMで定義する変位場の多項式は、Fig2.4(a)~(c)の状態、すなわち弾性状態においては完全1次多項式を仮定した($\mathbf{p}^T(\mathbf{x})=\{1, x, y\}; m=3$)。したがって、式(2.14)の $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の逆行列を得るためには、少なくとも3つの衛星節点を必要とし、亀裂を表現するためには4個以上の衛星節点が必要となる。そこで、本章では、これ以降全ての例題において、影響領域内部の節点が10個前後となるように影響半径を動的に変化させて設定した。また、解析領域境界において変位の非適合状態が生じないように、境界条件が与えられている節点を持つ要素には亀裂が発生しないことを仮定した。

2.4.1 弾性状態における精度

ここで、RGNTを用いた場合の弾性解の計算精度を確認する。本節は、得られる解の数値のみに着目して議論を進めるため、単位については特に指定しない。Fig2.7に自由端に放物線上の荷重を($P=1.0$)が作用する片持ち梁モデル($L=10.0, D=1.0, \nu=1.0$)^{2,29)}を示す。本例題においては、次式に示す変位誤差ノルム $\|E\|_u$ の収束性について検証する。

$$\|E\|_u = \sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{exact}})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{exact}}) d\Omega} \quad (2.22)$$

ただし、

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{matrix} u & v \end{matrix} \right\}^T \quad (2.23)$$

である。ここで、 Ω は三角形領域、 \mathbf{u} は変位の数値解析解、 $\mathbf{u}^{\text{exact}}$ はTimoshenkoの変位解であり、本論文ではTimoshenkoの解^{2,29), 2,30)}を厳密解として扱うことにする。具体的に示すと、 $\mathbf{u}^{\text{exact}}$ は次式で表すことができる。

$$u^{\text{exact}} = -\frac{Py}{6EI} \left((6L-3x)x + (2+\nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right) \quad (2.24)$$

$$v^{\text{exact}} = \frac{P}{6EI} \left(3y^2(L-x) + \frac{D^2x}{4}(4+5\nu) + (3L-x)x^2 \right) \quad (2.25)$$

ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 $I (=D^3/12)$ は断面二次モーメントである。

固定端(Fig.2.7の左端部)の境界条件は、変位の厳密解を強制変位として与え^{2,29)}、ヤング率は100.0、ポアソン比は0.2を仮定した。また、この問題におけるメッシュ分割パターンは、 $4 \times 40, 5 \times 50, 6 \times 60, 7 \times 70, 8 \times 80, 9 \times 90, 10 \times 100, 11 \times 110$ の合計8パターンとした。なお、メッシュ形状はFig2.7に示すような直角二等辺三角形とした。

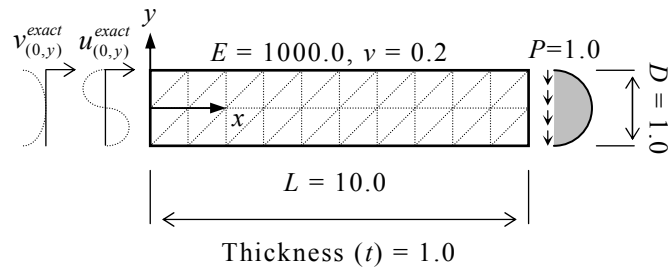


Fig.2.7 Timoshenko's cantilever beam

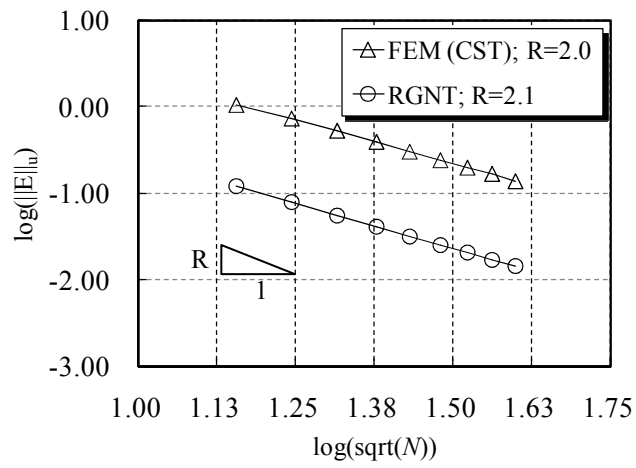


Fig.2.8 Distribution of the error norm in displacement

Fig.2.8 に、節点数と変位誤差ノルムの関係を示す。なお、水平軸には節点数の平方根を対数化した値を示している。また、RGNT の比較対象として、定ひずみ三角形要素を用いた有限要素法による解 (Fig.2.8 では“FEM(CST)”と表記) も同時に示した。

Fig.2.8 より、RGNT と定ひずみ三角形要素 (CST) の収束率 R はほぼ等しく、それぞれ $R=2.1$ と $R=2.0$ であった。また、精度に関しては RGNT のほうが断然に良いことが同図よりわかる。したがって、本要素を用いることで弾性域においては CST を用いた有限要素法よりも高精度な解が得られることがわかる。

2.4.2 GFEM と MLSM 混在時における一定ひずみ場の表現

本章では、亀裂周辺の変位を移動最小自乗法によって決定される場に置き換えるために、周辺の三角形領域の境界上における変位の連続性は保証されず、非適合状態となる。また、移動最小自乗法では節点の値と近似場の値が必ずしも一致しないために、境界条件が付与される位置では Lagrange の未定乗数法やペナルティー法などの付加的な処理を施す必要がある^{2,23)}。

そこで、本章では境界条件が与えられている節点を持つ要素には亀裂が発生しないことを仮定した。すなわち、境界条件が設定されている三角形領域では有限要素近似のみが適用される。しかしながら、領域内部の亀裂が増加するにつれて、すなわち、解析領域内部における移動最小自乗法による近似の数が増加するにつれて、システム全体における解が収束しない恐れがある。そこで、本節では Fig.2.9(a)に示すような正方形領域の境界に式(2.26)および式(2.27)で表わされる変位量を仮定したパッチテストを実施し、一定ひずみ条件における解の収束性を確認した。

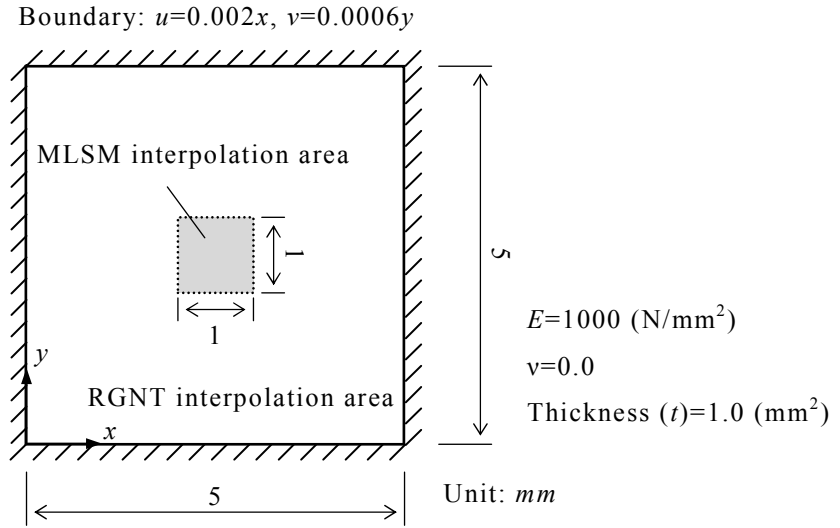
$$u(x) = 0.002x \quad (2.26)$$

$$v(y) = -0.0006y \quad (2.27)$$

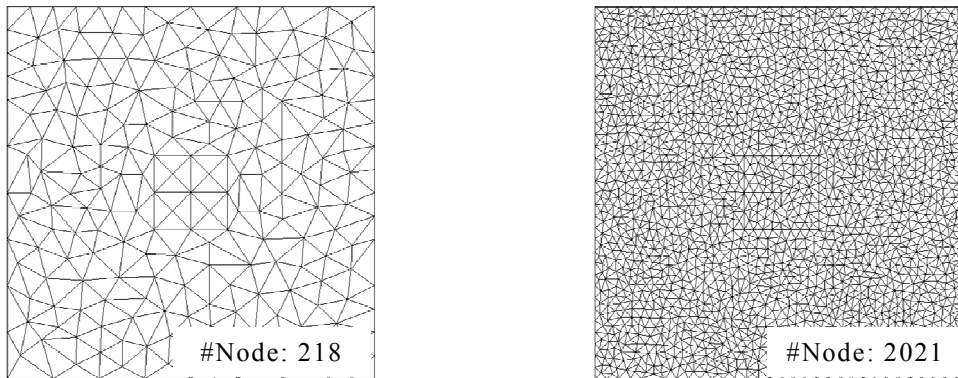
ここで、 $u(x)$ および $v(y)$ はそれぞれ解析領域境界における x 方向変位および y 方向変位である。本例題では Fig.2.9 にあるように、 $5 \times 5(\text{mm})$ の正方領域の内部に $1 \times 1(\text{mm})$ の小領域を定義し、この小領域では移動最小自乗法が適用され、それ以外の領域では有限要素近似が適用される。したがって、この例題において、要素サイズが無限小の場合にパッチテストに合格すれば近似手法としては一定ひずみ条件を数学的に満たすことになる。

本例題では節点数が 218, 526, 1028, 2021, 3948 および 9857 の場合を仮定し、前節同様に式(2.22)に基づいて節点数と変位の誤差ノルムの関係を調べることにした。参考までに、Fig.2.9(b)には節点数が 218 および 2021 の場合のメッシュ分割図を示した。

Fig.2.10 に、節点数と変位誤差ノルムの関係を示す。なお、水平軸には節点数の平方根を対数化した値を示し、鉛直軸にはそれぞれの誤差ノルムを対数化した値を示している。同図より、節点数の増加に伴って誤差ノルムは小さくなる傾向がみられる。したがって、移動最小自乗法と一般化有限要素法を組み合わせても要素サイ



(a) Analytical condition



(b) Examples of mesh division model

Fig.2.9 Analytical model for patch test

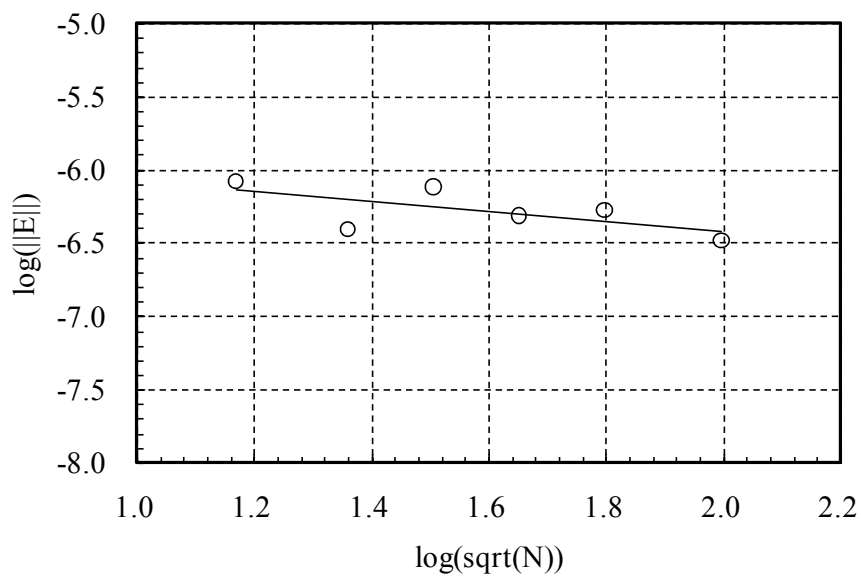


Fig.2.10 Relationship between the number of node and error-norm in displacement

ズを小さくすれば一定ひずみ条件を満足できることがわかった。

2.4.3 中央切欠きを有する梁の曲げ問題

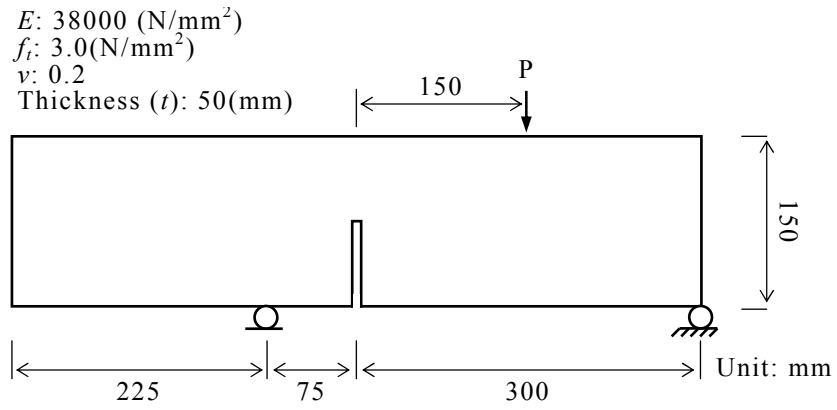
Gálvez *et al.*^{2.31)}は、Fig.2.11(a)に示すような中央切欠きを有する梁（スパン長：600mm，梁せい：150mm，梁の厚さ：50mm）の3点曲げ問題において生じた亀裂進展の様子について議論している。本節では，この実験において得られた亀裂進展の様子と提案手法にて得られた解析結果と比較する。解析では，境界条件として，梁の下端部において中央から75mmおよび300mm離れた個所を，それぞれ垂直方向固定および完全固定とし，梁上部においては中央から150mm離れた個所に強制変位を作用させた（Fig.2.11(a)参照）。また，材料特性として，ヤング率 E は3,8000 (N/mm²)，ポアソン比 ν は0.2，引張強度 f_t は3.0 (N/mm²)に設定した。解析に用いたモデルは要素数15333，節点数は7863である。Fig.2.11(b)にメッシュ分割モデルを示す。なお，本メッシュモデルは，亀裂が進展する領域を考慮し，梁の中央部右寄りの部分において要素幅が小さくなるように設定した。なお，本例題は解析領域内部において応力が集中的に生じることから，亀裂進展挙動は材料の非均質性よりも外力による応力集中の程度に依存すると考えられる。したがって，ここでは材料の非均質性は考慮しないものとした。

Gálvez *et al.*^{2.31)}の実験によると，亀裂は中央切欠きの先端部分に発生し，その後外力作用点の方向に曲線を描きながら進展していくことが分かっている。Fig.2.12に本手法によって得られた亀裂進展の様子を示す。同図より，亀裂は中央の切欠き先端に発生し，弧を描くように外力作用点の方向に進展している様子がわかる。Gálvez *et al.*^{2.31)}は，切欠き先端部で発生した亀裂は梁上部中央から測って右側30～40mmの範囲に到達することを実験において確認している。同図(d)に示しているように本解析における到達点は，梁上部中央から右側約35mmの地点となり，実験より得られた到達点の範囲に合致する結果となった。したがって，梁の曲げ問題において得られる亀裂パターンの精度は比較的高いと考えられる。

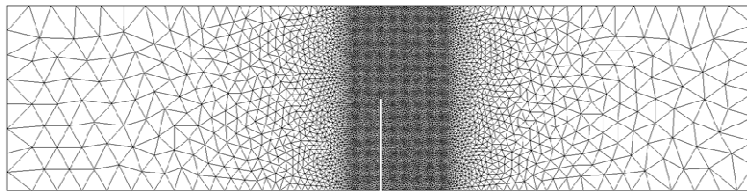
2.4.4 円孔を有する試験体の一軸圧縮問題

ここでは，一軸圧縮を受ける円孔を有する試験体の亀裂進展挙動について議論する。試験体寸法は，Tang *et al.*^{2.32)}の研究と同様にFig.2.13(a)に示すような長さ170mm，幅が50mmの試験体を仮定し，試験体中央部には直径20mmの円孔を設けた（Fig.2.13(a)中の各個内の数字は，各円孔の中心座標を意味している）。試験体の材料特性として，ヤング率 E は60 (GPa)，ポアソン比 ν は0.2，引張強度 f_t は20 (MPa)と仮定し，解析は変位制御にて行った。なお，Tang *et al.*^{2.32)}は試験体の材料分を確率密度関数であるWeibull分布に従った形で導入しているが，本手法ではそれらの平均値を与えることとした。

Fig.2.13(b)にメッシュ分割モデルを示す。なお，本解析例においては，前項の問題とは異なり，亀裂の進展個所を明確には事前予測することができないことから，メッシュ幅は解析領域全体に渡って一様に設定した。また，節点数は12933，要素数は25448である。



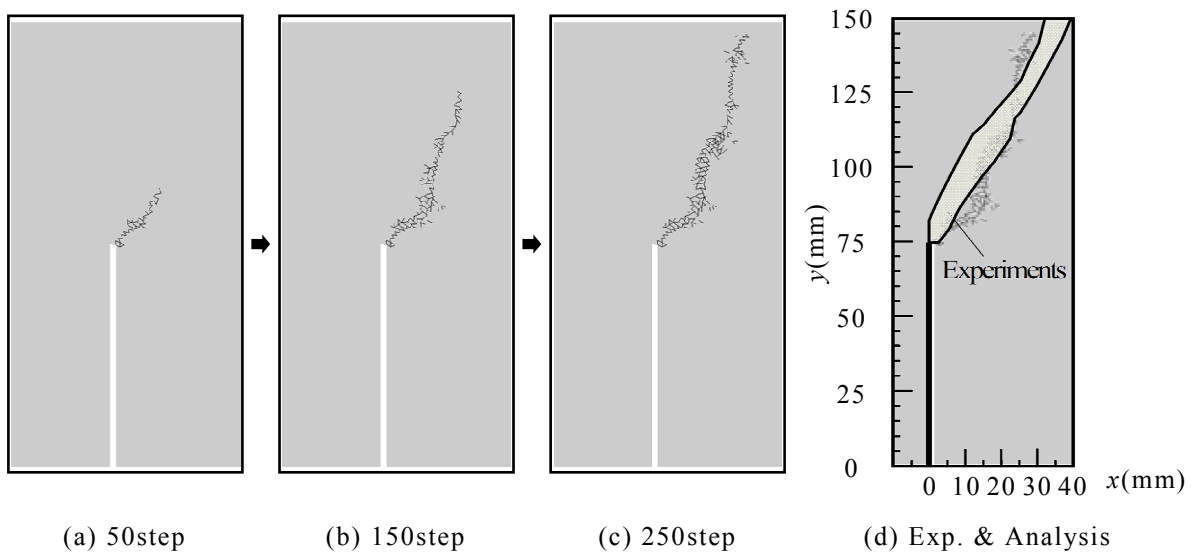
(a) Analytical model



#Element: 15333, #Node: 7863

(b) Mesh division model

Fig.2.11 Analytical and Mesh-division model for 3-point bending test



(a) 50step

(b) 150step

(c) 250step

(d) Exp. & Analysis

Fig.2.12 State of the crack propagation in 3-point bending test

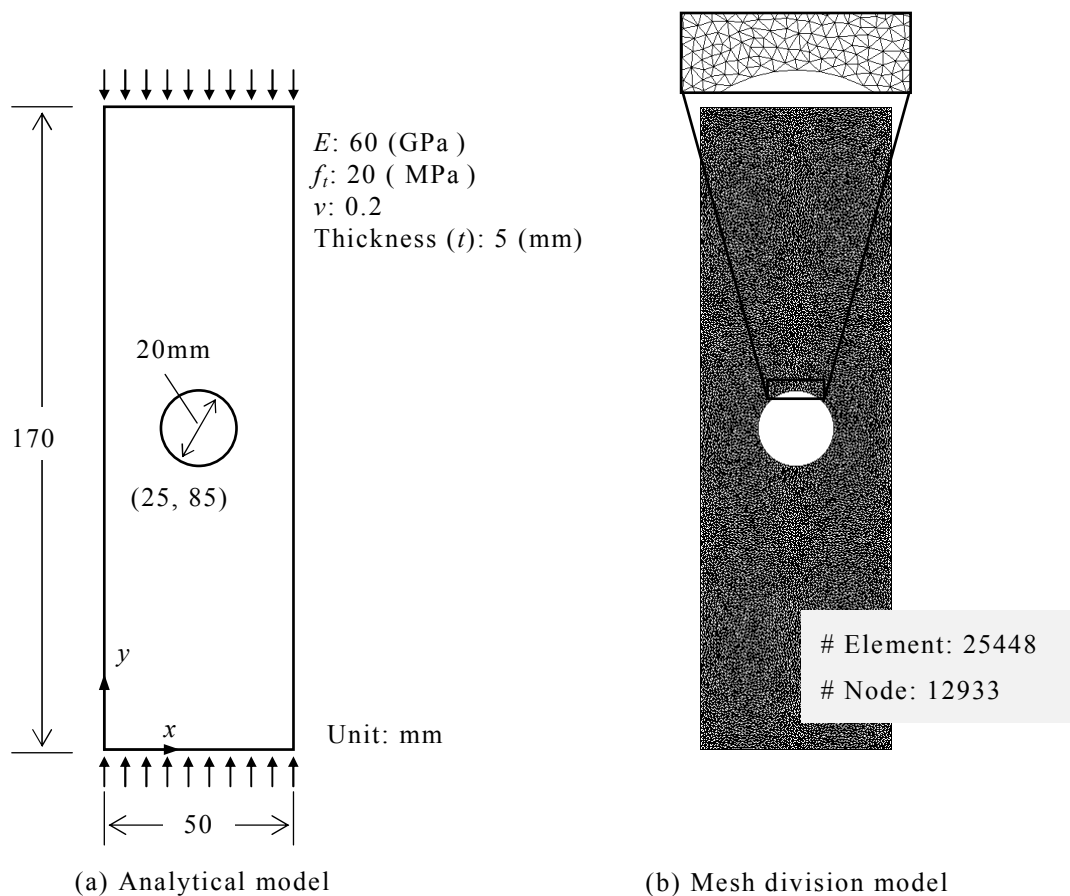
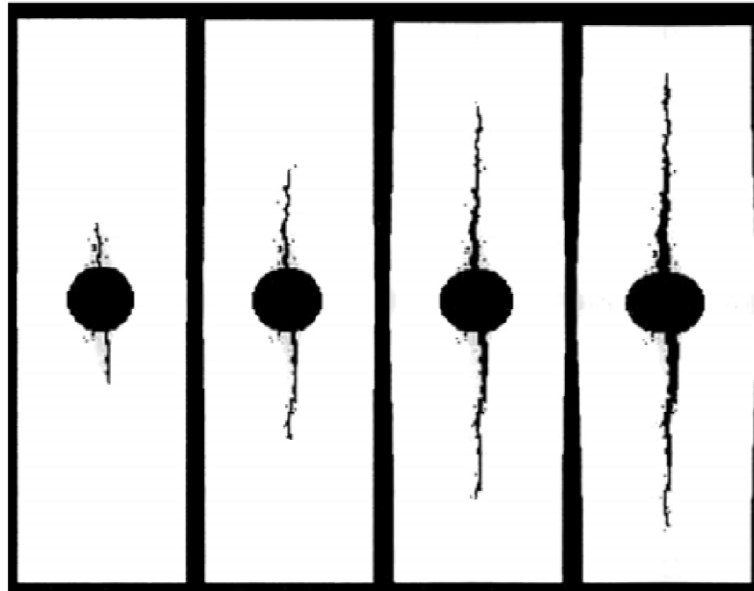


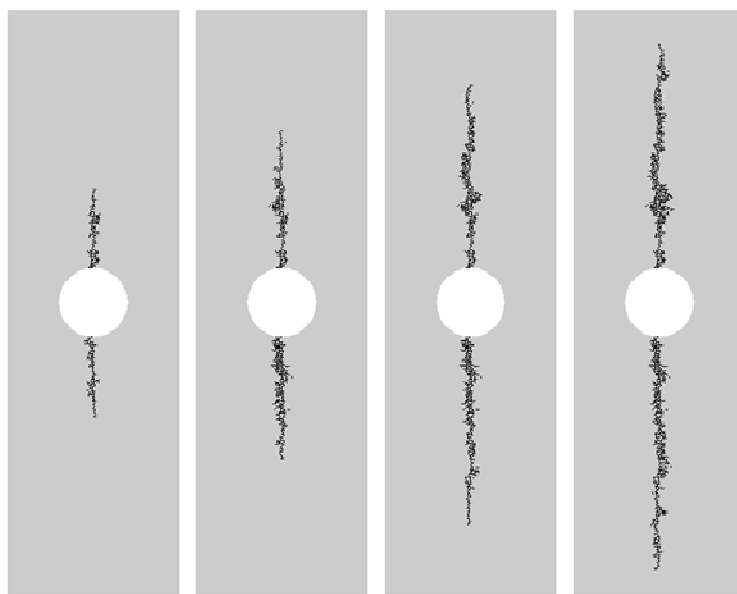
Fig.2.13 Uniaxial compression model with a hole

Fig.2.14 には Tang *et al.*^{2,32)}の結果をもとに改めて図化したもの、Fig.2.15 には本提案手法による亀裂進展の様子を示した。一般に、一軸圧縮を受ける円孔板における亀裂は、円孔の上下端部に発生し、試験体の上下方向に直線的に進展していくことが知られており、Tang *et al.*^{2,32)}の結果も本提案手法による結果も同様な結果が得られている。また、圧縮応力の値と亀裂進展の関係も定性的にはほぼ一致する結果となった。したがって、本提案手法は本例題のような応力が著しく集中するような問題に対しても有効であることが確認された。



(a) 18.1MPa (b) 19.7MPa (c) 22.4MPa (d) 24.5MPa

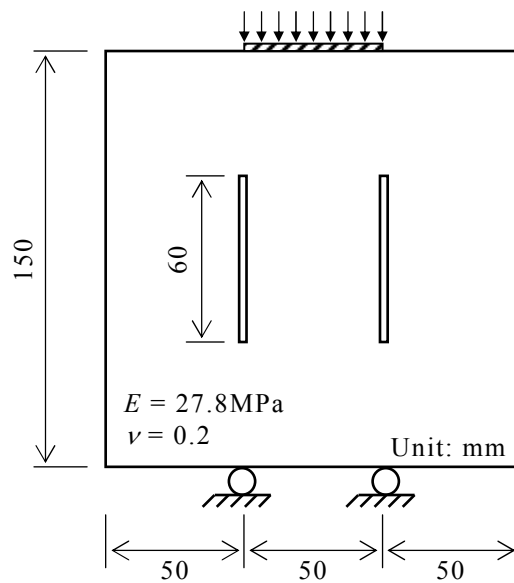
Fig.2.14 State of the crack propagation result by Tang *et al.*^{2,31)}



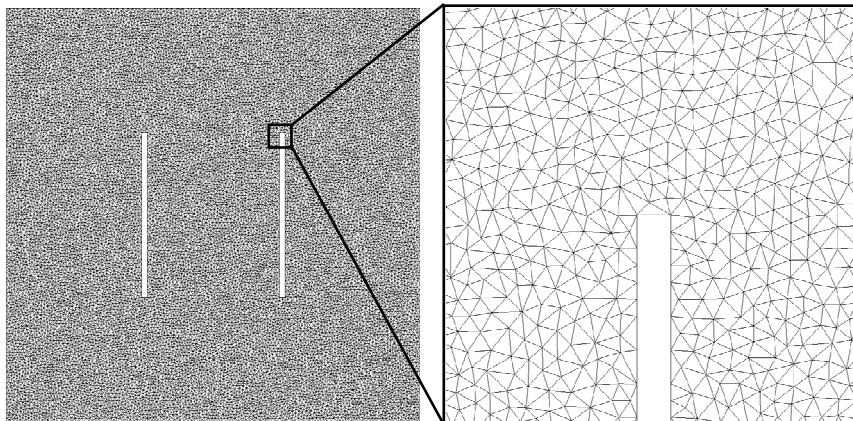
(a) 18.6MPa (b) 19.7MPa (c) 22.7MPa (d) 24.3MPa

Fig.2.15 State of the crack propagation results with the proposed method

2.4.5 貫通切欠きを有する試験体の圧縮問題



(a) Analytical model



(b) Mesh division model

(#Element: 34560, # Node: 17551)

Fig.2.16 Double Center Notch (DCN) model

ここでは、Fig.2.16 に示すような一辺が 150mm の正方形板に 2 つの切欠きが設置されている問題^{2.33)}を扱う。同図に示すように、本例題におけるメッシュ幅は前節同様に一様とした。材料特性については、ヤング率 E は $27.8(\text{N}/\text{mm}^2)$ 、ポアソン比 ν は 0.2、外力は変位制御によって作用させた。

Zhu and Tang^{2.33)}の実験によると、本例題では、载荷初期段階においては 2 つの切欠き先端部分に応力集中箇所が発生し、その後、1 つの切欠き先端で発生した亀裂

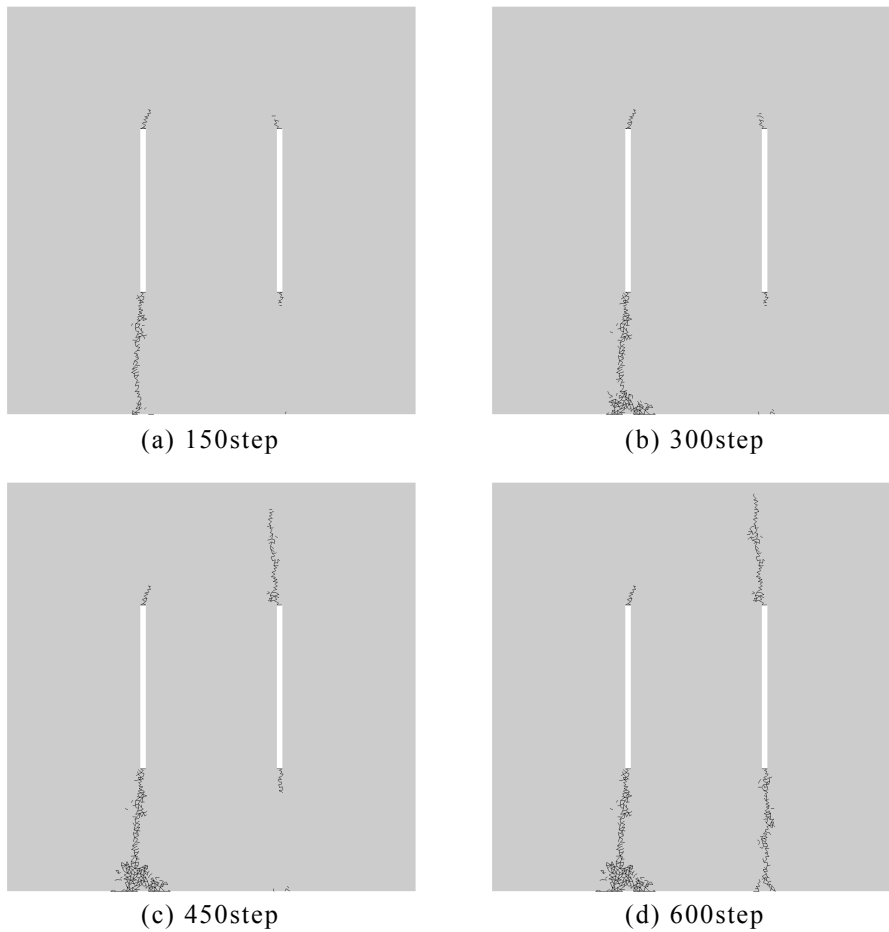


Fig.2.17 State of the crack propagation in DCN model

が卓越し，試験体の上下方向に進展していく。このとき，もう片方の切欠き先端に発生した亀裂に関してはそれと同時に進展せず，先に卓越した亀裂が試験体の上下面に達した直後に進展を開始する，という結果が得られている。

Fig.2.17 に本手法で得られた亀裂進展の様子を示す。同図より，亀裂は Zhu and Tang^{2,33)}の結果と同様に，亀裂の“種”が両切欠き先端部分において発生し，その後，片方の切欠き先端部分に発生した亀裂が卓越し，試験体の上下面方向に進展している。そして，この亀裂が試験体の下面に達した後，もう片方の切欠き部分の先端から新たな亀裂が進展する結果となった。また，亀裂の方向も実験結果と同様に載荷軸に平行となった。さらに，同図(c)，(d)において，亀裂が境界で集積している様子が見られるが，これは Rao *et al.*^{2,34)}の実験においても観察されているものである。このような非対称なモードに分析する亀裂の進展はメッシュ分割の非対称性によるところが大きいと考えられるが，本手法は亀裂進展過程に関する問題にも適用可能であると考えられた。

以上のように，本手法を用いることによって，定性的ではあるが脆性固体において比較的良好に見受けられる複雑な亀裂パターンを精度よく再現できることがわかった。

2.5 不連続岩盤モデルの亀裂進展解析

Table.2.1 Mean azimuth angles and their variance

	Mean AZ (Deg)	Variance AZ
Fracture-set 1	47.473	60.74
Fracture-set 2	102.753	57.16
Fracture-set 3	162.830	57.48

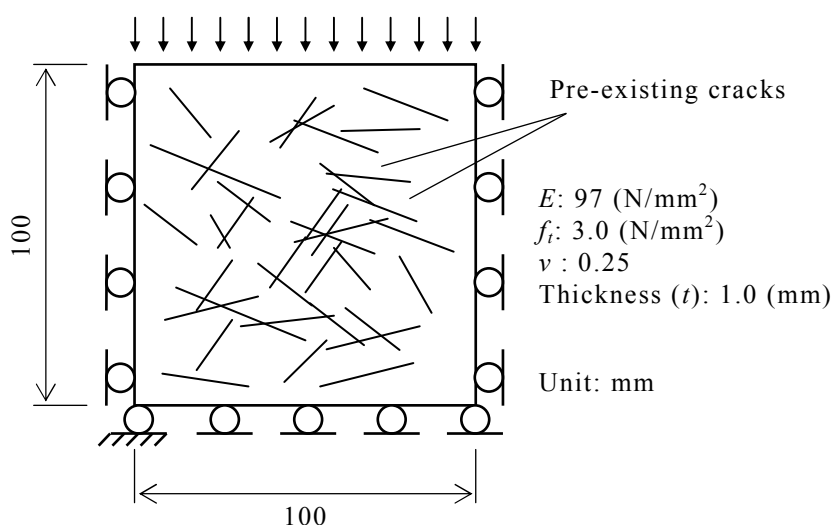


Fig.2.18 Rock mass model based on DFN model

2.5.1 回転自由度有する三角形要素

先在亀裂が多数存在する岩盤に地震力などの突然の外力が作用した場合、先在亀裂のネットワークは岩盤自体の力学特性や耐力に多大な影響を与えられ、そこで本章では、岩盤中における地下水の浸透流問題において主に用いられる亀裂ネットワークモデル^{2.20)}に基づいた不連続岩盤をモデル化し、それが圧縮力を受けた場合の亀裂進展挙動について議論することにする。

本章では、亀裂ネットワークに関しては、Ankesh *et al.*^{2.35)}が用いた亀裂セットのうち、Table.2.1に示す3つの異なる亀裂セットを用いることにした（表には方位角の具体的な値とその分散値が示されている）。また、先在亀裂はTable1の分散値が成立するような正規分布を仮定し、解析領域内部にランダムに配置した。なお、亀裂の長さは10~50mmの範囲で次式が成立するように設定した。

$$F_N = \frac{1}{L^n} \quad (2.28)$$

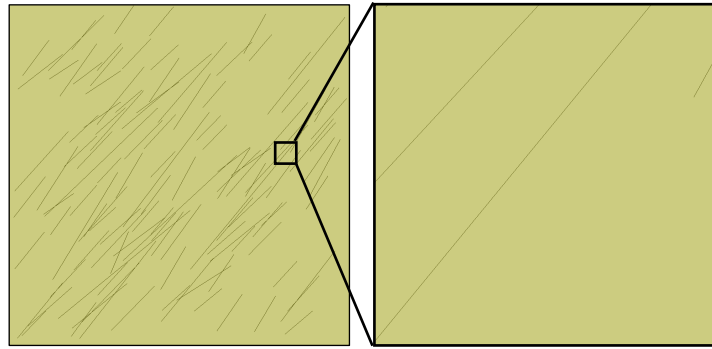
ここで、 L は亀裂長さ、 F_N は L よりも大なる亀裂の累積度数、 n はべき乗定数であり本章では $n=3.1$ とした。

Fig.2.18 に圧縮外力を受ける不連続性岩盤モデルを示す。本例題においては、ヤング率 E は $97.0 \text{ (N/mm}^2\text{)}$, ポアソン比 ν は 0.25 , 引張強度 f_t は $3.0 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ と仮定した。また, 解析は変位制御にて行った。Fig.2.19 に Fracture-set 1 を用いた場合 (Model 1), Fig.2.20 に Fracture-set 1, 2 および 3 を組み合わせた場合 (Model 2) の亀裂ネットワークモデルとメッシュ分割図を示す。なお, 節点数および要素数は, Model 1 に関してはそれぞれ 39317 および 78102, Model 2 に関してはそれぞれ 39583 および 78628 である。同図より, Model 1 の先在亀裂は, 斜め右上方向にほぼ一様な分布を示し, Model 2 の場合は 3 つの方向の亀裂がランダムに配置されていることがわかる。また, そのネットワーク構造は極めて複雑であるにも関わらず, 先在亀裂面に沿ったメッシュ分割が実現されていることがわかる。

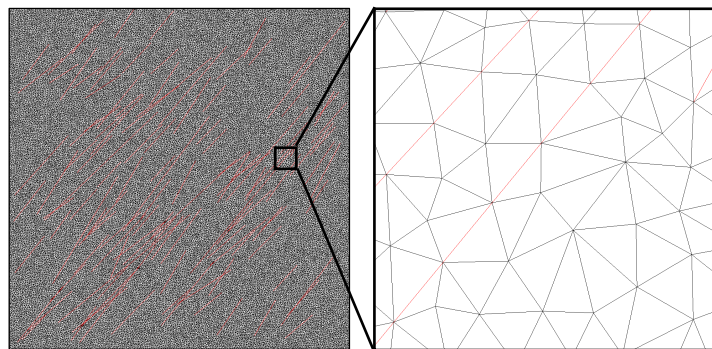
Fig.2.21 および Fig.2.22 に Model 1 および Model 2 における亀裂進展の様子を示す。Fig.2.21 より, 亀裂は亀裂ネットワークで仮定された亀裂の方位角の方向に沿って進展していることがわかる。これらの亀裂は, 初期の段階では領域全体に渡って発生している。そして, その後ある特定の箇所に集中的に発生していることがわかる。すなわち, 亀裂は自然発生的にある特定の部分に集中化し, 大規模な不連続面を形成していることがわかる。

一方, Model 2 に関しては, Fig.2.22 より, 複数の方向に亀裂が進展していることがわかる, そして, ある特定の複数の部分において亀裂の集中化が見受けられる。この亀裂の集中化は亀裂のネットワークがより多くの交差している部分で見られた。

以上の計算結果より, 亀裂性岩盤における亀裂進展は先在亀裂の分布状態に極めて依存することがわかった。一般的に, 岩盤中の亀裂の進展は微細亀裂の方向に依存することがわかっており^{2,36)}, 本結果はそれを裏付ける結果となった。したがって, 先在亀裂を加味した亀裂進展解析は岩盤の破壊面や損傷部位の特定に大いに約立つものと考えられる。

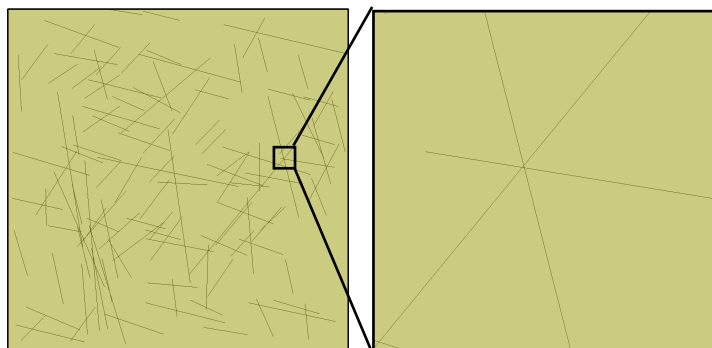


(a) DFN model based on Fracture-set 1

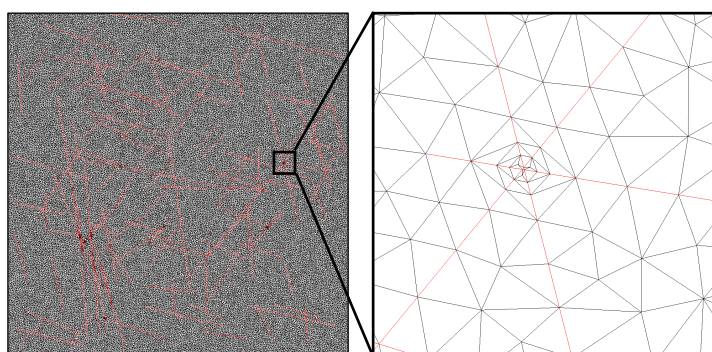


(b) Analytical model based on Fracture-set 1
 (# Element: 78102, #Node: 39317)

Fig.2.19 Mesh division model based on Fracture-set 1 (Model 1)



(a) DFN model based on Fracture-set 1, 2 and 3



(b) Analytical model based on Fracture-set 1, 2 and 3
 (# Element: 78628, #Node: 39583)

Fig.2.20 Mesh division model based on Fracture-set 1, 2 and 3 (Model 2)

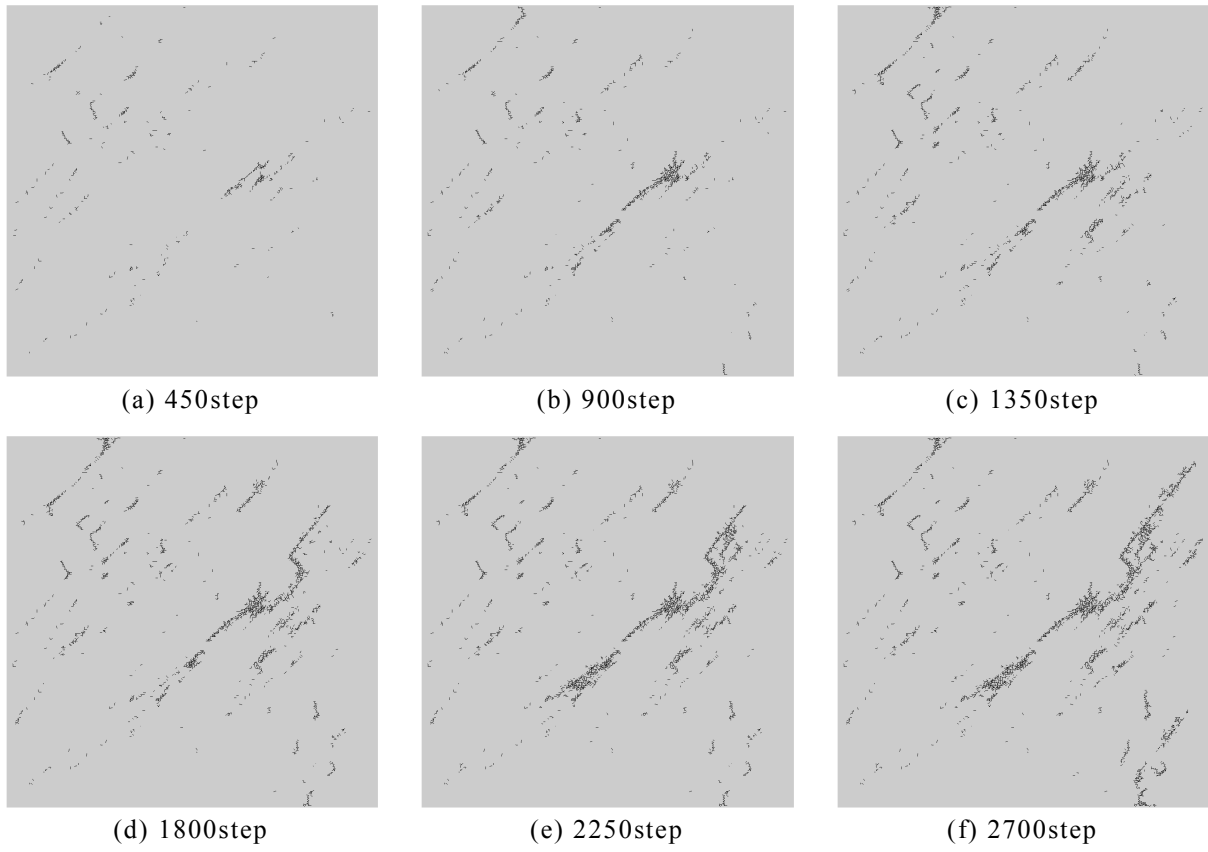


Fig.2.21 State of the crack propagation in Model 1

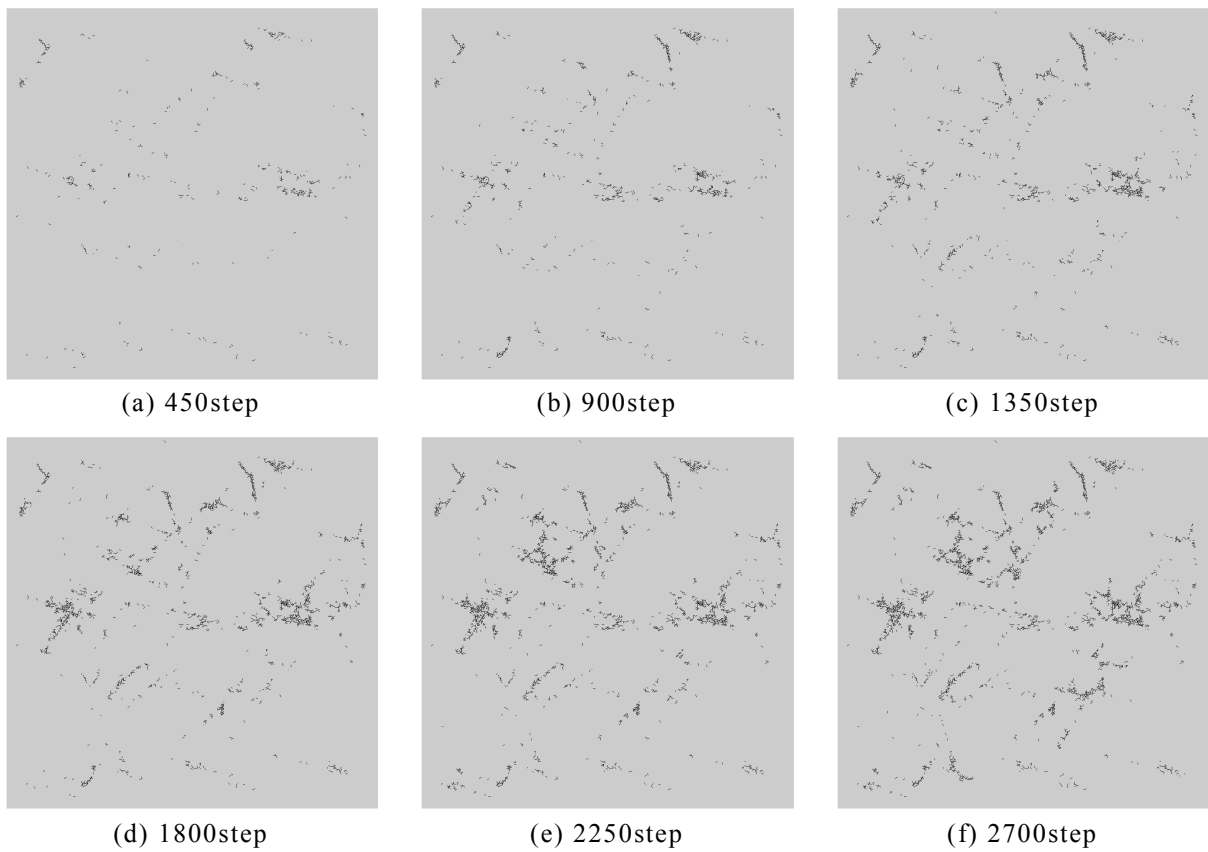


Fig.2.22 State of the crack propagation in Model 2

2.5.2 ひずみ自由度を有する三角形要素

次に、本要素は Tian *et al.*^{2,14)}によって開発された超高精度要素である“ひずみ自由度を有する三角形要素”の変位場は次式に示す。

$$u_{\text{GNT}} = \sum_{i=1}^3 \left(u_i - (y - y_i)\theta_i + (x - x_i)\varepsilon_x + \frac{1}{2}(y - y_i)\gamma_{ixy} \right) N_i \quad (2.29a)$$

$$v_{\text{GNT}} = \sum_{i=1}^3 \left(v_i + (x - x_i)\theta_i + (y - y_i)\varepsilon_y + \frac{1}{2}(x - x_i)\gamma_{ixy} \right) N_i \quad (2.29b)$$

ここで、 ε_x は x 方向のひずみ、 ε_y は y 方向のひずみ、 γ_{xy} はせん断ひずみである。この変位場は、回転自由度を有する三角形要素よりも弾性問題において高精度な解を得ることが可能である。本項では、弾性領域において式(2.29)を用いて不連続岩盤モデルの亀裂進展解析を行う。

Fig.2.23 に不連続岩盤モデルを示す。本例題においては不連続岩盤モデルの寸法を200 mm×100 mmとし、材料特性に関しては前項の例題同様に、ヤング率 E は97.0 (N/mm²)、ポアソン比 ν は0.25、引張強度 f_t は3.0 (N/mm²)と仮定した。また、解析は変位制御にて行った。Fig.2.24 に Fracture-set 1 を用いた場合 (Model 3)、Fig.2.25 に Fracture-set 1, 2 および 3 を組み合わせた場合 (Model 4) の亀裂ネットワークモデルとメッシュ分割図を示す。なお、節点数および要素数は、Model 3 に関してはそれぞれ40260 および79876、Model 2 に関してはそれぞれ32076 および63574 である。同図より、Model 3 の先在亀裂は、Fig.2.19 同様に、斜め右上方向にほぼ一様な分布を示し、Model 4 の場合は、Fig.2.20 同様に、3つの方向の亀裂がランダムに配置した。両図ともに先在亀裂面に沿ったメッシュ分割が実現されていることが確認される。

Fig.2.26 および Fig.2.27 に Model 3 および Model 4 における亀裂進展の様子を示す。両図ともに RGNT 同様に、Model 3 では亀裂は亀裂ネットワークで仮定された亀裂の方位角の方向に沿って進展し (Fig.2.26 参照)、Model 4 に関しては、複数の方向に亀裂が進展していることが確認された。ひずみ自由度有する三角形要素においても亀裂性岩盤における亀裂進展は先在亀裂の分布状態に極めて依存することが確認された。

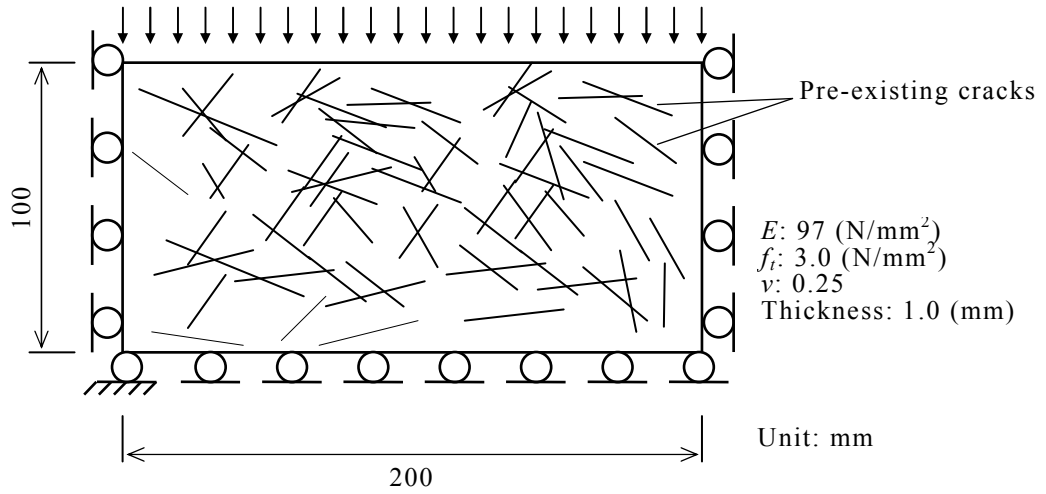


Fig.2.23 Fractured rock mass model based on DFN

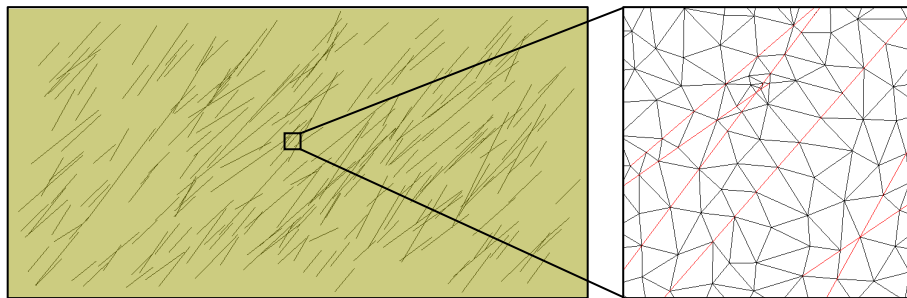


Fig.2.24 Mesh model based Fracture-Set 1 (Model 3) #Element: 79876, #Node: 40260

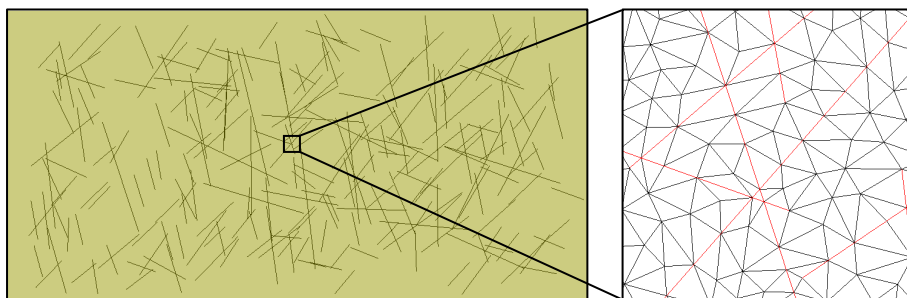
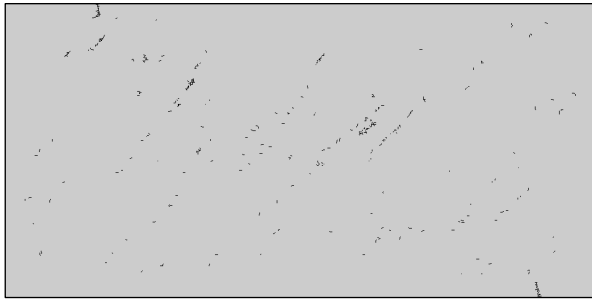
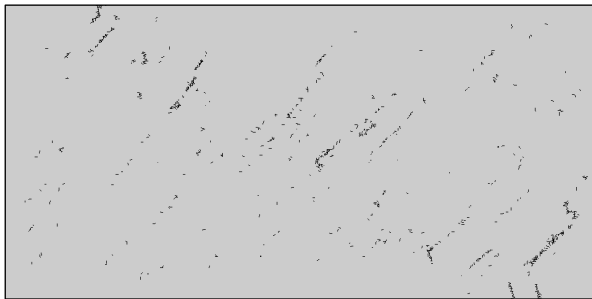


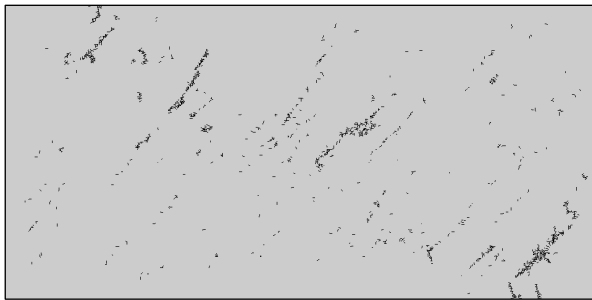
Fig.2.25 Mesh model based Fracture-Set 1, 2 and 3 (Model 4) #Element: 63574, #Node: 32076



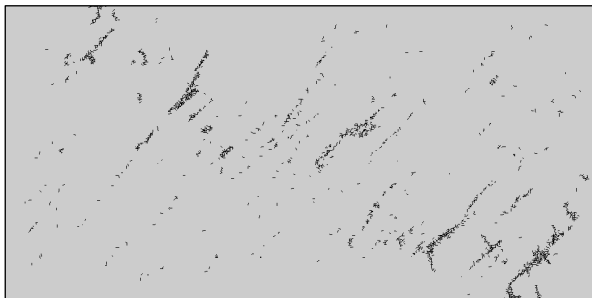
(a) 500step



(b) 1000step

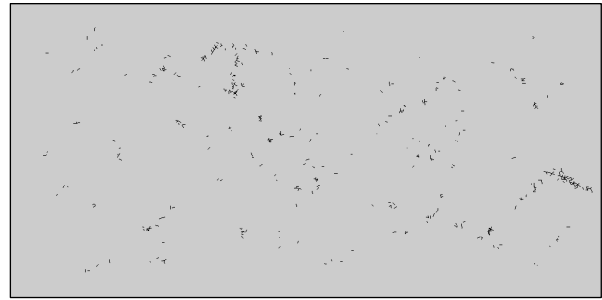


(c) 1500step

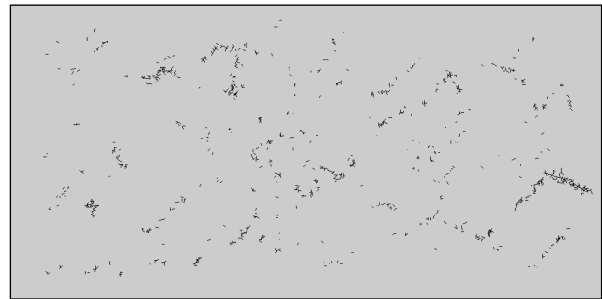


(d) 2000step

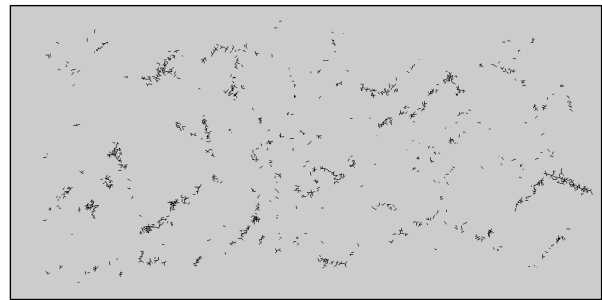
Fig.2.26 State of the crack propagation in Model 3



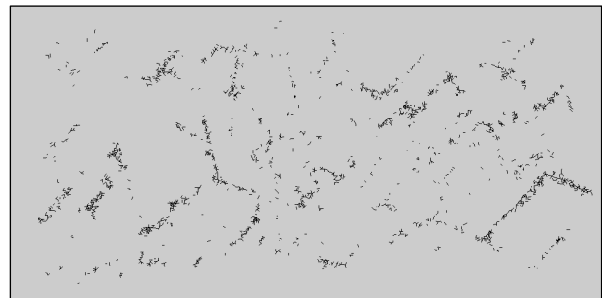
(a) 500step



(b) 1000step



(c) 1500step



(d) 2000step

Fig.2.27 State of the crack propagation in Model 4

2.6 結語

本章では、岩盤中に存在する亀裂群を亀裂ネットワークモデルにてモデル化し、複雑な先在亀裂パターンを三角形メッシュの境界で直接的に考慮可能な数値解析手法を提案した。本章で得られた結果を以下に列記する。

- 1) 回転自由度を有する三角形要素の重心点を移動最小自乗法の近似点として定義付けることで三角形要素の辺を亀裂面として扱うことが可能となった。これによって、三角形要素が弾性状態から破壊に至る過程をシームレスに計算できるようになった。
- 2) 本手法によって得られる亀裂進展パターンは、既存の実験結果と高い精度で一致することがわかった。
- 3) 本手法により、亀裂ネットワークモデルに基づいた亀裂進展解析が可能となった。
- 4) 亀裂ネットワークを考慮した亀裂進展解析の結果、得られる亀裂パターンは亀裂ネットワークに極めて依存した形で現れた。そして、ある特定の箇所に集中化し、大規模な破壊面を形成することがわかった。

本章で扱った三角形領域は弾性状態のみを仮定している。したがって、実現象により近い形のシミュレーションを実現するためには、三角形要素の内部において、弾塑性モデル等の非線形モデルを導入する、あるいは亀裂面（要素辺）においてばね剛性などのすべりを考慮したモデルを導入する必要がある。特に、岩盤解析においてはすべり面を考慮することが極めて重要であると考えられ、例えば、剛体ばねモデル^{2,9)}などの要素境界にせん断ばねモデル等を導入できる手法を本手法に追加適用することで、これらのことを考慮することも可能である。また、亀裂ネットワークが大型化、複雑化するにつれて計算規模も大型化することが容易に予想されることから、本手法の大規模計算への応用展開も重要な課題となる。また、実験値との定量的な評価が不足しており、これらのことについても今後の課題となろう。

参考文献

- 2.1) 谷本親伯, 岸田潔, 田畑宏司, 吉津洋一, 國井仁彦: 岩盤不連続面情報の取得・分析および不連続性岩盤のモデル化, 土木学会論文集, No.547/III-36, pp.145-147, 1996.
- 2.2) 小山倫史, 赤尾悟史, 西山哲, 大西 有三: 岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法(DDA)の適用に関する研究, 土木学会論文集 C, Vol.65, No.3, pp.644-662, 2009.
- 2.3) Budiansky, B. and O'Connell, R. J.: Elastic moduli of a cracked solid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.12, pp.81-97, 1976.
- 2.4) Cleary, M. P., Chen, I. W., and Lee, S. M.: Self-consistent techniques for heterogeneous media, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol.106, No.5, pp.861-887, 1980.
- 2.5) 吉田秀典, 堀井秀之: マイクロメカニクスに基づく岩盤の連続体モデルと大規模空洞掘削の解析, 土木学会論文集, No.535/III-34, pp.23-41, 1996.
- 2.6) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T.: Elastic compliance for rock-like materials with random, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.4, pp.27-40, 1984.
- 2.7) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, Vol.1, No.II-8, 1971.
- 2.8) Shi, G. H and Goodman, R. E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989.
- 2.9) 川合忠彦, 離散化極限解析法概論, 培風館, 1990.
- 2.10) 鈴木隆次, 浜島良吉: 要素変形を考慮した不連続体解析による応力伝達, 変形, 破壊強度解析, 土木学会論文集, No.547/III-36, pp.23-38, 1996.
- 2.11) Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L.: A Model for the Mechanics of Jointed Rock, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. ASCE*, Vol.94, No.3, pp.637-659, 1968.
- 2.12) 宇野晴彦, 石田毅, 水田義明: 岩盤モデルおよび解析手法の歴史的な変遷と特徴, 資源と素材, Vol.118, No.3,4, pp.150-156, 2002.
- 2.13) 松原仁, 伊良波繁雄, 富山潤, 山城建樹, 矢川元基: 回転自由度を有する四面体要素を用いたフリーメッシュ法, 土木学会論文集, No.766, pp.97-107, 2004.
- 2.14) Tian, R., Matsubara, H. and Yagawa, G.: Advanced 4-node tetrahedrons, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.68, pp.1209-1231, 2006.
- 2.15) Yagawa, G. and Matsubara, H.: Enriched Free Mesh Method: An Accuracy Improvement for Node-based FEM, *Computational Methods in Applied Sciences*, Vol.7, pp.207-219, 2007.

- 2.16) Matsubara, H. and Yagawa, G.: Convergence studies for Enriched Free Mesh Method and its application to fracture mechanics, *Interaction and Multiscale Mechanics: An International Journal*, Vol.2, No.3, pp.277-293, 2009.
- 2.17) 松原仁, 入部綱清, 伊良波繁雄: 粒子法の微分精度に関する一考察および物理自由度を有する移動最小自乗法, 土木学会論文集 A, Vol.66, No.4, pp.723-736, 2010.
- 2.18) Shewchuk, J. R.: Delaunay Refinement Mesh Generation, Ph. D. diss., Carnegie Mellon University, 1997.
- 2.19) Shewchuk, J. R.: Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation, *Computational Geometry*, Vol.22, pp.21-74, 2002.
- 2.20) Long, J. C. S., Billaux, D., Hestir, K., Majer, E. L., Peterson, J., Karasaki, K., Nihei, K., Gentler, S. and Cox, L.: Characterization of Fracture Networks for Fluid Flow Analysis, LBL-26868, pp.1-25, 1988.
- 2.21) Okuda, H. and Yagawa, G.: Large-scale parallel finite-element analysis for solid earth problems by GeoFEM, *Surveys on Mathematics for Industry*, Vol.11, No.1-4, pp.159-196, 2005.
- 2.22) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol.37, No.155, pp.141-158, 1981.
- 2.23) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 2.24) Sekiguchi, M. and Kikuchi, N.: Re-examination of membrane elements with drilling freedom, *Proceeding of Fifth World Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- 2.25) 松原仁, 伊良波繁雄, 富山潤, 山城建樹, 入部綱清: 回転自由度を有する関口・菊池要素と Cook 要素の比較, 応用力学論文集, Vol.7, pp.431-440, 2004.
- 2.26) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: Finite Element Method, *Butterworth - Heinemann, 5th Edition*, Vol.1, 2000.
- 2.27) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.10, pp.343-354, 1968.
- 2.28) Marcal, P. V. and King, I, P.: Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.9, pp.143-155, 1967.
- 2.29) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, *Mcgraw Hill, 3rd Edition*, 1970.
- 2.30) Augarde, C. E. and Deeks, A. J.: The use of Timoshenko's exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis, *Finite Elements in Analysis and Design*,

- Vol.44, pp.595-601, 2008.
- 2.31) Gálvez, J. C., Elices, M., Guinea, G. V. and Planas, J.: Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading, *International Journal of Fracture*, Vol.94, pp.267-284, 1998.
 - 2.32) Tanga, C. A., Wongc, R. H. C., Chauc, K. T. and Lin, P.: Modeling of compression-induced splitting failure in heterogeneous brittle porous solids, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.72, pp.597-615, 2005.
 - 2.33) Zhu, W. C. and Tang, C. A.: Numerical simulation on shear fracture process of concrete using mesoscopic mechanical model, *Construction and Building Materials*, Vol.16, pp.453-463, 2002.
 - 2.34) Rao, K. B., Desai, V. B. and Mohan, D. J.: Experimental investigations on mode II fracture of concrete with crushed granite stone fine aggregate replacing sand, *Materials Research*, vol.15, No.1, pp.41-50, 2012.
 - 2.35) Ankesh A.: Effective Properties of Multi-Scale Fracture Networks: Hierarchical Modeling of Fractures Networks, *LAP LAMBERT Academic Publishing*, 2010.
 - 2.36) 小林昭一他, 岩の力学: 基礎から応用まで, 丸善, 1993.

第3章 粒状構造を有する脆性材料の

離散亀裂進展解析手法の開発および性能評価

Development of Discrete Crack Propagation Analysis Method for Brittle Materials with Particle Structures

3.1. 緒言

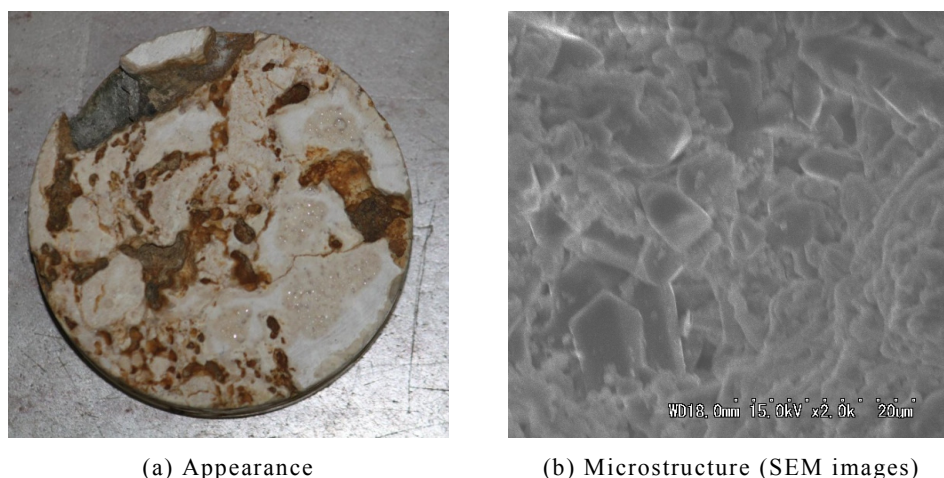


Fig.3.1 An example of Ryukyu lime stone

岩石やコンクリートなどの脆性材料には様々な破壊パターンが存在する。これは、材料の微視的構造に起因している場合が多く、特に岩石においては空隙、先在亀裂、不均一に分布している材料物性、あるいは岩石自体の生成過程など様々な要因が複雑に絡み合っている。たとえば、琉球列島に広く分布している碎屑性の琉球石灰岩^{3.1)}に関しては (Fig.3.1 を参照)，巨視的には多数の空隙や亀裂が分散し、微視的には多角形状の粒子が複雑に重なり合っている構造を有している。したがって、岩石自体の強度は極めてばらついた形となって現れる^{3.2)-3.4)}。このような不確実な部分の多さが相俟り、琉球列島においては琉球石灰岩を主とする岩盤の崩落事故が現在もなお頻繁に起こっている事実もある^{3.5)}。以上のように、琉球石灰岩などの堆積岩に関しては構造的に不確定な要素が多いことから、破壊力学的にも未解明な部分が多いのが現状である。

さて、近年の計算機性能の発達に伴って、有限要素法 (FEM)^{3.6)}や有限差分法 (FDM)、最近ではメッシュフリー法や粒子法等の要素を用いないメッシュレス法の研究が工学の様々な分野で盛んに行われ、固体力学、流体力学等の連続体問題に適用され、あらゆる問題に応用されるようになった^{3.7) - 3.14)}。現在に至っては、これらの手法は工学上の問題や現象を解明するためのツールとして欠くことのできないものとなっている。

不連続性岩盤の変形および破壊挙動を解析する手法は、主に、1) 亀裂を等価な連続体に置き換える手法、2) 離散的に亀裂をモデル化する方法に大別することができる^{3.15)}。前者には、等価弾性体モデル^{3.16), 3.17)}、クラックテンソル理論^{3.18)}など、後者には個別要素法 (DEM)^{3.19)}、不連続変形法 (DDA)^{3.15), 3.20)}、剛体ばねモデル (RBSM)^{3.21)}、FESM (Finite Element Spring Model)^{3.22)}などが挙げられる。

等価弾性体モデルでは、巨視的な破壊領域を加味した岩盤の力学特性を評価することが可能であるが、岩石の微細構造（以後、粒子と呼ぶ）の界面におけるすべりや微細亀裂を考慮することは難しい。一方、個別要素法や不連続変形法では陽な形で岩盤の亀裂を組み込むことが可能であるため、不連続性を有する岩盤斜面の挙動などの問題に適している。一方、剛体ばねモデルや FESM においては、粒子の微細構造を疑似的に評価することができるが、剛体ばねモデルに関しては、弾性域における挙動の精度に問題が残されている。FESM に関しては、連続体から不連続体までを含めて、変形、破壊挙動の解析に適用することが可能であることから、その詳細な検討は現在も進められている。さらに、亀裂を陽な形で考慮する手法として、拡張有限要素法 (X-FEM)^{3.23), 3.24)}、境界要素法 (BEM)^{3.25), 3.26)}、Cellular automaton (CA)^{3.27), 3.28)}、Rock failure process analysis (RFPA)^{3.29) - 3.31)}などが挙げられる。X-FEM は、亀裂面等の不連続面を亀裂周辺の要素節点に新たな自由度ならびに内挿関数を付加することで表現する手法であり、BEM も同様に、亀裂面等の境界に内挿関数を付加し境界を表現する手法である。CA は解析領域を Cell と呼ばれる格子にて離散化し、Cell の大きさ、状況、近傍の Cell に応じて、時々刻々と状態を変化させる手法である。また、Tang によって開発された RFPA は、材料の非均質性を考慮した有限要素法に基づき、複雑な破壊の非線形挙動を簡素化した近似式にて表現した不連続解析手法である。しかしながら、上記の手法は亀裂面が増加すると共に、亀裂境界における方程式の増加や応力緩和の収斂計算負荷が増加するなど、解の収束に関する問題が残っている。

このように、極めて不確実な力学的挙動を示す岩盤に対する数値計算手法は、これまで多くの研究者らによって提案されてきている。このような状況下の中、松原らもまた、高精度解析手法の確立を指向し、節点をベースとした数値計算手法を提案してきた^{3.12) - 3.14)}。しかしながら、岩石特有の微細構造、空隙および先在亀裂の影響を同時に考慮でき、かつ弾性変形から破壊に至るまでの亀裂進展挙動を高精度に解析できる手法の確立については、未だ発展途上の段階である。

以上のような背景のもと、本章では、砕屑性の堆積岩を対象に、粒子を多角形で近似し、岩石自体の亀裂は各粒子の界面にて発生することを仮定とした節点ベースの離散亀裂進展解析法を提案する。具体的には、弾性問題において高精度な解を得ることのできる Enriched Free Mesh Method (EFMM)^{3.10) - 3.12)}と、任意の位置で高精度な近似関数を得ることができる付帯条件付き多次元移動最小自乗法 (C-MultiMLSM : Multi-dimensional Moving Least Squares Method with Constraint condition)^{3.14)}を併用することで、固体の弾性状態から破壊に至る過程をロバストに解析できる新たな解析手法を提案することを目的とする。

3.2. Enriched Free Mesh Method (EFMM)

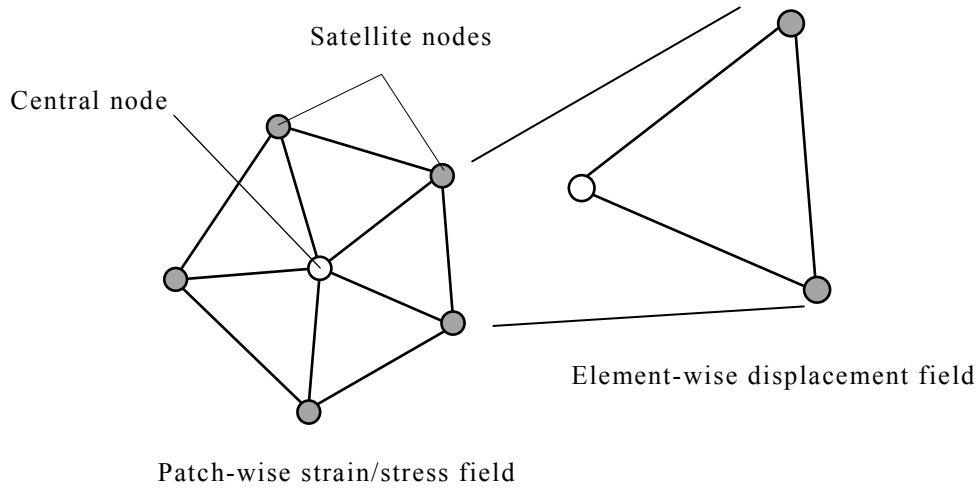


Fig.3.2 Patch-wise and element-wise concepts in a local mesh

3.2.1 概要^{3.10) - 3.12)}

EFMM は節点に接続されている要素群（2次元領域では三角形要素群（Fig.3.2を参照），3次元領域では四面体要素群），すなわち局所パッチを用いて節点の剛性を評価する手法である。本手法では，変位場は局所要素ごとに，応力場は局所パッチごとに定義されており，それぞれが独立している。変位場と応力場を関連付ける方法としては，最小自乗法^{3.10)}と Hellinger-Reissner の変分原理^{3.11), 3.12)}によるものが提案されているが，本章では変位の連続性が保障されている後者を採用することにした。以下では，二次元領域における節点剛性マトリックスの算出方法を概説する。

Hellinger-Reissner の変分原理に基づいた $\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}$ 仮定型の汎関数は次式で示される^{3.6)}。

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで， $\boldsymbol{\sigma}$ は応力， \mathbf{u} は変位， \mathbf{B} は変位-ひずみマトリックス， \mathbf{D} は応力-ひずみマトリックス， \mathbf{b} は体積力， \mathbf{t} は境界 Γ における表面力， Ω は局所パッチ領域である。一般に，Hellinger-Reissner の変分原理を FEM に適用する場合，変位場および応力場は一つの要素にて定義される^{3.6)}。これに対して EFMM では，変位場は要素ごとに，応力場は局所パッチごとに定義される。ここで，応力場ならびに変位場を次式で定義する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^u \mathbf{u}_i \quad (3.2a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \mathbf{e} \quad (3.2b)$$

ここで、 \mathbf{N}^u は定ひずみ三角形要素の形状関数、 \mathbf{u}_i は各節点における変位、 $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ は応力場に関する任意の関数、 \mathbf{e} は応力場に関する未定係数である。なお本章では、応力場を完全一次多項式にて定義した。

式(3.1)の停留条件より、次式に示すマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{x})^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{P}(\mathbf{x})^T \mathbf{B} d\Omega \quad (3.4b)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^u)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^u)^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (3.4c)$$

ここで、“T”は転置を意味している。式(3.3)から、未定係数 \mathbf{e} を静的縮約すると次式が得られる。

$$\mathbf{K}_{\text{EFMM}} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.5)$$

ただし、

$$\mathbf{K}_{\text{EFMM}} \equiv \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \quad (3.6)$$

である。マトリックス \mathbf{K}_{EFMM} は、有限要素法における剛性マトリックスに相当するものである。なお、下付き添え字は、後述する C-MultiMLSM により算出される剛性マトリックス ($\mathbf{K}_{\text{C-MultiMLSM}}$) と区別するために表記している。

3.2.2 評価節点における積分領域

式(3.5)によって中心節点 i における剛性マトリックスを得るためには、節点ごとに領域積分を実行する必要がある。節点ごとに積分を実施する方法に関して、節点積分法^{3.12), 3.32) - 3.34)}があるが、これらは節点周りの領域の面積を乗じることで求めている。そこで、本章ではこれらの研究を参考にして、Fig.3.3 に示すように中心節点ごとに局所的な領域を定義し、Gauss の数値積分を用いて評価することにした。具体的には、解析領域全体における積分の重複を避けるために、隣合う要素における要素の内接円内の点同士を結ぶことで生成される領域を積分領域とした。Gauss の数値積分に関しては、内接円内の点、内接円内の点同士を結ぶ線分と各要素の辺との交点および中心節点からなる三角形領域に適用した。本手法により、中心節点 i における剛性マトリックス \mathbf{K}_{EFMM} は、

$$\mathbf{K}_{\text{EFMM}} = \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{g=1}^{N_g} w_g^{s,g} (\mathbf{C}^{s,g})^T (\mathbf{A}^{s,g})^{-1} (\mathbf{C}^{s,g}) \quad (3.7)$$

にて表すことができる。ここで、 N_s は中心節点周りの積分領域における三角形領域の数、 s は着目している三角形領域の番号、 N_g は三角形領域における Gauss の積

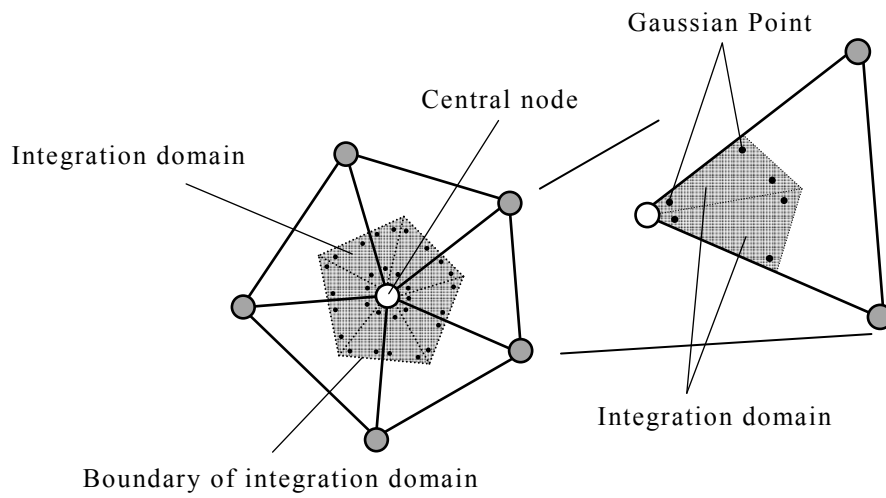


Fig.3.3 Illustration of integration domain

分点の数, g は着目している Gauss の積分点, w_g は Gauss の重み関数である。なお, 後述する C-MultiMLSM の W は移動最小自乗法における重み関数であり, 式(3.7)の w_g とは異なるものである。

3.3. 粒状構造を考慮した離散亀裂進展解析手法

Fig.3.1 に琉球石灰岩の一例を示したように、堆積岩は粒子状の微細構造を有している場合が多く、一般に粒子界面の強度は低い。したがって、堆積岩における亀裂は微視的には主に粒子界面に沿って進展していくことが考えられる。そこで本章では、岩石を構成する粒子を3.2章で定式化したEFMMの積分領域とし、亀裂はFig.3.3に示した積分領域の境界に沿って進展する離散亀裂進展解析法を提案する。すなわち本手法では、積分領域と岩石を構成する粒子の形状は等しいと仮定する。粒子をEFMMの積分領域として定義することで、式(3.2b)により粒子内部における応力場を任意に仮定することが可能である。更には、積分領域をランダムな形状に設定することで、複雑な粒子形状の設定も可能となる。以下では、粒子界面における応力の評価方法と亀裂発生後の節点剛性の算出方法を示す。

3.3.1 亀裂進展解手法および粒子界面における亀裂発生応力の算出法

岩石の耐力や亀裂の進展挙動を把握するためには、増分解析手法が主に用いられており、各増分段階で要素を1つずつ降伏させていく山田の方法(R_{\min} 法)^{3.35), 3.36)}や幾つかの要素を同時に降伏させ、反復操作にて解を求めるMarcalの方法^{3.37)}がある。しかしながら、これらの方法では解析領域全体にわたって降伏する可能性があり、亀裂の局所化を表現することが難しい。

そこで本章では、すべての粒子界面における最大主応力を静弾性解析によって求め、それが解析領域全体において最大となっている粒子界面を亀裂発生箇所と定義し、これを繰り返すことで亀裂進展現象を表現する方法論を採用した。具体的には、本手法では解析対象に任意の外力を作用させ、粒子界面ごとに界面の最大主応力を求め、最大主応力が最も大きい粒子界面を検索する。すなわち、

$$r = \frac{f_i}{\sigma_1^{\max}} \quad (\because \sigma_1^{\max} > 0) \quad (3.8)$$

で定義される r が最も小さい粒子界面を検索する。ここで、 f_i は材料の引張強度、 σ_1^{\max} は粒子界面の最大主応力の最大値である。式(3.8)は、亀裂面の候補として検索された粒子界面の最大主応力が材料の引張強度に達する倍率を意味している。なお本章では、亀裂の発生に関しては、材料の引張強度のみを考慮しており、せん断強度は考慮していない。したがって引張応力が発生しない場合、すなわち、解析領域における粒子界面の主応力が全て圧縮になった場合、解析は終了する。

3.2章で示したように、EFMMでは節点ごとに応力場が設定されることから、Fig.3.4に示すように粒子界面では相異なる応力値が存在する。そこで本章では、粒子界面の中央部における2つの最大主応力において、高い値の方を粒子界面の中央部における最大主応力とし、式(3.8)を評価した。すなわち、前章同様に、本手法においても引張破壊のみを考慮し、亀裂の進展方向は先在亀裂の方向に仮定する。

さて、各節点における変位および応力値は、式(2.21)同様、式(3.8)で定義される r を用いて次式で修正される。

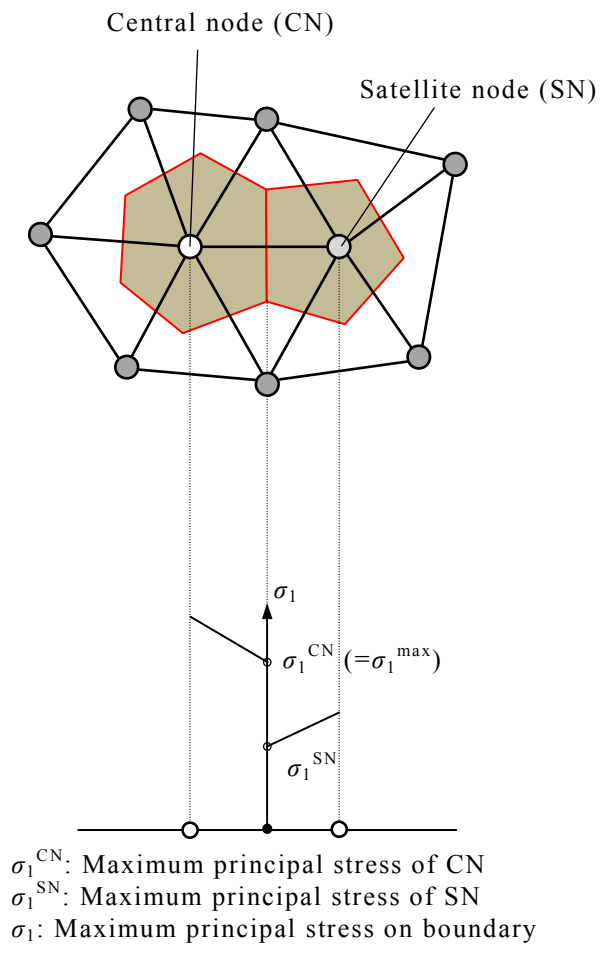


Fig.3.4 Maximum principal stress on boundary surface in integration domain

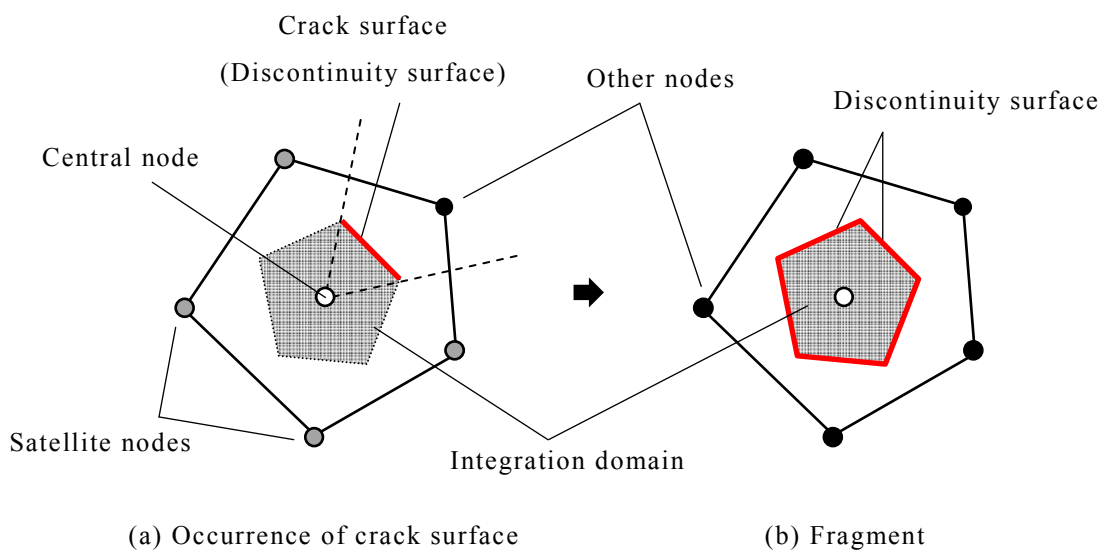


Fig.3.5 Relationship between central node and satellite nodes after cracked

$$\mathbf{u}_i^{\text{mod}} = r \mathbf{u}_i \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i^{\text{mod}} = r \boldsymbol{\sigma}_i \quad (3.10)$$

ここで、 \mathbf{u}_i 、 $\boldsymbol{\sigma}_i$ は各節点における変位ならびに応力、 $\mathbf{u}_i^{\text{mod}}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_i^{\text{mod}}$ は各節点の修正変位ならびに修正応力である。以上の操作を解析対象全体のひずみエネルギーが低減するまで繰り返すことで粒子界面にて定義された亀裂が進展することになる。本手法では、静弾性解析を繰り返し実施することになることから、解析が不安定になる可能性は低く、ロバストな亀裂進展解析が期待できる。

3.3.2 亀裂発生後における節点剛性の評価方法：C-MultiMLSMの導入

Fig.3.5に示しているように、亀裂が生じた状態において、中心節点と衛星節点が亀裂面を介して関連付くことはない（すなわち、不連続面が存在する）。しかしながら、EFMMにおける変位は局所パッチ上で連続であるから、EFMMでは粒子界面における亀裂を評価することができない。そこで本章では、亀裂発生箇所と判断された粒子界面を有する節点に関しては、付帯条件付き多次元型移動最小自乗法（C-MultiMLSM：Multi-dimensional Moving Least Squares Method with Constraint condition）^{3,14)}により定義される変位場を用いて解析を行うことにした。以下にC-MultiMLSMに基づいた節点剛性の算定方法を示す。

(a) C-MultiMLSMにおける誤差評価^{3,14)}

Fig.3.6に、移動最小自乗法（MLSM：Moving Least Squares Method）と付帯条件付き多次元型移動最小自乗法（C-MultiMLSM：Multi-dimensional Moving Least Squares Method with Constraint condition）の概念図を示す。同図に示すように、C-MultiMLSMは、Lancaster & Salkauskas^{3,38)}によって開発された、1次元の誤差空間（Fig.3.6(a)を参照）におけるMLSMを、多次元の誤差空間における近似法に拡張し、さらに回転やひずみ等の物理量が節点の変位関数の自由度として定義付けることができるような付帯条件を付与した手法である。ここで付帯条件とは、内挿された変位の値をその点に離散化された変位の値に拘束するという拘束条件を意味する^{3,39)}。すなわち、評価点*i*で定義されている関数 $f(x,y)$ においては次式を満足することを意味する。

$$f(x_i, y_i) = f_i \quad (3.11)$$

ここで、 x_i 、 y_i は評価点の座標値である。式(3.11)は、 $x = x_i$ 、 $y = y_i$ のときに評価点*i*における値 f_i を必ず通過することを意味している。したがって、評価点において計算された関数の値と評価点における値に誤差が生じることはない。

つぎに、節点*i*にて設定された影響半径（任意の節点に影響を及ぼす円領域の半径：Fig.3.7を参照）内に存在する*n*個の近傍節点の物理量を利用して、節点*i*の物理量を補間する問題を考える。デカルト直交座標系 (x, y) で定義された*l*個の物理量 $f_1(x,y)$ 、 $f_2(x,y)$ 、 \dots 、 $f_l(x,y)$ が、*m*個のパラメータ α_1 、 α_2 、 \dots 、 α_m を介して関連付け

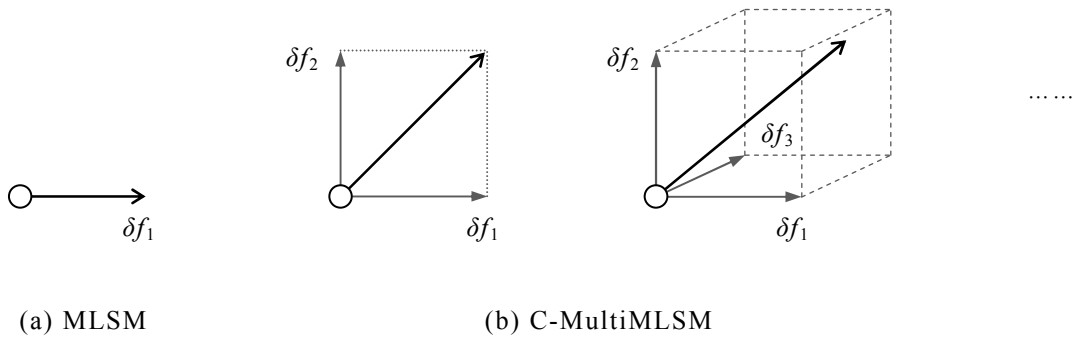


Fig.3.6 Illustration of MLSM and C-MultiMLSM

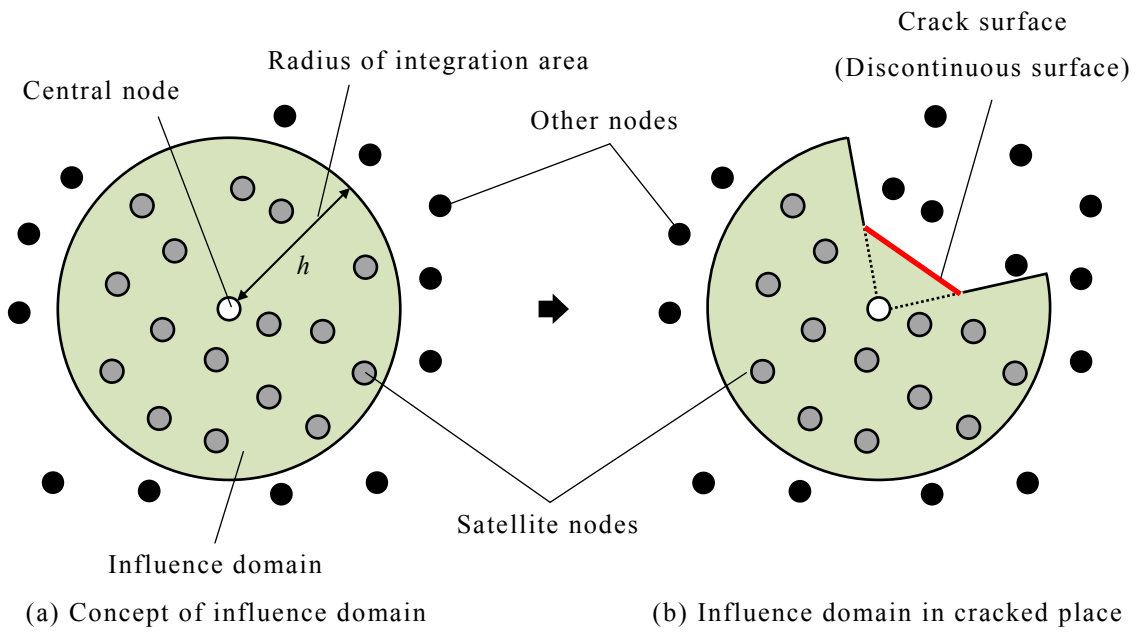


Fig.3.7 Illustration of displacement field based on C-MultiMLSM

られているとする。このとき、節点 i の関数値と計算値の間に生じる残差の平方和は、重み係数を考慮すると次式で定義される。

$$J_i = \sum_{j=1}^n \left(W(r_{ij}, h) \sum_{k=1}^l (f_k^h(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j; \alpha_1, \dots, \alpha_m) - f_k)^2 \right) \quad (3.12)$$

$$(\because \tilde{x}_j = x - x_j, \quad \tilde{y}_j = y - y_j)$$

ここで、 J_i は残差の平方和、 $W(r_{ij}, h)$ は重み関数、 r_{ij} は節点 i と節点 j の距離、 h は影響半径（任意の節点に影響を及ぼす一定領域の半径、Fig.3.7(a)を参照）である。なお重み関数は、影響領域の範囲外でゼロとなるような関数であり、2章同様（式(2.11)を参照）に、本章においても次式で表される4次のスプライン関数^{3,40)}を用いた。

$$W(r_{ij}, h) = \begin{cases} \frac{5}{\pi h^2} \left[1 - 6 \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^2 + 8 \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^3 - 3 \left(\frac{r_{ij}}{h} \right)^4 \right] & (0 \leq r_{ij} \leq h) \\ 0 & (h < r_{ij}) \end{cases} \quad (3.13)$$

(b) C-MultiMLSM に基づく節点の変位場

ここでは、式(3.12)で示した評価関数を用いて、近傍粒子の変位で評価節点 i の変位場を離散化することを考える。並進方向変位に関して、任意の点 (x, y) に位置する節点 i 周りにて、2次の項までテイラー展開すると、次式が得られる。

$$u = u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i \tilde{x}_i + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i \tilde{y}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_i \tilde{y}_i^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i \quad (3.14a)$$

$$v = v_i + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i \tilde{x}_i + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_i \tilde{y}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_i \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_i \tilde{y}_i^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big|_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i \quad (3.14b)$$

また、ひずみおよび回転は、弾性理論（微小変形理論）によって次式のように定義される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.15a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.15b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.15c)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (15d)$$

ここで、 ε_x は x 方向のひずみ、 ε_y は y 方向のひずみ、 γ_{xy} はせん断ひずみ、 θ は回転である。したがって、式(3.14)に式(3.15)の関係式を適用すると、節点 i まわりの変位(u, v)は次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \mathbf{F}_2^u(x, y) \mathbf{D}^u \quad (3.16)$$

ここで、

$$\mathbf{F}_2^u(x, y) = \begin{bmatrix} -\tilde{y}_i & \tilde{x}_i & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 & \tilde{x}_i\tilde{y}_i & -\frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 \\ \tilde{x}_i & 0 & \tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i & 0 & -\frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 & \frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{D}^u = (\theta_i \quad \varepsilon_{ix} \quad \varepsilon_{iy} \quad \gamma_{ixy} \quad \varepsilon_{ix,x} \quad \varepsilon_{ix,y} \quad \varepsilon_{iy,x} \quad \varepsilon_{iy,y} \quad \gamma_{ixy,x} \quad \gamma_{ixy,y})^T \quad (3.17b)$$

である。式(3.16)および式(3.17)において、 u_i および v_i は中心節点 i の並進方向変位、 θ_i は中心節点 i の回転、 ε_{ix} 、 ε_{iy} 、 ε_{ixy} は中心節点 i のひずみ、 $\varepsilon_{ix,x}$ 、 $\varepsilon_{ix,y}$ 、 $\varepsilon_{iy,x}$ 、 $\varepsilon_{iy,y}$ 、 $\gamma_{ixy,x}$ 、 $\gamma_{ixy,y}$ は中心節点 i のひずみの微分量であり、“ x ”は x 方向微分、“ y ”は y 方向微分を意味している。本論文では、ひずみの空間微分量、すなわち $\varepsilon_{ix,x}$ 、 $\varepsilon_{ix,y}$ 、 $\varepsilon_{iy,x}$ 、 $\varepsilon_{iy,y}$ 、 $\gamma_{ixy,x}$ 、 $\gamma_{ixy,y}$ を曲率自由度と定義する。この項を考慮することで曲げが卓越する問題や比較的複雑な応力場を持つような問題に対して高精度な解が期待できる。なお、変位(u, v)に対して、回転およびひずみのみを考慮(1次のテイラー展開)した場合、式(3.17)は次式のようになる。

$$\mathbf{F}_1^u(x, y) = \begin{bmatrix} -\tilde{y}_i & \tilde{x}_i & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i \\ \tilde{x}_i & 0 & \tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i \end{bmatrix} \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{D}^u = (\theta_i \quad \varepsilon_{ix} \quad \varepsilon_{iy} \quad \gamma_{ixy})^T \quad (3.18b)$$

次に、式(3.16)にて定義した節点の変位場を C-MultiMLSM に適用する。式(3.16)および式(3.17)を式(3.12)に適用すると、節点 i の評価関数 J_i は次式となる。

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_{j=1}^n W(r_{ij}, h) \left[\left(\tilde{u}_{ji} + \tilde{y}_{ji}\theta_i - \tilde{x}_{ji}\varepsilon_{ix} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}\gamma_{ixy} - \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}^2\varepsilon_{ix,x} - \tilde{x}_{ji}\tilde{y}_{ji}\varepsilon_{ix,y} + \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}^2\varepsilon_{iy,x} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}^2\gamma_{ixy,y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{v}_{ji} - \tilde{x}_{ji}\theta_i - \tilde{y}_{ji}\varepsilon_{iy} - \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}\gamma_{ixy} + \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}^2\varepsilon_{ix,y} - \tilde{x}_{ji}\tilde{y}_{ji}\varepsilon_{iy,x} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}^2\varepsilon_{iy,y} - \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}^2\gamma_{ixy,x} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n W(r_{ij}, h) (J_u^2 + J_v^2) \\ &\quad (\because \tilde{u}_{ji} = u_j - u_i, \quad \tilde{v}_{ji} = v_j - v_i, \quad \tilde{x}_{ji} = x_j - x_i, \quad \tilde{y}_{ji} = y_j - y_i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで、 n は近傍粒子数である。式(3.19)の評価関数が最小となるためには、次式を満足する必要がある。

$$\frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{D}^u} = 0 \quad (3.20)$$

式(3.20)を係数ベクトル \mathbf{D}^u でまとめると次のマトリックス方程式が得られる。

$$\mathbf{A}_2^u(x, y) \mathbf{D}^u = \mathbf{b}^u \quad (3.21)$$

ここで、式(3.21)の $\mathbf{A}_2^u(x, y)$ (10×10 のマトリックス) や ベクトル \mathbf{b}^u は式(3.20)をマトリックス形にまとめることで陽な形で得ることができる。ここで、式(3.21)のベクトル \mathbf{b}^u は次式に示すようにマトリックス分解することができる。

$$\mathbf{b}^u = \mathbf{C}^u \cdot \mathbf{u}_j \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{u}_j = (u_i \quad v_i \quad u_1 \quad v_1 \quad \cdots \quad u_{n-1} \quad v_{n-1})^T \quad (3.22b)$$

ここで、マトリックス \mathbf{C}^u はベクトル \mathbf{b}^u に含まれている係数をマトリックス形式に展開したものである。 \mathbf{u}_j は任意の評価節点 i および近傍節点の自由度 (u_j, v_j) である。

式(3.21)および(3.22)より、評価節点 i の変位場 $\mathbf{u}_{\text{C-MultiMLSM}}(u, v)$ は、近傍節点の変位で離散化することができる。すなわち、式(3.16)の節点 i の変位関数は次式のよりに表すことができる。

$$\mathbf{u}_{\text{C-MultiMLSM}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_j \quad (3.23)$$

ただし、

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{F}_2^u(x, y) (\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1} \mathbf{C}^u \quad (3.24)$$

である。ここで、 $\mathbf{u}_{\text{C-MultiMLSM}}$ は C-MultiMLSM に基づいて定式化した変位場であり、式(3.2)の変位場とは異なる。また \mathbf{N} も同様に、C-MultiMLSM に基づいて定式化した変位関数であるため、式(3.2)の形状関数とは異なるものである。なお、中心節点 i の変位場として式(3.18a)の $\mathbf{F}_1^u(x, y)$ を適用した場合におけるマトリックス \mathbf{N} の導出方法も上記と同様であり、この場合のマトリックス $\mathbf{A}_1^u(x, y)$ のサイズは、 4×4 となる。

(c) C-MultiMLSM に基づいた節点剛性マトリックス

ここでは、式(3.23)で表わされる評価節点の変位場を利用して、評価節点における剛性マトリックスを導出する。式(3.24)の空間微分を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \mathbf{F}_2^u(x, y)}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1} \cdot \mathbf{C}^u + \mathbf{F}_2^u(x, y) \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{C}^u \\ &+ \mathbf{F}_2^u(x, y) \cdot (\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}^u}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。ここで、 $(\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1}$ の空間微分は、 $\mathbf{A}_2^u(x, y) \cdot (\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1} = \mathbf{I}$ であることに注意して、以下のように求めることができる^{3.40)}。

$$\frac{\partial(\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1}}{\partial \mathbf{x}} = -(\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1} \frac{\partial(\mathbf{A}_2^u(x, y))}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}_2^u(x, y))^{-1} \quad (3.26)$$

したがって、式(3.25)および式(3.26)を利用することで、有限要素法のひずみ - 変位マトリックスに相当するマトリックスを $\mathbf{B}_{\text{C-MultiMLS}}^{\text{MLSM}}$ 導出することが可能となる。よって、節点 i の剛性マトリックスは、仮想仕事の原理により、有限要素法と同様な形式で次式のように求めることができる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{K}_{\text{C-MultiMLS}}^{\text{MLSM}} \mathbf{u}_{\text{C-MultiMLS}}^{\text{MLSM}} \quad (3.27)$$

ただし、

$$\mathbf{K}_{\text{C-MultiMLS}}^{\text{MLSM}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\text{C-MultiMLS}}^{\text{MLSM}T} \mathbf{D} \mathbf{B}_{\text{C-MultiMLS}}^{\text{MLSM}} d\Omega \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.29)$$

である。ここで、 Ω は Fig.3.3 に示す積分領域の体積である。よって、本手法は弾性領域においては変位場を要素で、応力場を要素の集合体で定義し、亀裂発生箇所に関しては、EFMM の応力場は排除し、変位場を要素から影響半径内の領域（影響領域：Fig.3.7 を参照）を変位場とし定義することで不連続面を考慮した解析を行うことになる。以上より、亀裂界面を有する中心節点の剛性は式(3.28)で評価し、それ以外の剛性は式(3.6)で評価することで、粒子界面に沿った亀裂の進展を扱うことが可能となる。

(d) 影響領域の動的設定

亀裂界面が存在する粒子における節点剛性は、式(3.28)で求めることができるが、亀裂界面の増加にともない、影響領域内に関連する節点が少なくなり、最終的に関連する節点が全く存在しない場合が想定される。このような事態が生じると、式(3.24)の $\mathbf{A}_2^u(x, y)$ の逆行列が存在せず、解析が破たんする。

そこで本章では、このような事態を避けるために、式(3.17a)の変位関数の次数を、領域内の節点数に合わせて低下させることにした。具体的には、任意の節点周りの衛星節点数が 10 以上の場合（Fig.3.7(b)を参照）は、二次の変位関数（式(3.17a)）を用い、10 未満かつ 4 以上の場合是一次の変位関数（式(3.18a)）、4 未満かつ 1 以上の場合回転項のみ（式(3.17a)における回転項にあたる成分のみ）、そして任意の節点に関連する節点がなくなった場合、つまり、中心節点の周りの粒子界面全てが亀裂になった場合（Fig.3.5(b)を参照）は、式(3.17a)のすべての成分をゼロとし、中心節点の変位場を式(3.23)の右辺第一項のみに変更する。したがって、この粒子は破片領域（他の構造に影響を与えない領域）として定義される。本手法は、個別要素法（DEM）や不連続変形法（DDA）等の動的つり合い式を用いた不連続解析手法ではないため、破壊により連続体がいくつかの塊に分離するといった現象を表現することはできないが、破片を表現することは可能である。本手法により、粒状構造を有する脆性材料において、その弾性状態から破壊に至る過程をロバストに解析することが可能となる。

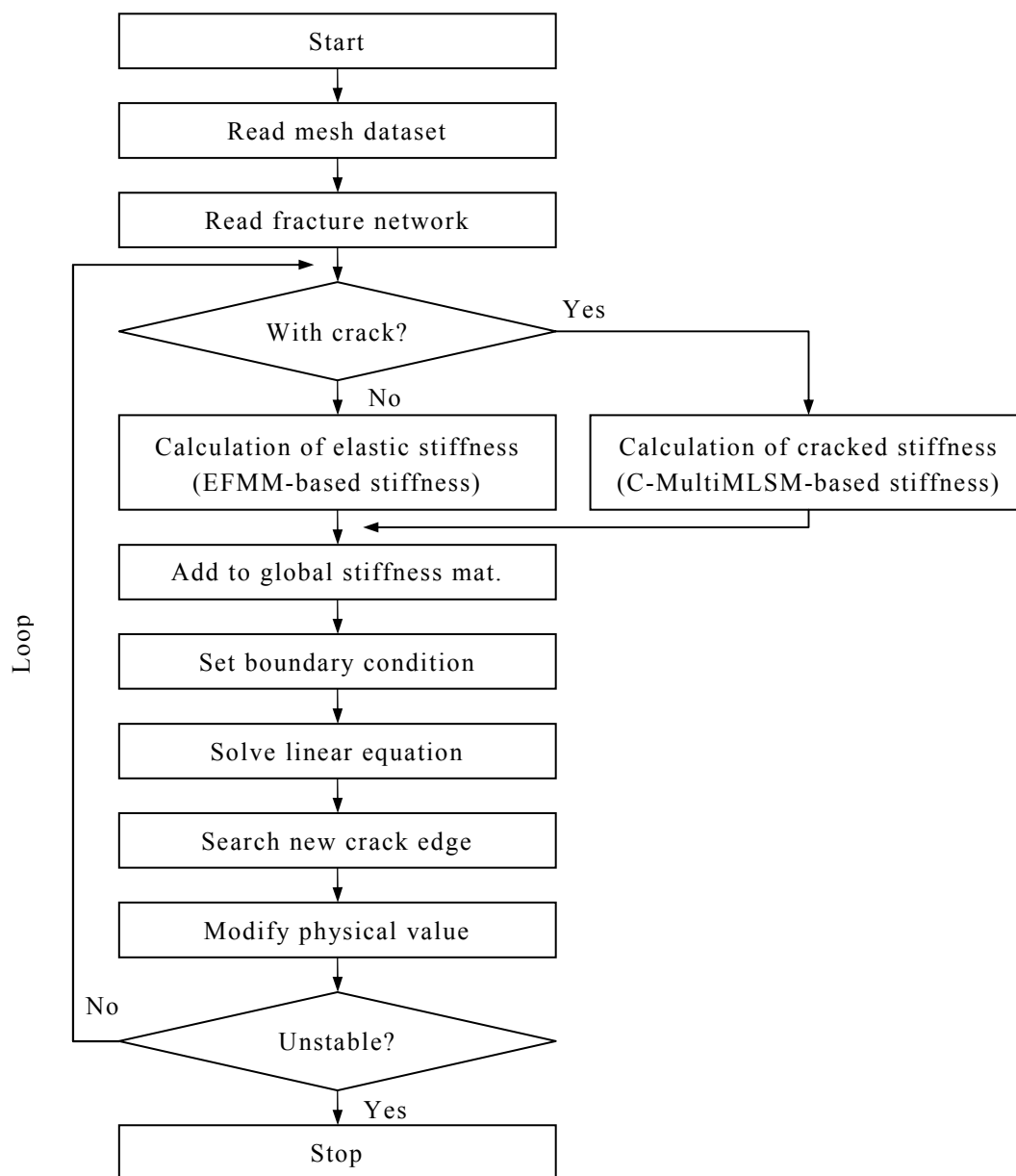


Fig.3.8 Flow-chart of the proposed approach

本手法の計算フローチャートを Fig.3.8 に示す。なお、本数値解析に用いた計算機の性能は、メモリが 2Gbytes, コンパイラは gcc version 4.5, CPU は Intel® Core™ i7-960, OS は Fedora release 14 (Laughlin)である。また、第 3.5 章以下に示す亀裂進展解析は、この計算機を用いて数時間程度の計算時間であったことを明記しておく。

3.4. 静弾性問題における EFMM の精度

本章では、EFMM の弾性問題における理論解に対する計算精度の検証を行う。特に、Fig.3.3 に示す積分領域をランダムに変化させた場合における解の精度について議論する。なお、本章では、得られる解の数値のみに着目して議論を進めるため、単位については特に指定しない。

3.4.1 片持ち梁における精度評価

本章では、弾性状態にある箇所では EFMM が用いられる。また、亀裂が存在しない箇所においても EFMM の近似解を用いる。そこで、ここでは EFMM の弾性状態における精度を検証するために、Fig.3.9 に示す片持ち梁 ($L = 8.0, d = 2.0, t = 1.0$) の自由端に放物線状の荷重 ($P = 1.0$) が作用する静弾性問題^{3.41)}を対象とし、次式に示す変位誤差ノルム $\|E\|_u$ とエネルギー誤差ノルム $\|E\|_e$ の収束性について検証する。なお、本論文においては、Timoshenko の解^{3.41), 3.42)}を厳密解として扱うことにする。

$$\|E\|_u = \sqrt{\int_{\Omega} (\mathbf{u}^{\text{Numerical}} - \mathbf{u}^{\text{exact}})^T (\mathbf{u}^{\text{Numerical}} - \mathbf{u}^{\text{exact}}) d\Omega} \quad (3.30a)$$

$$\|E\|_e = \sqrt{\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Numerical}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{exact}})^T (\boldsymbol{\sigma}^{\text{Numerical}} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{exact}}) d\Omega} \quad (3.30b)$$

である。ここで、 $\mathbf{u}^{\text{Numerical}}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{Numerical}}$ 、および $\boldsymbol{\sigma}^{\text{Numerical}}$ はそれぞれ変位、ひずみおよび応力の数値解析解であり、 $\mathbf{u}^{\text{exact}}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{exact}}$ 、および $\boldsymbol{\sigma}^{\text{exact}}$ はそれぞれひずみおよび応力の厳密解である。変位および応力の厳密解は次式で表わされる。

$$u^{\text{exact}}(x, y) = -\frac{Py}{6EI} \left((6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{d^2}{4} \right) \right) \quad (3.31a)$$

$$v^{\text{exact}}(x, y) = \frac{P}{6EI} \left(3\nu y^2 (L - x) + \frac{d^2 x}{4} (4 + 5\nu) + (3L - x)x^2 \right) \quad (3.31b)$$

$$\sigma_x^{\text{exact}}(x, y) = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (3.31c)$$

$$\sigma_y^{\text{exact}}(x, y) = 0 \quad (3.31d)$$

$$\tau_{xy}^{\text{exact}}(x, y) = \frac{P}{2I} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \quad (3.31e)$$

ここで、 $I(=d^3/12)$ は断面二次モーメントである。また、ひずみの厳密解は、次式に示すように応力の厳密解に応力 - ひずみマトリックスの逆行列 \mathbf{D}^{-1} を乗じて算出した。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{exact}} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{\text{exact}} \quad (3.32)$$

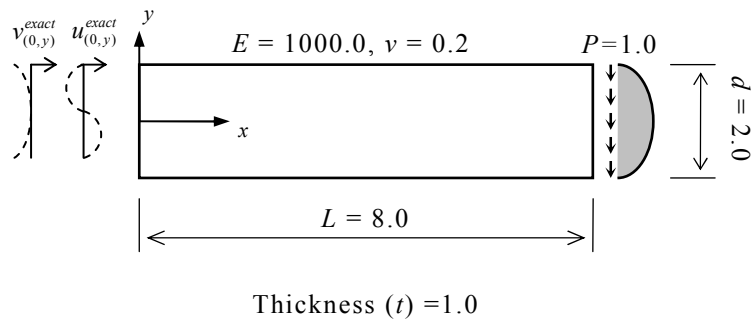


Fig.3.9 Timoshenko's cantilever beam (8.0×2.0)

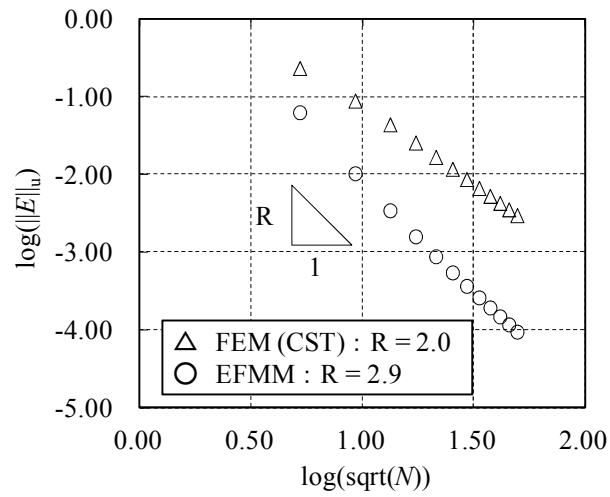


Fig.3.10 Distribution of the error norm in displacement (EFMM v.s. FEM(CST))

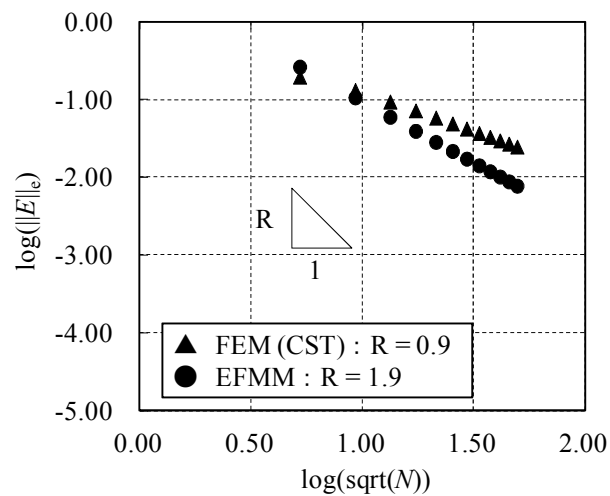


Fig.3.11 Distribution of the error norm in energy (EFMM v.s. FEM(CST))

固定端 (Fig.3.9 の左側) の境界条件は, Fig.3.9 に示しているように, 変位の厳密解を強制変位として与え^{3,42)}, ヤング率 E は 1000.0, ポアソン比 ν は 0.2 を仮定した (Fig.3.9 を参照)。また, この問題において, 8×2 , 16×4 , 24×6 , 32×8 , 40×10 , 48×12 , 56×14 , 64×16 , 72×18 , 80×20 , 88×22 , 96×24 の 12 パターンの要素分割モデルを用いた。なお, 本問題において積分を評価する際の積分領域は, 隣合う要素における要素の内接円の中心を結んでできる領域を積分領域とした。

Fig.3.10 および Fig.3.11 に, それぞれ, 節点数と変位誤差ノルムおよび節点数とエネルギー誤差ノルムの関係を示す。なお, 水平軸には節点数の平方根を対数化した値を示し, 鉛直軸にはそれぞれの誤差ノルムを対数化した値を示している。また, EFMM の比較対象として, 定ひずみ三角形要素を用いた有限要素法における解も同時に示した。なお, 以下に示す FEM とは定ひずみ三角形要素を用いた有限要素法のことである。

Fig.3.10 より, 変位誤差ノルムの値は, 8×2 の最も粗である要素分割モデルにおいて, EFMM では 6.20×10^{-2} , FEM では 2.29×10^{-1} となり, 96×24 の最も密である要素分割モデルにおいては, EFMM では 9.41×10^{-5} , FEM では 2.95×10^{-3} となり EFMM は FEM よりも要素分割によらず高い精度となった。また, 要素分割を細かくしていくことでその差が広がっていくことが分かった。さらに, 厳密解への収束率 R を比較すると, EFMM は $R=2.9$, FEM は $R=2.0$ となり, 収束率に関しても EFMM が FEM よりも高い結果となった。

つぎに, エネルギー誤差ノルムの EFMM と FEM の比較を行う。Fig.3.11 より, 要素分割が 8×2 において, EFMM は 2.61×10^{-1} , FEM は 1.94×10^{-1} となり, 96×24 において, EFMM は 7.70×10^{-3} , FEM は 2.45×10^{-2} となり, 要素分割が粗い場合においては FEM が, 要素分割が細かい場合においては EFMM の解の精度が高くなることが分かった。また, 厳密解への収束率 R の比較を行うと, EFMM は $R=1.9$, FEM は $R=0.9$ となり, これも変位誤差ノルムと同様に, EFMM が FEM よりも高い値となった。

以上より, EFMM は本例題に関しては, 定ひずみ三角形要素を用いた有限要素法よりも精度が高い手法であることが確認された。すなわち, 試験体の一部が弾性状態となっている場合, 亀裂が生じていない領域に関して高精度な解が期待できる。なお, より詳細な精度検証に関しては参考文献^{3,10)}を参照されたい。

3.4.2 積分領域の変形と精度の関係

前節では, 隣合う要素の内心点を結んでできる領域を積分領域とした。しかしながら, 岩石を構成する粒子の形状は多種多様である。したがって, Fig.3.12 に示すように, 様々な形の粒子が存在する可能性がある。そこで, 本節では積分領域の変形にともなう精度の変化に対する検証を行う。ここで, 積分領域の変形を 1 要素で検証した場合, EFMM の変位場は FEM と等価であるため, ここでは複数の要素を用いて検証を行った。3.2 章で示したように, EFMM における積分領域は隣合う要素における要素の内接円内の点 (以下, 内円点と呼ぶ) 同士を結ぶことで構築されている。この内円点は, 各要素にて定義された内接円の半径に乱雑度 q_{rand} ($0 \leq q_{\text{rand}}$

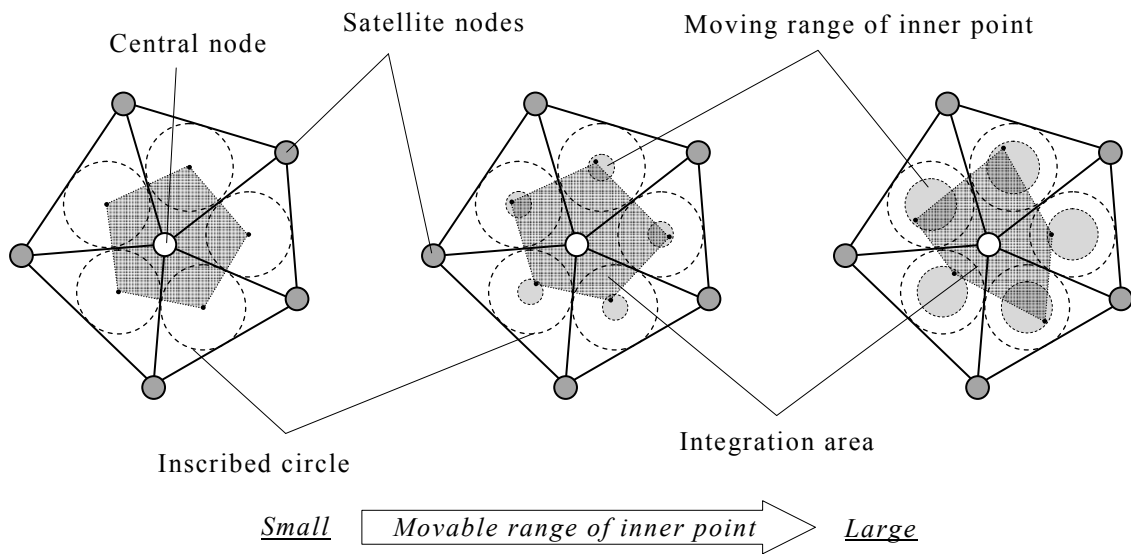


Fig.3.12 Distortion of integration domain

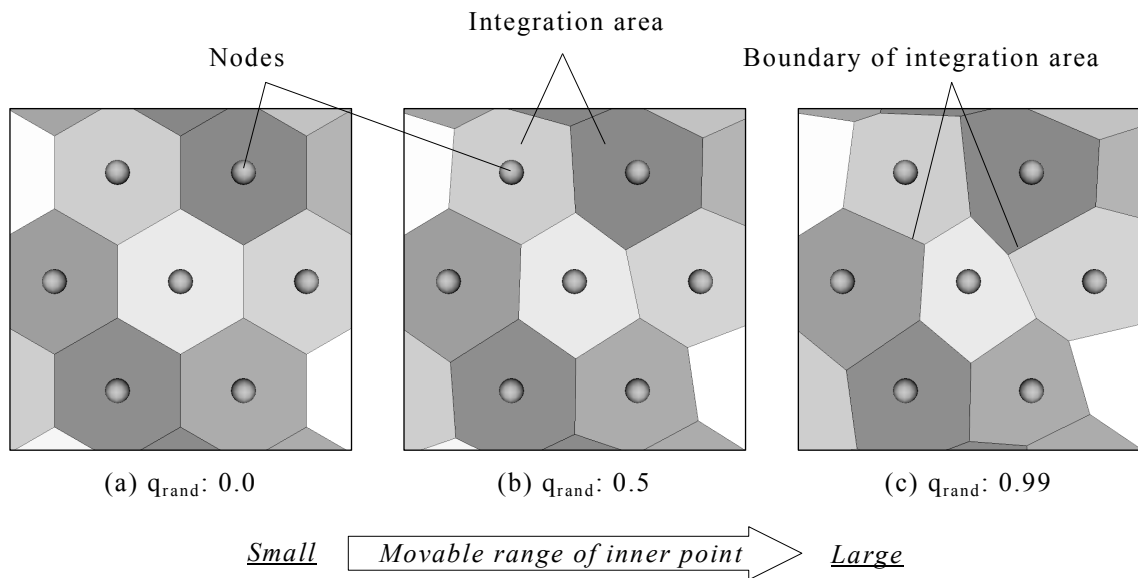


Fig.3.13 Integration domains with increasing q_{rand}

Table.3.1 Evaluation of the error norms with shape of integrate area

Model	$\ E\ _u$		$\ E\ _e$	
	平均	標準偏差	平均	標準偏差
8×2	5.96×10^{-2}	1.20×10^{-3}	2.58×10^{-1}	2.07×10^{-3}
16×4	1.03×10^{-2}	4.24×10^{-4}	1.04×10^{-1}	1.09×10^{-3}
24×6	3.70×10^{-3}	3.53×10^{-4}	5.90×10^{-2}	2.66×10^{-4}
32×8	1.73×10^{-3}	1.98×10^{-4}	3.87×10^{-2}	3.26×10^{-4}
40×10	9.98×10^{-4}	1.54×10^{-4}	2.79×10^{-2}	1.98×10^{-4}
48×12	6.31×10^{-4}	1.13×10^{-4}	2.14×10^{-2}	1.01×10^{-4}
56×14	4.37×10^{-4}	1.15×10^{-4}	1.71×10^{-2}	3.67×10^{-5}
64×16	3.25×10^{-4}	1.08×10^{-4}	1.41×10^{-2}	6.95×10^{-5}
72×18	2.45×10^{-4}	8.65×10^{-5}	1.18×10^{-2}	3.02×10^{-5}
80×20	1.90×10^{-4}	7.29×10^{-5}	1.00×10^{-2}	3.75×10^{-5}
88×22	1.62×10^{-4}	9.03×10^{-5}	8.84×10^{-3}	8.18×10^{-5}
96×24	1.34×10^{-4}	8.40×10^{-5}	7.70×10^{-3}	4.30×10^{-5}

≤ 1.0 : $q_{\text{rand}} = 1.0$ の時内接円の半径と等しい) で定義されるランダムな係数を乗じて定義される任意の半径内に設定される。すなわち, Fig.3.13 に示すように乱雑度 q_{rand} が大きいほどに積分領域は歪な形に設定されることになる。このような設定はランダムな形の亀裂面 (すなわち, ランダムに設定された粒子の界面形状) を自動的に生成することを意図している。

本節では, 上記で定義した乱雑度 q_{rand} を変化させることによって, EFMM で得られる解に変動がみられるかどうかを検討する。Table.3.1 に, 各要素分割モデルにおいて, q_{rand} を 0.1 刻みに 0.0~0.8 まで与え, 積分領域を変形させた時の誤差ノルムの平均値, 標準偏差を示す。同表より, 変位誤差ノルム, エネルギー誤差ノルムともに, 8×2 の最も粗である要素分割モデルにおける標準偏差は, 10^{-3} のオーダー程度であることから, 積分領域の変形が解析精度に及ぼす影響は少ないと考えられる。したがって, 積分領域の境界にて定義される粒子界面をランダムに設定しても問題はないと考えられた。なお, 本章における以下の例題では, q_{rand} を 0.1 に設定し解析を行った。

3.5. 離散亀裂進展解析手法の性能評価：亀裂進展経路に関する検討

ここでは、本論文で提案している離散亀裂進展解析手法の妥当性を検討するために、中央切欠きを有する梁の曲げ問題および複数の円孔を有する試験体の一軸圧縮問題における亀裂進展パターンに関する本手法の精度について議論する。

3.5.1 中央切欠きを有する梁の曲げ試験

Galvez *et al.*^{3,43)}は、Fig.3.14 に示すような中央切欠きを有する梁(スパン長:600mm, 梁せい:150mm, 梁の厚さ:50mm)の3点曲げ問題において生じた亀裂進展の様子について議論している。本節では、この実験において得られた亀裂進展の様子と本提案手法にて得られた解析結果とを比較することにする。解析では、境界条件として、梁中央部から75mmおよび300mm離れた箇所をそれぞれ垂直方向固定および完全固定とし、梁中央から150mm離れた箇所に外力を作用させた。また、材料特性として、ヤング率 E は38000(N/mm²), ポアソン比 ν は0.2, 引張強度 f_t は3.0(N/mm²)に設定した。

Fig.3.15 に解析モデルを示す。本解析における要素分割に関して、要素幅は解析領域全体に渡って一様に設定した。また、節点数は3643, 要素数は7016である。

Fig.3.16 に解析によって得られた亀裂進展の様子を示す。梁中央の切欠き先端に亀裂発生し、外力作用点方向に進展している様子が分かる。Galvez *et al.*の実験においても同様な結果が得られており、亀裂は梁上部の中央から30~40mmの範囲に到達する、との報告がなされている(同図(B)参照)。本解析における到達点は梁中央部から40mmの地点となり、亀裂は実験より得られた到達点の範囲内の結果となった。したがって、本手法は亀裂進展挙動を再現できる手法であることが分かった。

3.5.2 複数の円孔を有する試験体の一軸圧縮試験

ここでは、一軸圧縮を受ける円孔を有する試験体の亀裂進展挙動の検討を行う。試験体寸法は、Fig.3.17 に示すように、長さ200mm, 幅が100mm, 厚さが50mmの試験体であり、試験体内部には、直径の異なる複数の円孔を設けた(Fig.3.17中の括弧内の数字は、各円孔の中心座標である)。試験体の材料特性として、ヤング率 E は30000(N/mm²), ポアソン比 ν は0.25, 引張強度 f_t は2.4(N/mm²)と仮定した。また、解析は変位制御にて行った。Fig.3.18 に解析モデルを示す。なお、亀裂進展の箇所が不明確であるため、本モデルにおけるメッシュ幅は、前節と同様に、一様に設定し、円孔の数を1, 3および5の計3パターンの計算モデルにて解析を行った。それぞれのモデルにおける節点数は、7197, 6112および5521である。

Fig.3.19 に亀裂進展の様子を示す。一般的に、一軸圧縮を受ける円孔板(円孔の数は1つ)における亀裂は、円孔の上下端部に発生し、試験体の上下方向に直線的に進展していくことが知られている^{3,44)}。Fig.3.19(A)より、亀裂は、本解析においても円孔の上下端部に発生し、粒子界面の影響を受けながら試験体の上下面に向けて進展していく結果が得られた。円孔の数を増やした場合の亀裂進展挙動を、Fig.3.19(B)および(C)に示す。Fig.3.19(B)より、円孔の数が3つの場合、亀裂進展開

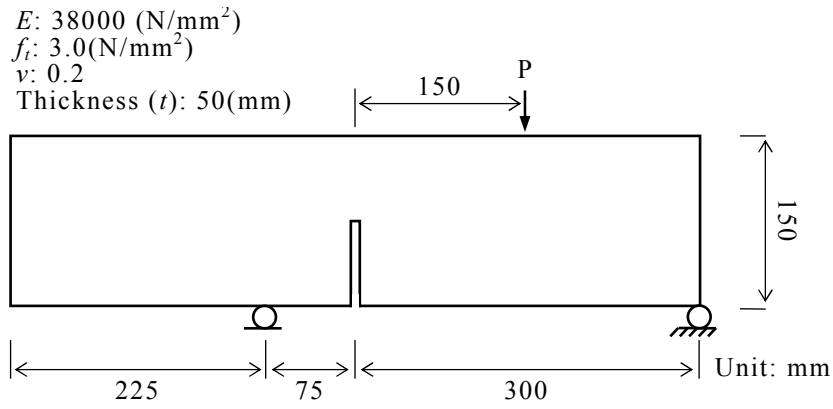


Fig.3.14 Boundary condition for 3-point bending test

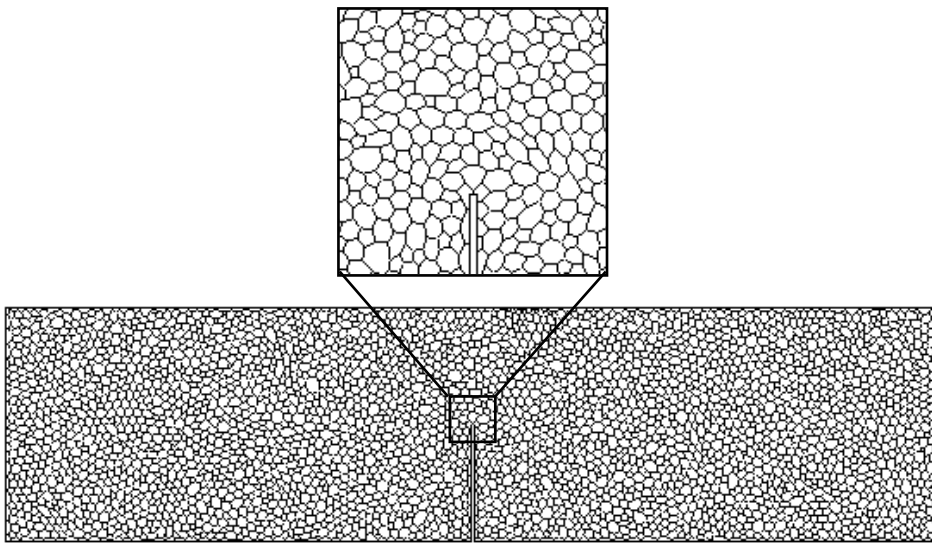


Fig.3.15 Analytical model for 3-point bending test

(#Element: 7016, #Node: 3643)

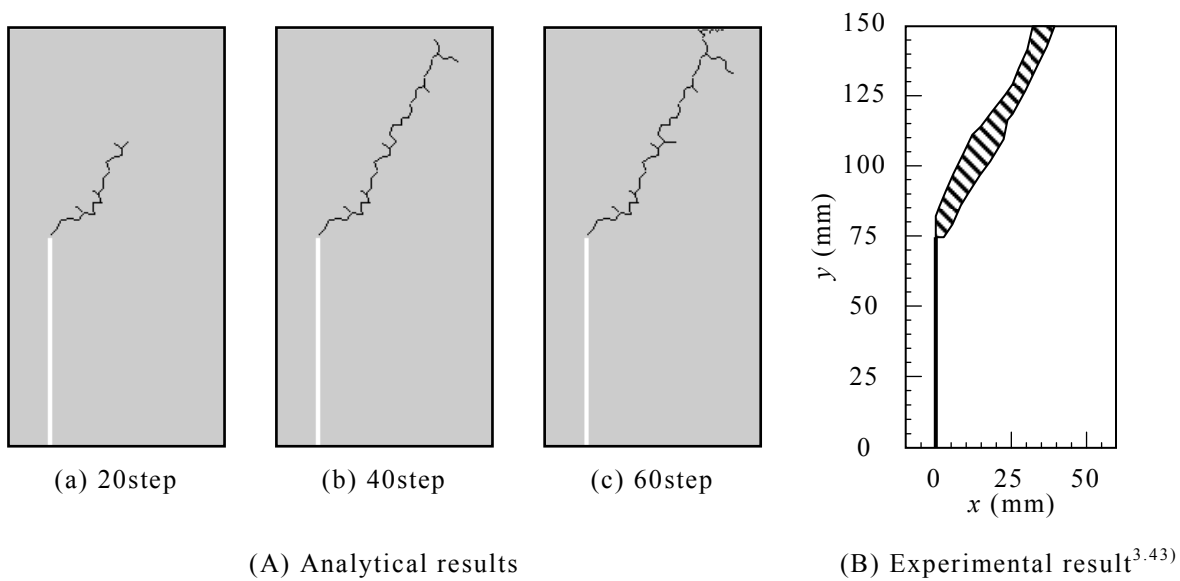


Fig.3.16 State of the crack propagation

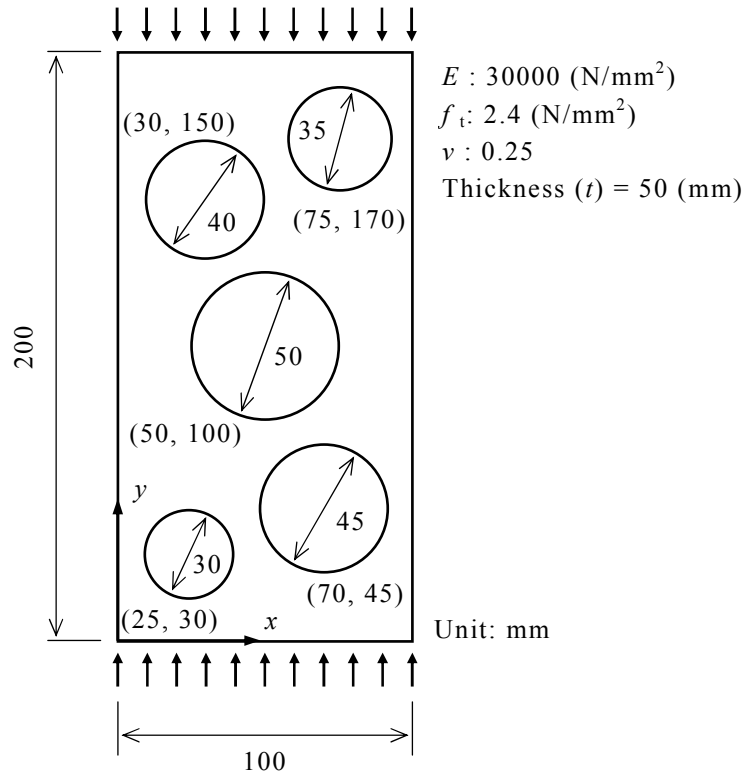


Fig.3.17 Uniaxial compression model with multi-holes

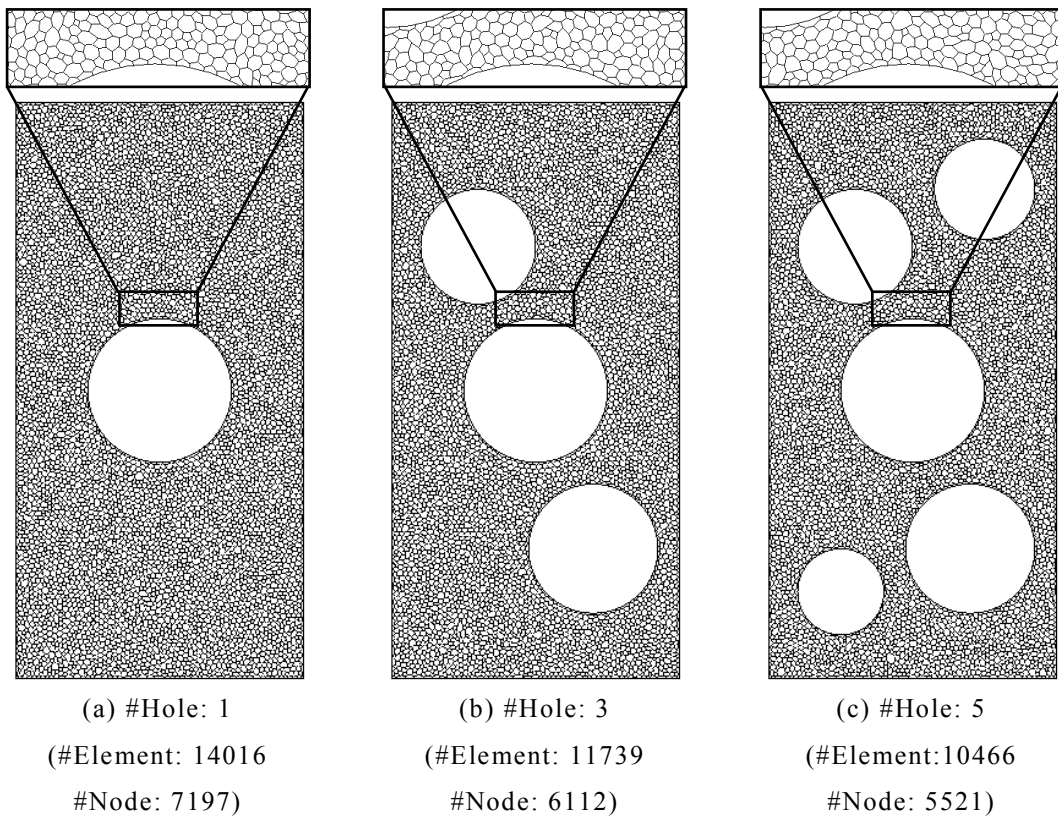
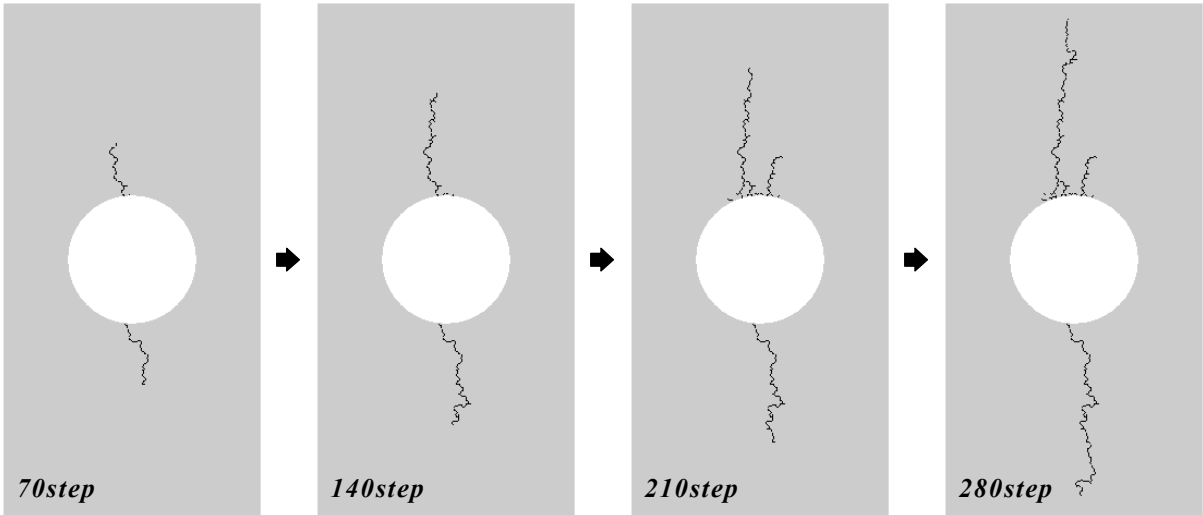
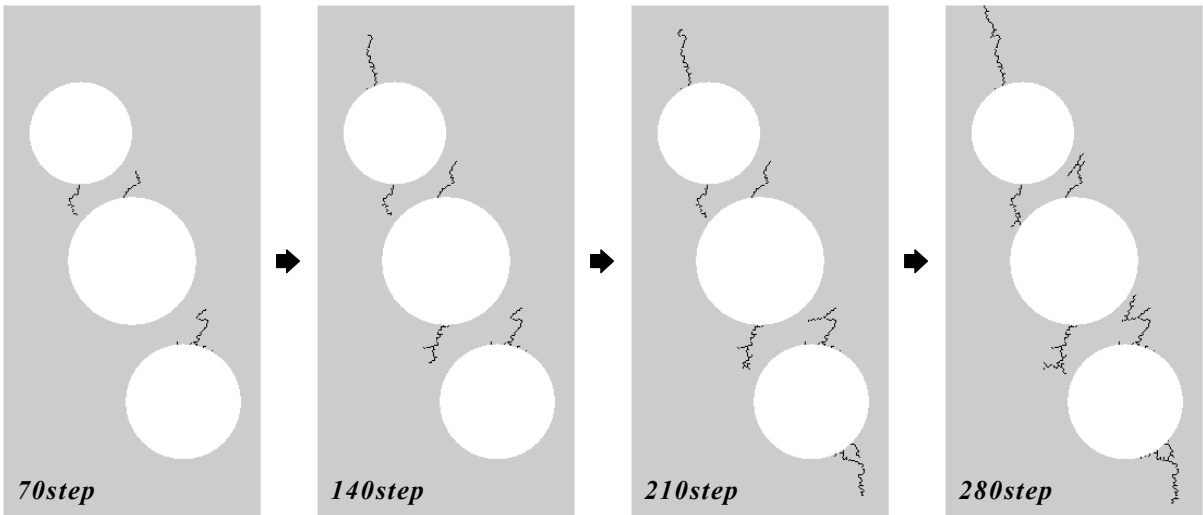


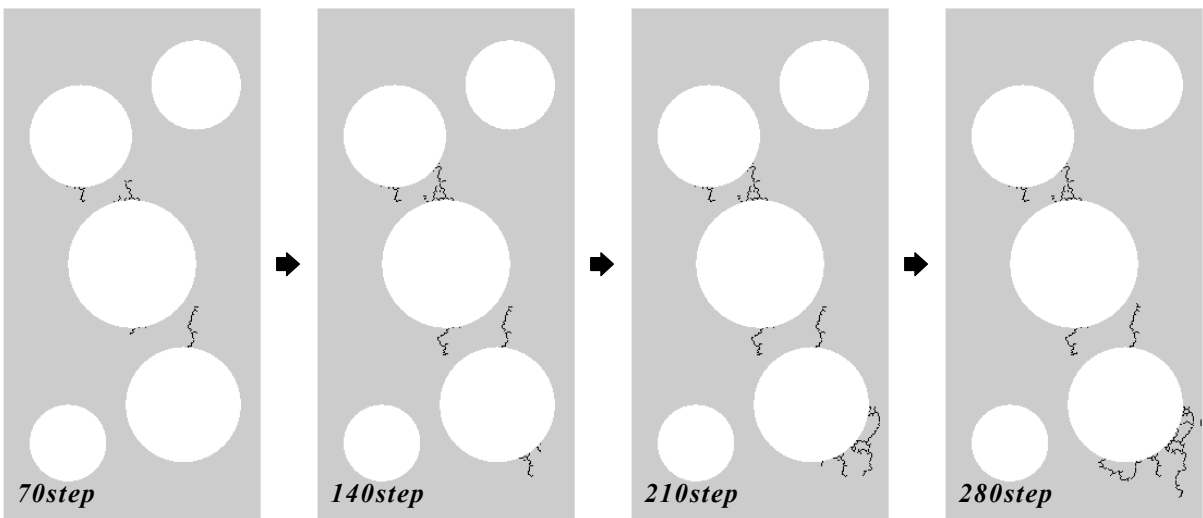
Fig.3.18 Analytical model for uniaxial compression model



(a) Number of holes: 1



(b) Number of holes: 3



(c) Number of holes: 5

Fig.3.19 State of the crack propagation for uniaxial compression test with multi-holes

始直後は各円孔の上下端部から試験体の上下面に向けて進展している様子が伺える。しかし、亀裂が進展するに伴い、各亀裂は隣接する円孔に流れるように進展し、円孔同士が連結する結果となった。また、Fig.3.19(C)に示すように、円孔の数を増やした場合も円孔数が3つの場合同様に、初期亀裂は直径の大きな円孔の上下端部において発生し、円孔同士が亀裂によって連結するような形となった。上記の結果は、筆者の予備解析（要素分割を粗くした場合あるいは細かくした場合）においても、亀裂の進展経路は粒子形状の違いによって若干異なるものの、進展方向は全て一致する結果が得られている。これは、Tang *et al.*^{3,44)}が行った解析結果とほぼ同様である。

3.6. 先在亀裂を含む試験体の破壊プロセス解析

Fig.3.1にも示したように、多くの岩石の中には無数の先在亀裂が存在している。これらの亀裂は大小様々であるが、亀裂の量や分布が要因となって大規模な破壊につながる可能性もある。3.3章で説明したように、本章で提案している離散亀裂進展解析手法では、粒子界面における界面亀裂を任意に設定することも可能である。したがって、解析を実行する前に、粒子界面における亀裂を先在亀裂としてランダムに設定しておくことで、試験体における先在亀裂の影響を疑似的に加味した亀裂進展解析を行うことができる。そこで本章では、本手法の応用例として、先在亀裂の分布の違いに伴う亀裂進展挙動の変動について議論することにする。

Fig.3.20に示すように、一辺が150mmの正方形板に2つの切欠きを設置されている問題^{3,45)}を扱う。材料特性については、ヤング率 E を $27.8(\text{N}/\text{mm}^2)$ 、ポアソン比 ν を0.2に仮定し、外力は変位制御によって作用させた。Fig.3.21にメッシュ分割モデルを示す。なお、本例題においては、試験体の空隙は考慮しないものとした。

Zhu and Tang^{3,45)}によると、本例題では、はじめ2つの切欠き先端部分に応力集中部が発生し、その後、1つの切欠き先端から亀裂が卓越する。実験では、この時点においてもう片方の切欠きからの進展は確認されず、最初に発生した亀裂が試験体の上下面に達した後に進展が開始することが分かっている。

Fig.3.22(A)に本手法で得られた、“先在亀裂「なし」(同図においては「Pre-existing cracks: 0%」と表記)”の場合の亀裂進展状況を示す。亀裂は、Zhu and Tang^{3,45)}の結果と同様に、片方の切欠き上下先端部分から亀裂が発生し、試験体の上下面方向に進展していることが分かる。そして、亀裂が試験体の上面に達した後、他方の切欠き部分の亀裂が進展している。一方、Fig.3.22(B)およびFig.3.22(C)は、先在亀裂は、それぞれ先在亀裂の分布が一樣になるように発生させた場合の結果である(乱数の発生はC言語の疑似乱数関数を利用)。なお、モデル内部に存在する粒子界面全体の4%がそれにあたるように設定している。同図の(B)と(C)における先在亀裂の位置は、一樣分布に従って決定しているため、先在亀裂の量は等しいが、先在亀裂の位置は異なっている。同図から明らかなように、“先在亀裂「なし」”の場合よりも多様な亀裂進展の様子が観察できる。Fig.3.22(B)においては、初期段階における亀裂進展挙動は“先在亀裂「なし」”の場合と同様に、片方の切欠き上下先端部分から亀裂が発生し、試験体の上下面方向に進展している。その後、他方の切欠きから亀裂が進展していくが、試験体中央においても亀裂が進展する結果となった。また、Fig.3.22(C)においては、片方の切欠きから亀裂が試験体の上面に進展すると同時に、他方の切欠きからも試験体の下面に向け亀裂が進展している。また、亀裂進展の終盤には剛体化した欠片のような部分も観察できる(Fig.3.22(C)の(c):左側切欠きの下部分)。このことから、試験体に存在する先在亀裂が、亀裂進展プロセスに与える影響は極めて大きいことが理解できる。

以上のように、試験体における先在亀裂は、その分布の違いだけでも様々な亀裂パターンを生み出し、岩石における多様な破壊形態の一要因となっていることが、

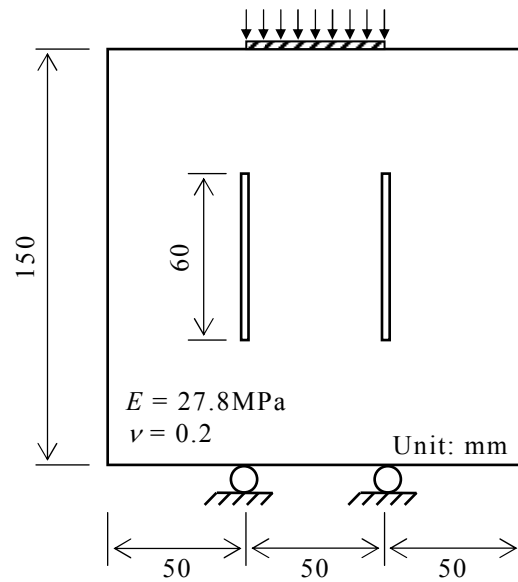
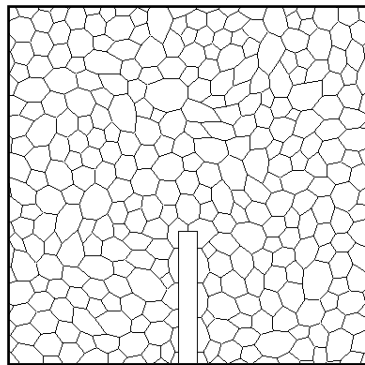
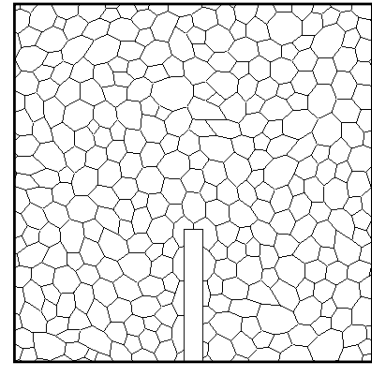


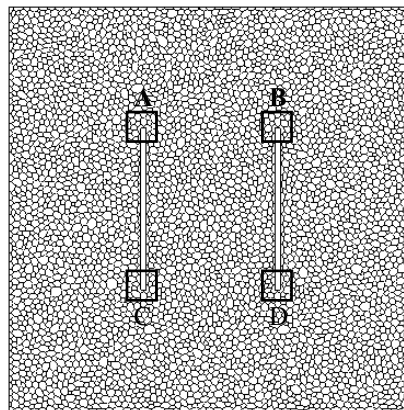
Fig.3.20 Analytical model for Double Center Notch



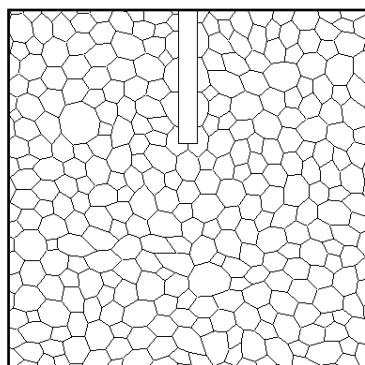
(b) Part of A



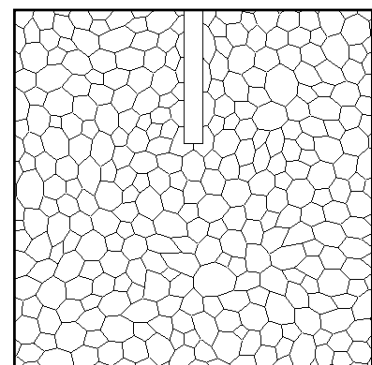
(c) Part of B



(a) Mesh division model

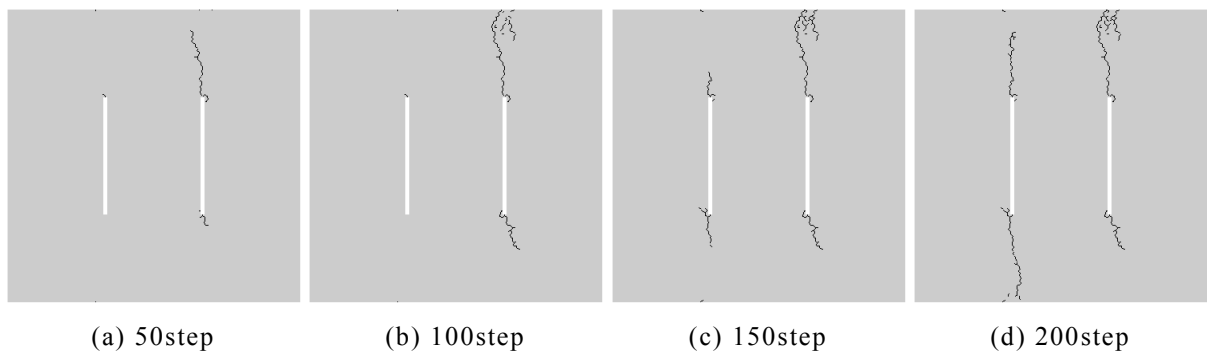


(d) Part of C



(e) Part of D

Fig.3.21 Mesh division model for DCN for proposed method



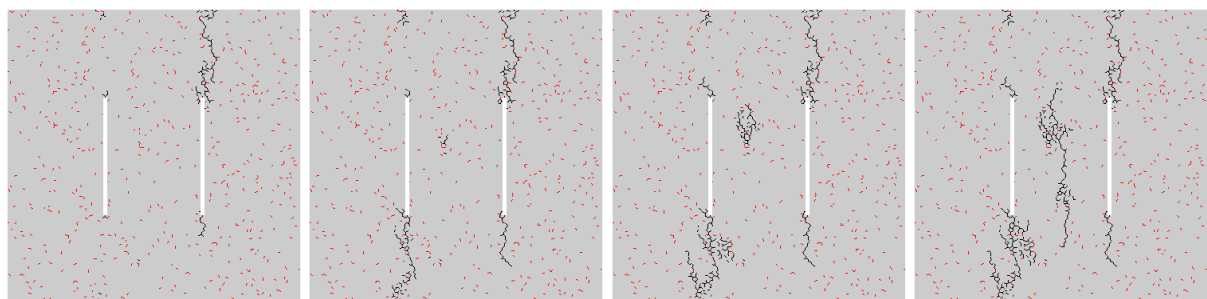
(a) 50step

(b) 100step

(c) 150step

(d) 200step

(A) Pre-existing cracks: 0%



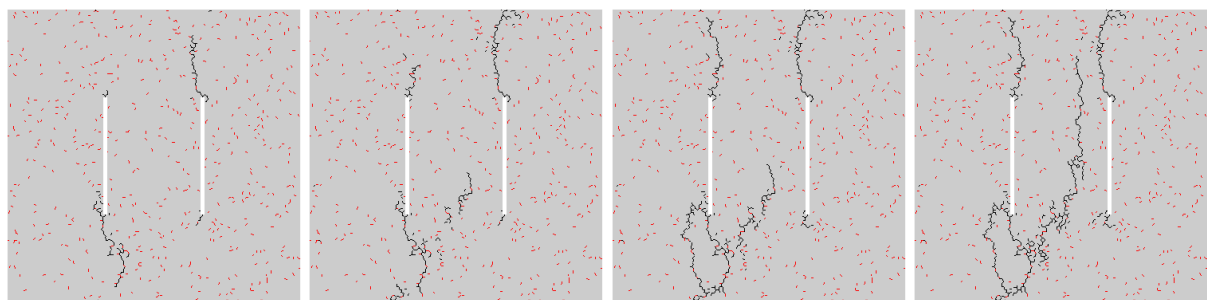
(a) 120step

(b) 240step

(c) 360step

(d) 480step

(B) Pre-existing cracks: 4% (Pattern: 1)



(a) 120step

(b) 240step

(c) 360step

(d) 480step

(C) Pre-existing cracks: 4% (Pattern: 2)

Fig.3.22 State of the crack propagation in Double Center Notch model

(Pre-existing crack 0% v.s. 4%)

数値シミュレーションの結果からも理解することが可能となった。したがって、本手法は、このような問題に対しても有効な手段のひとつになり得ると考えられる。

3.7. 結言

本章では、砕屑性の堆積岩を対象に、粒子を多角形にて近似し、岩石自体の亀裂は各粒子の界面で発生することを仮定とした節点ベースの離散亀裂進展解析法を提案した。本手法は、弾性状態においては、Enriched Free Mesh Method (EFMM)，亀裂を含んでいる場合には、付帯条件付き多次元移動最小自乗法(C-MultiMLS M: Multi-dimensional Moving Least Squares Method with Constraint condition)を用いることで、ロバストな解析を実現している。本章で得られた結果を以下に列記する。

1. EFMM と C-MultiMLS 法に基づいた、ロバストな離散亀裂進展解析法を定式化した。
2. EFMM の静弾性問題における精度は有限要素法（定ひずみ要素を用いた場合）よりもはるかに高く、積分領域の変形がその精度に及ぼす影響は極めて少ないことが示された。
3. 中央切欠きを有する試験体の曲げ試験の亀裂進展挙動に関して、本手法による結果は Galvez らの実験時における亀裂進展挙動とほぼ一致した。
4. 一軸圧縮を受ける円孔を有する試験体に関して、亀裂が円孔の上下端部から進展する様子を解析することができた。また、複数の円孔を有する場合には、亀裂は円孔同士を連結するように進展することが分かった。
5. 岩石等に先在する亀裂を考慮した解析を行い、亀裂進展パターンが先在亀裂に極めて依存していることが分かった。

本論文では、EFMM と C-MultiMLS 法を併用した亀裂進展解析手法を開発し、弾性状態における精度や亀裂進展パターンに関して検討した。しかしながら、本手法を岩盤崩壊解析などの実問題に適用するためには、3次元問題への拡張や大規模解析への展開が必要となる。特に、実形状を考慮した解析を行う際には、これらの事項は必須であることから、今後は、本手法の応用展開を積極的に進めていく必要がある。

参考文献

- 3.1) 山内豊聡：九州・沖縄の特殊土，九州大学出版会，pp.185-213，1983.
- 3.2) 新城俊也，中村一幸：琉球石灰岩の圧縮強度について，琉球大学農学部技術報告，No.22，pp.269-277，1975.
- 3.3) 宮城調勝，小宮康明：琉球石灰岩の有効空隙率と圧縮強度，琉球大学農学部学術報告，Vol.50，pp.131-135，2003.
- 3.4) 小倉哲也，青木久，前門晃，松倉公憲：琉球石灰岩の一軸圧縮強度に与える寸法効果と岩石物性の影響，応用地質，Vol.46，No.1，pp.2-8，2005.
- 3.5) Tokashiki, N. and Aydan, Ö.: The stability assessment of overhanging Ryukyu limestone cliffs with an emphasis on the evaluation of tensile strength of rock mass, 土木学会論文集 C, Vol.66, No.2, pp.397-406, 2010.
- 3.6) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: Finite Element Method (5th edition), Vol.1, 2000.
- 3.7) Belytschko, T., Krogauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, pp.3-47, 1996.
- 3.8) Li, S. and Liu, W. K.: Meshfree Particle Methods, *Springer*, 2007.
- 3.9) 越塚誠一：粒子法，培風館，2005.
- 3.10) Yagawa, G. and Matsubara, H.: Enriched Free Mesh Method: An Accuracy Improvement for Node-based FEM, *Computational Plasticity, Springer*, Vol.7, pp.207-219, 2007.
- 3.11) 松原仁，矢川元基：Patch by Patch 型混合法における基底関数の応用とその精度，応用力学論文集，Vol.10，pp.201-209，2007.
- 3.12) Matsubara, H. and Yagawa, G.: Convergence studies for Enriched Free Mesh Method and its application to fracture mechanics, *Interaction and Multiscale Mechanics: An International Journal*, Vol.2, No.3, pp.277-293, 2009.
- 3.13) Tian, R., Matsubara, H. and Yagawa, G.: Advanced 4-node tetrahedrons, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.68, pp.1209-1231, 2006.
- 3.14) 松原仁，入部綱清，伊良波繁雄：粒子法の微分精度に関する一考察および物理自由度を有する移動最小自乗法，土木学会論文集 A，Vol.66，No.4，pp.723-736，2010.
- 3.15) 小山倫史，赤尾悟史，西山哲，大西有三：岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法（DDA）の適用に関する研究，土木学会論文集 C，Vol.65，No.3，pp.644-662，2009.
- 3.16) Budiansky, B. and O'Connell, R. J.: Elastic module of a cracked solid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.12, No.2, pp.81-97, 1976.
- 3.17) Cleary, M. P. and Chen, I. Q.: Self-consistent techniques for heterogeneous media, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.106, No.5,

- pp.861-887, 1980.
- 3.18) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T.: Elastic compliance for rock-like materials with random cracks, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.4, pp.27-40, 1984.
 - 3.19) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics (IRSM)*, Vol.1, II-8, pp.129-136, 1971.
 - 3.20) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989.
 - 3.21) 川合忠彦：離散化極限解析法概論，培風館，1990.
 - 3.22) 鈴木隆次，浜島良吉：要素変形を考慮した不連続体解析による応力伝達，変形，破壊強度解析，土木学会論文集，No.547/III-36，pp.23-38，1996.
 - 3.23) Sukumar, N. and Prevost, J. H.: Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.40, pp.7513-7537, 2003.
 - 3.24) Dolbow, J., Moes, N. and Belytschko, T.: An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.6825-6846, 2001.
 - 3.25) Chen, C. S., Pan, E. and Amadei, B.: Fracture Mechanics Analysis of Cracked Discs of Anisotropic Rock Using the Boundary Element Method, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.35, pp.195-218, 1998.
 - 3.26) Van de Steen, B., Vervoort, A. and Napier, J. A. L.: Numerical modelling of fracture initiation and propagation in biaxial tests on rock samples, *International Journal of Fracture*, Vol.108, pp.165-191, 2001.
 - 3.27) Pan, P. Z., Feng, X. T. and Hudson, J. A.: Study of failure and scale effects in rocks under uniaxial compression using 3D cellular automata, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.46, pp.674-685, 2009.
 - 3.28) Feng, X. T., Pan, P. Z. and Zhou, H.: Simulation of the rock microfracturing process under uniaxial compression using an elasto-plastic cellular automaton, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.43, pp.1091-1108, 2006.
 - 3.29) Tang, C. A.: Numerical simulation of progressive rock failure and associated seismicity, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol.34, pp.249-261, 1997.
 - 3.30) Wong, T. E., Wong, R. H. C., Chau, K.T. and Tang, C. A.: Microcrack statistics, Weibull distribution and micromechanical modeling of compressive failure in rock, *Mechanics of Materials*, Vol.38, pp.664-681, 2006.
 - 3.31) Tang C. A., Lin P., Liu H. Y. and Liang Z. Z.: On failure modes and strength characterization of brittle disordered materials under uniaxial compression and tension, *Key Engineering Materials*, Vol.183-187, pp.637-642, 2000.

- 3.32) Chen, J. S., Yoon, S. and Wu, C. T.: Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.53, pp.2587-2615, 2002.
- 3.33) Zhou, J. X., J. Wen, B., Zhang, H. Y. and Zhang, L.: A nodal integration and post-processing technique based on Voronoi diagram for Galerkin meshless methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.192, pp.3831-3843, 2003.
- 3.34) 車谷麻緒, 寺田賢二郎: 複合材料の非線形解析のためのイメージベース節点有限要素法, 土木学会応用力学論文集, Vol.10, pp.91-100, 2007.
- 3.35) Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T.: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, Vol.10, pp.343-354, 1968.
- 3.36) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性 (コンピュータによる構造工学講座; II-2-A), 培風館, 1972.
- 3.37) Marcal, P. V. and King, I. P.: Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.9, pp.143-155, 1967.
- 3.38) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol.37, No.155, pp.141-158, 1981.
- 3.39) 野口裕久, 川島徹也: 付帯条件付き最小自乗法に基づくグリッドレス法の構造解析への適用, 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.391-394, 1997.
- 3.40) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 3.41) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, *McGraw-Hill*, 1970.
- 3.42) Augarde, C. E. and Deeks, A. J.: The use of Timoshenko's exact solution for a cantilever beam in adaptive analysis, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol.44, pp.595-601, 2008.
- 3.43) Galvez, J. C., Elices, M., Guinea, G. V. and Planas, J.: Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading, *International Journal of Fracture*, Vol.94, pp.267-284, 1998.
- 3.44) Tang, C.A., Wongc, R. H. C., Chauc, K. T. and Linb, P.: Modeling of compression-induced splitting failure in heterogeneous brittle porous solids, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.72, pp.597-615, 2005.
- 3.45) Zhu, W. C. and Tang, C. A.: Numerical simulation on shear fracture process of concrete using mesoscopic mechanical model, *Construction and Building Materials*, Vol.16, pp.453-463, 2002.

第4章 Material Point Method (MPM) における

エネルギー変動問題に対する抑制手法の提案とその検証

Development and Verification of Energy Suppression Scheme for the Material Point Method (MPM)

4.1. 緒言

土石流や地すべり等の斜面崩壊は、降雨等により地盤内に水が溜り弱面（すべり面）が形成され、抵抗力が弱くなり一気に滑り落ちる、マルチフィジックスな現象である。地盤の大変形、崩壊現象を精度よく評価することは、地盤内部の状態を高い精度で把握することが容易ではないことから、極めて困難な問題である。例えば、地すべりや土石流等の地盤の大変形問題の安定性を評価する場合、円弧・非円弧すべり法やニューマーク法等を用いてすべり面を計算により算定し、すべり面の上部に存在する移動層の密度などの材料特性等を考慮し安全率を加え評価されている^{4.1)}。しかしながら、この方法は極限平衡状態のみに着目しており、地盤等の変形については考慮されていない。そのため、必ずしも計算による算定通りのすべり面とは成らない場合がある^{4.2)}。また、材料特性が複雑な場合のすべり面の算定は極めて困難となる。

近年、地盤や岩盤の崩壊、変形、移動挙動等の物理特性を評価するための手法として、数値シミュレーション技術が積極的に適用されている。斜面崩壊等の大変形を考慮する手法には、ジョイント要素を用いた有限要素法（FEM）^{4.3)}、有限差分法（FDM）^{4.4), 4.5)}、個別要素法（DEM）^{4.6)}、不連続変形法（DDA）^{4.7) - 4.9)}などが挙げられる。しかしながら、有限要素法では、要素の大きな変形に伴って計算破綻や精度低下等の問題が生じる場合がある^{4.10), 4.11)}。また、地すべり現象における移動層（土塊）の分離現象を再現することは難しく、岩盤崩落等の岩塊が明確に分離する現象を安定的に解くことは極めて困難である。有限差分法に関しては、支配方程式である運動方程式を陽解法にて定式化することにより、安定した解析を行うことは可能であるが、解析対象の形状が複雑形状化するにつれモデル化が困難となるため、岩盤内の先在き裂や微細構造等の複雑形状を考慮することは難しい。個別要素法においては土粒子や岩盤ブロックを剛体と仮定しているため、ブロックの変形を考慮することができず、さらに、ブロック同士の接触に関して力学的に曖昧な定義が使われているため、土石流を含む流砂のような現象においては粒子間の衝突や回転、エネルギー保存等の問題があり、解の安定性が得られない場合がある^{4.12), 4.13)}。不連続変形法において、2次元問題に関してはある程度精度の良い結果が得られているものの、3次元問題においてはブロック同士の接触に関する定式化が極めて複雑であるため^{4.14) - 4.17)}、3次元問題への拡張の足かせとなっていると考えられる。さらに、大小様々なブロックを有する問題において、ブロック同士の貫入制御が難しく、ブロック同士の透過やブロックが飛び散るなど実現象では有り得ない挙動が得られる場合もある。以上のように、不連続岩盤の大変形問題を動的に解析するための数値シミュレーション手法は存在するが、未だ確立されていないのが現状である。

一方、計算手法の多様化に伴い、SPH法、MPS法やRKPM等の粒子法やメッシュフリー法等の要素を用いないメッシュレス法に関する研究が盛んに行われ^{4.18) - 4.27)}、その簡便さから様々な分野で用いられている。地盤の変形、破壊問題に対しても、例えば、液状化現象に対しては、地盤をビンガム流体とし扱ったSPH解析

4.28)や側方流動を考慮した EFGM 解析^{4.29)}などがある。また、MPS 法においても、構成則にモール・クーロンモデルやドラッカー・プラグーモデル等の弾塑性構成則を適用することで、地盤の大変形や崩壊現象の解析が行われている^{4.30) - 4.32)}。しかしながら、上記の手法は、連続体を粒子の集合体として表現するために、ディリクレ型境界条件の厳密な設定が難しいことが指摘されており^{4.33)}、地盤の自由表面における解析精度の低下が懸念されている。

以上のような状況下において、地盤解析分野においては、有限要素法等で用いられる Euler 型のアプローチと粒子法等で用いられる Lagrangian 型のアプローチを併用した手法である Material Point Method (MPM) と呼ばれる手法が注目されている^{4.34), 4.35)}。MPM は PIC (Particle In Cell) 法^{4.36)}を固体問題に適用した手法であり、連続体は Lagrange 粒子群にて表現し、支配方程式は粒子群の背面に設けられる Euler 格子にて解く手法である。本手法は、有限要素法をベースとしており、支配方程式を Euler 格子で解くことから、SPH 法や MPS 法とは異なり境界条件を設定する際に曖昧な定義が無く、ディリクレ型境界条件の設定も容易である。また、異なる連続体同士の接触に関しても定式化が行われており^{4.37), 4.38)}、力学的に曖昧な定義はなく、数値解析上安定的に解析することが可能な手法である。地盤解析分野以外においても、破壊力学問題、接触問題、衝突問題等の問題への適用が盛んに試みられており、その有用性が示されている^{4.39) - 4.44)}。しかしながら、MPM を用いた動弾性解析においても、時間増大に伴いエネルギーが増大または減衰するといったエネルギー変動に関する問題が指摘されている。勿論、この問題に対しては様々な抑制手法が提案されている^{4.45) - 4.48)}が、未だその解決には至っていないのが現状である。

そこで本章では、動弾性解析における MPM の解の変動特性を把握し、弾性エネルギーの変動に関する抑制手法を提案することを目的とする。また、MPM の比較対象として、Bardenhagen *et al.*^{4.47)}により提案された、MPM の高精度手法である Generalized Interpolation Material Point Method (以下 GIMP と記す) の解も同時に検証することとした。

4.2. MPM および GIMP の概要

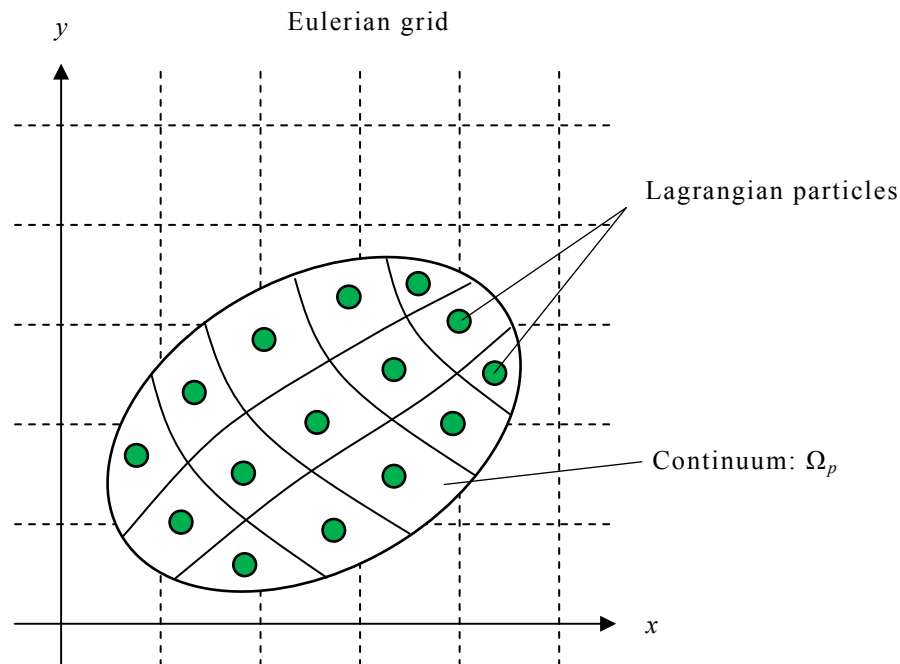


Fig.4.1 Illustration of Material Point Method (MPM)

前述したように、MPMはHarlowにより提案されたPIC (Particle-in-Cell) 法を固体力学に応用した手法であり、連続体をLagrange粒子 (Material Point) 群で離散化し、そして支配方程式の解は、粒子群の背面に設けられるEuler格子を用いて算出する手法である (Fig.4.1 参照)。そのため、要素のひずみの増加に伴い計算が不能になるといった問題は生じず、また有限要素法等で要求される高度なリメッシング技術の必要が無い手法である。したがって、地すべり問題のような大変形問題に適している手法であると考えられる。なお、時刻歴計算に関しては、一般的に陽解法が採用されている。以下にMPMおよびGIMPの概要を記す。

4.2.1 支配方程式および弱形式化

MPMおよびGIMPは、粒子が持つ物理量をEuler格子における節点の内挿関数を用いてEuler格子に集約させ、Euler格子にて運動方程式を解き、算出された物理量を再び内挿関数を用いて粒子に集約することで、連続体の変形、移動現象を表現する手法である。このとき、連続体における質量保存則および運動方程式は次式で表わされる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad (4.2)$$

ここで、 ρ : 密度、 \mathbf{v} : 速度、 \mathbf{a} : 加速度、 $\boldsymbol{\sigma}$: 応力、 \mathbf{b} : 体積力である。また、ひずみと速度およびひずみと応力は次式のように関連付けられる。

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$: ひずみ、 \mathbf{D} : 応力-ひずみマトリックスであり、上付き添え字 T は転置を意味する。次に、式(4.2)に任意ベクトル \mathbf{w} (境界上: S でゼロとなるベクトル) を乗じ、Gauss の発散定理を考慮し積分すると、次式のような弱形式化された支配方程式が得られる。

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} d\Omega = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_S \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS + \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (4.5)$$

ここで、 Ω : 連続体の領域、 $\boldsymbol{\tau}$: 境界上の応力である。

4.2.2 支配方程式の離散化

粒子の内挿関数 χ_p を次式にて定義する。

$$\sum \chi_p(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \quad (4.6)$$

ここで、 \mathbf{x} : 空間座標である。この粒子の内挿関数を用いると各粒子の体積 V_p , 質量 m_p , 密度 ρ_p は次式にて表される。

$$V_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.7)$$

$$m_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.8)$$

$$\rho_p = \frac{m_p}{V_p} \quad (4.9)$$

ここで、 Ω_p : 粒子の内挿関数が作用する領域である。また、粒子の運動量 \mathbf{p}_p , 応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$ は次式にて表される。

$$\mathbf{p}_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \int_{\Omega_p \cap \Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \frac{\chi_p(\mathbf{x})}{V_p} d\Omega \quad (4.11)$$

したがって式(4.6)より、連続体の質量、運動量は次式より得られる。

$$\sum_p m_p = \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.12)$$

$$\sum_p \mathbf{p}_p = \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.13)$$

ここで、任意の座標 \mathbf{x} における物理量を $f(\mathbf{x})$ は、粒子の物理量 f_p を用いると、

$$f(\mathbf{x}) = \sum_p f_p \chi_p(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

となる。したがって、式(4.5)に式(4.6)~(4.14)を代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{m_p}{V_p} \mathbf{w} \cdot \dot{\mathbf{v}}_p \chi_p d\Omega = & - \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \boldsymbol{\sigma}_p \chi_p \cdot \nabla \mathbf{w} d\Omega \\ & + \sum_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{m_p}{V_p} \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}_p \chi_p d\Omega + \int_S \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\tau} dS \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる。ここで、 \mathbf{v}_p ：粒子の速度、 \mathbf{b}_p ：粒子の体積力であり、「 $\dot{\cdot}$ 」は時間微分を意味する。

次に、粒子の背面に設けた N_n 個の節点から成る Euler 格子を考える。Euler 格子における節点の内挿関数 N_i (有限要素法における形状関数) を用いると、任意座標は次式にて表される。

$$\mathbf{x} = \sum_i^{N_n} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i \quad (4.16)$$

ただし、

$$\sum_i^{N_n} N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \quad (4.17)$$

ここで、 \mathbf{x}_i ：節点 i の座標値である。この時、任意座標同様に任意ベクトルならびに任意ベクトルの空間勾配も、

$$\mathbf{w} = \sum_i^{N_n} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{w}_i \quad (4.18a)$$

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{x}} = \sum_i^{N_n} \mathbf{w}_i \frac{dN_i(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \quad (4.18b)$$

となるので、式(4.18)を式(4.15)に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\sum_p \frac{m_p}{V_p} \dot{\mathbf{v}}_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} N_i \chi_p d\Omega \right) = & - \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\sum_p \boldsymbol{\sigma}_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{dN_i}{d\mathbf{x}} \chi_p d\Omega \right) \\ & + \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\sum_p \frac{m_p}{V_p} \mathbf{b}_p \int_{\Omega_p \cap \Omega} N_i \chi_p d\Omega \right) \\ & + \sum_i \mathbf{w}_i \cdot \left(\int_S N_i \boldsymbol{\tau} dS \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

上式を整理すると、

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i^{\text{int}} + \mathbf{f}_i^{\text{ext}} \quad (4.20)$$

ただし、

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_p m_p \dot{\mathbf{v}}_p \phi_{ip} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{int}} = - \sum_p \boldsymbol{\sigma}_p V_p \frac{d\phi_{ip}}{d\mathbf{x}} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{f}_i^{\text{ext}} = \sum_p m_p \mathbf{b}_p \phi_{ip} + \int_S N_i \boldsymbol{\tau} dS \quad (4.23)$$

$$\phi_p = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} N_i(\mathbf{x}) \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.24)$$

$$\frac{d\phi_p}{d\mathbf{x}} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} \frac{dN_i(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \chi_p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.25)$$

ここで、 m_i : 節点の質量、 $\dot{\mathbf{v}}_i$: 節点の加速度、 $\mathbf{f}_i^{\text{int}}$ 、 $\mathbf{f}_i^{\text{ext}}$: 節点の内力、外力である。MPM および GIMP では、粒子の内挿関数に関してはそれぞれ次式にて定義されている。

$$\chi_p^{\text{MPM}}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) V_p \quad (4.26)$$

$$\chi_p^{\text{GIMP}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega_p \quad (\mathbf{x} < l_p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.27)$$

ここで、 χ_p^{MPM} 、 χ_p^{GIMP} : それぞれ MPM と GIMP における粒子の内挿関数、 $2l_p$: 粒子サイズであり、初期の粒子サイズ $2l_p^0$ は格子サイズを格子内の粒子数で除すことで得られる^{4.47)}。したがって、一次元における MPM の内挿関数および内挿関数の空間勾配は、

$$\phi_i(x) = N_i(x) = \begin{cases} 1 + (x - x_i)/L & -L < x - x_i \leq 0 \\ 1 - (x - x_i)/L & 0 \leq x - x_i < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\frac{d\phi_i(x)}{dx} = \frac{dN_i(x)}{dx} = \begin{cases} 1/L & -L < x - x_i \leq 0 \\ -1/L & 0 \leq x - x_i < L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.29)$$

となる。また、GIMP における内挿関数は

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{(L + l_p + (x - x_i))^2}{4Ll_p} & -L - l_p < x - x_i \leq -L + l_p \\ 1 + \frac{x - x_i}{L} & -L + l_p < x - x_i \leq -l_p \\ 1 - \frac{(x - x_i)^2 + l_p^2}{2Ll_p} & -l_p < x - x_i \leq l_p \\ 1 - \frac{x - x_i}{L} & l_p < x - x_i \leq L - l_p \\ \frac{(L + l_p - (x - x_i))^2}{4Ll_p} & L - l_p < x - x_i \leq L + l_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.30)$$

となり、内挿関数の空間勾配は次式となる。

$$\frac{d\phi_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{L+l_p+(x-x_i)}{2Ll_p} & -L-l_p < x-x_i \leq -L+l_p \\ \frac{1}{L} & -L+l_p < x-x_i \leq -l_p \\ -\frac{x-x_i}{Ll_p} & -l_p < x-x_i \leq l_p \\ -\frac{1}{L} & l_p < x-x_i \leq L-l_p \\ -\frac{L+l_p-(x-x_i)}{2Ll_p} & L-l_p < x-x_i \leq L+l_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.31)$$

ここで, L : 格子サイズである。なお, 3次元における内挿関数は次式より得る^{4.49)}。

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x)\phi(y)\phi(z) \quad (4.32)$$

粒子のひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ならびに応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$ は, 式(4.3), (4.4)より,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_i^{N_p} \left\{ \frac{d\phi_{ip}}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i + \left(\frac{d\phi_{ip}}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i \right)^T \right\} \quad (4.33)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (4.34)$$

となる。ここで, Δt : 時間増分である。また, 質量保存則 (式(4.2)) より, 次式を得る。

$$\rho_p^{t+\Delta t} = \frac{\rho_p^t}{1 + \text{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p)} \quad (4.35)$$

このとき, "cpGIMP"は式(4.35)を用いて次式を満足し

$$l_p^{t+\Delta t} = \mathbf{G}_p^{t+\Delta t} l_p^0 \quad (4.36)$$

ただし,

$$\mathbf{G}_p^{t+\Delta t} = (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{v}_p \Delta t) \mathbf{G}_p^t \quad (4.37)$$

である。ここで, \mathbf{G} : 変形勾配である。また, Wallstedt *et al.*^{4.48)}は次式を満たす GIMP を"uGIMP"としている。

$$l_p^t = l_p^0 \quad (4.38)$$

4.3 MPM を用いた地盤の大変形解析（北上原斜面崩壊）^{4.50)}

近年、地盤工学分野において粒子法（SPH, MPS, EFGM 等）を用いた研究が盛んに行われている。本節では、その粒子法の一つである MPM を実際に発生した地すべりへの適用を行い、MPM の有用性を検証する。対象とする地すべりは、2006 年 6 月 10 日に沖縄県中頭郡中城村で発生した北上原地すべりとした。本地すべりは、移動層の斜面長が 237m、最大鉛直深度が 15.8m^{4.51)}と大規模な斜面崩壊であり、沖縄県においては特異的な斜面崩壊現象となった^{4.52)}。また本地すべりに関して、Tokashiki and Aydan^{4.53)}は Bishop 法, Simple 法, Spencer 法, Aydan 法^{4.54)}を用いて、安定解析手法の違いによる内部摩擦角と安全率、間隙水圧と安全率の関係を算出し考察を行っている。また同論文において、Tokashiki and Aydan は簡易的な解析モデルを作成し移動距離の再現を行っている。そのモデルは、移動層を複数のブロックに分割し、複数のすべり面から構成される運動方程式を差分法を用いて解くことで移動層の移動距離の再現を行っているが、移動層の詳細な地すべり崩壊挙動の把握は行われていない。本章では、MPM を用いて移動層の崩壊挙動の把握ならびにその時の内部の応力についての検証を行った。さらに内部摩擦角の違いによる崩壊挙動および応力状態の違いについても検証を行った。

4.3.1 北上原斜面崩壊の地質特製および地すべり発生時の環境特性

Fig.4.2 に本地すべりの発生箇所を示す。北上原斜面崩壊が発生した地域は、沖縄県本島の中南部に位置し、東海岸側であった。沖縄県本島の中南部の東斜面側には、海岸線に平行な北東－南西方向の丘陵が発達しており、多くの地すべり地形が分布し、地すべり危険箇所が複数存在すし、本地すべりの発生箇所もその一つであった。沖縄県本島の中南部の地質は、島尻層群泥岩であり、沖縄県本島中南部から宮古島にかけて分布する新第三紀の堆積軟岩である。Table.4.1 に地盤の強度特性を示す。本地斜面崩壊地帯の地質特性はいくつか調査報告されており^{4.53)}、地すべり地域の砂岩は多孔質であり、強度は 300～340 kPa と極めて弱く、泥岩の強度は含水状態で 1.2～3.6 MPa であったと報告されている。また宜保ら^{4.51), 4.52)}によると、粘着力のピーク強度は 70 ～100 kPa であり、内部摩擦角のピーク強度は 23 から 27 degrees であり、残留粘着力ならびに内部摩擦角はそれぞれ 0 kPa, 11degrees と報告されている。さらに、山口大学の試験結果では、内部摩擦角のピーク強度は 15～29degrees で、残留内部摩擦角は 9～13degrees であったと報告されている^{4.53)}。

斜面崩壊時の降雨状況を Fig.4.3 に示す。斜面崩壊時にはかなりの量の雨が降っており、6 月 7 日から 10 日の午後 4 時までで 152mm の降雨量が確認されている。本地すべりは 6 月 10 日午後 5 時に発生したと報告されている。したがって、降雨により間隙水圧が上昇し、その結果、地質的構造弱面が形成され、斜面崩壊が発生したと考えられる。事実、地質的構造弱面は複数確認されている^{4.55), 4.56)}。

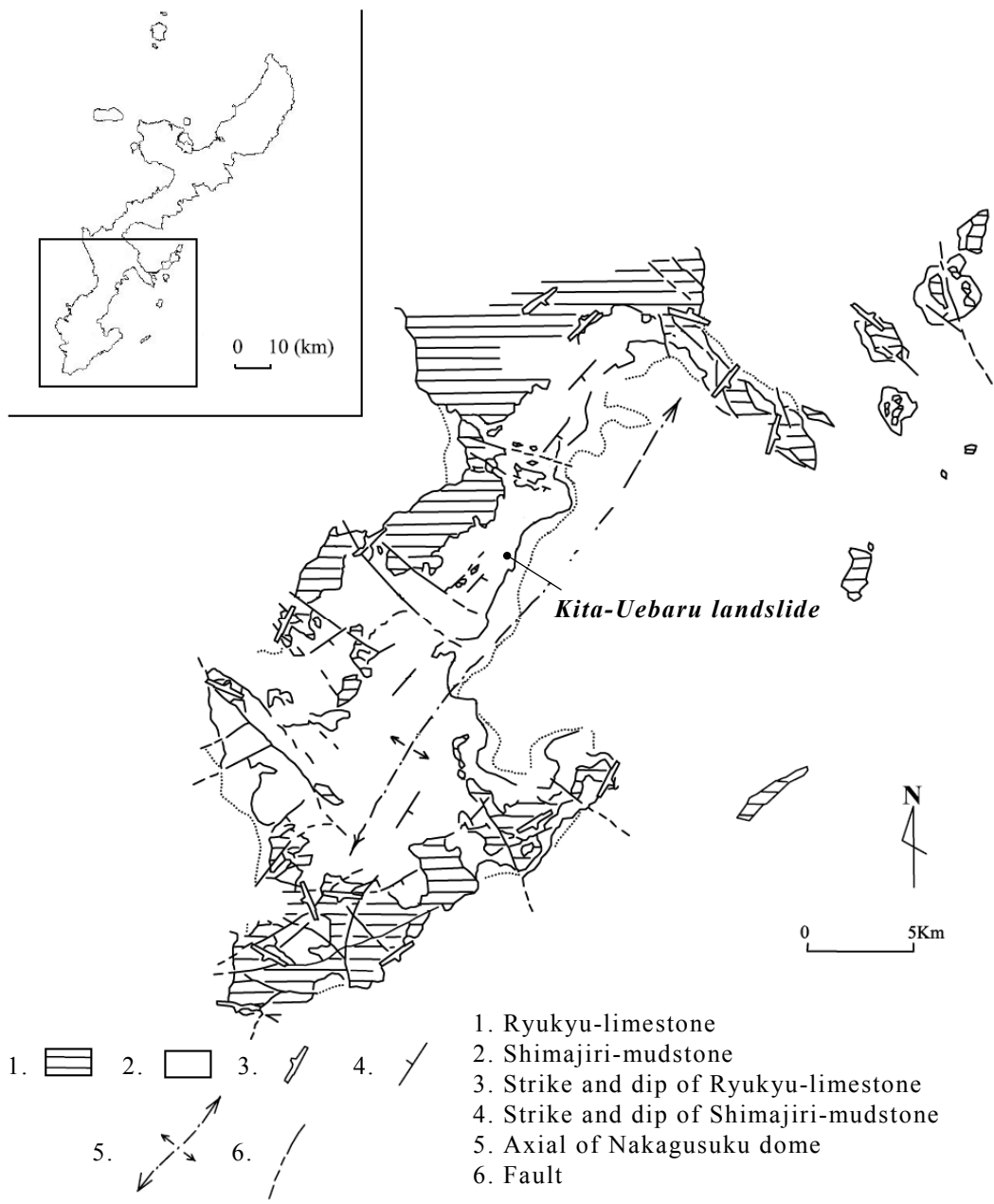


Fig.4.2 Location map for Kita-Uebaru landslide (Taken by Chen *et al.*, 2007)

4.3.2 北上原斜面崩壊の解析モデル

Fig.4.4 に解析モデルを示す。同図(a)は Tokashiki and Aydan^{4.53)}が北上原斜面崩壊の動的挙動の再現解析で用いたモデルであり、解析モデルは上部の移動層と下部の不動層とで成り立つ。同図(b)には、本解析で用いた解析モデルを示す。解析モデルにおける上部の移動層は 15,558 の粒子で表現している。材料特性として、斜面崩壊時にはかなりの降雨量であったことを考慮し、ヤング率を 1.34 MPa, ポアソン比 0.45 とした。さらに、本地すべりは間隙水の上昇により弱面（移動層と不動層の境界）が形成され斜面崩壊が発生したことから、弱面付近は間隙水が多いと仮定した。すなわち、弱面付近の湿潤密度を低く設定した。Fig.4.5 に密度分布を示す。弾塑性構成則には Drucker-Prager の降伏関数^{4.57), 4.58)}を用いた。

$$f = \beta I_1 + \sqrt{J_2} - K = 0 \quad (4.39)$$

ただし、

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.40)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \left(s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I \delta_{ij} \right) \quad (4.41)$$

$$\beta = \frac{\tan a}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 a}} \quad (4.42)$$

$$K = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 a}} \quad (4.43)$$

ここで、 s : 偏差応力, a : 内部摩擦角, c : 粘着力, β , K : 材料パラメータを表す。この時、降雨によるサクシヨンの減少は粘着力を低下させることより、本章では粘着力は 0 kPa とした。

4.3.3 摩擦面上における接触アルゴリズム^{4.59)}

斜面崩壊や土石流のような流動解析を行う場合には、移動層 (Fig.4.4 の上端) が不動域 (Fig.4.4 の下端) を滑り落ちるため摩擦を考慮する必要がある。以下に摩擦面上における計算方法を示す。

まず境界面上の節点において、境界面の接線方向には接線摩擦力、法線方向には反発力が作用するとし、境界面上を滑る物体と境界面との間に相対速度が生じている場合にはクーロン摩擦力が働き、相対速度が生じない場合、物体に作用している力と同じ大きさをもつ力が摩擦力として働くものとする。これらの特性は節点加速度および速度を用いて表現される。次式を満たす時、境界面に対して物体が法線方向に力が作用する。

$$\mathbf{a}_i^k \cdot \mathbf{n}_i^b > 0 \quad (4.44)$$

Table.4.1 The friction angle and cohesion for Kita-Uebaru landslide

	University of the Ryukyus		Yamaguchi University	
	Friction angle (degrees)	Cohesion (kPa)	Friction angle (degrees)	Cohesion (kPa)
Peak	23 - 27	70 - 100	15 - 29	-
Residual	11	0	9 - 13	-

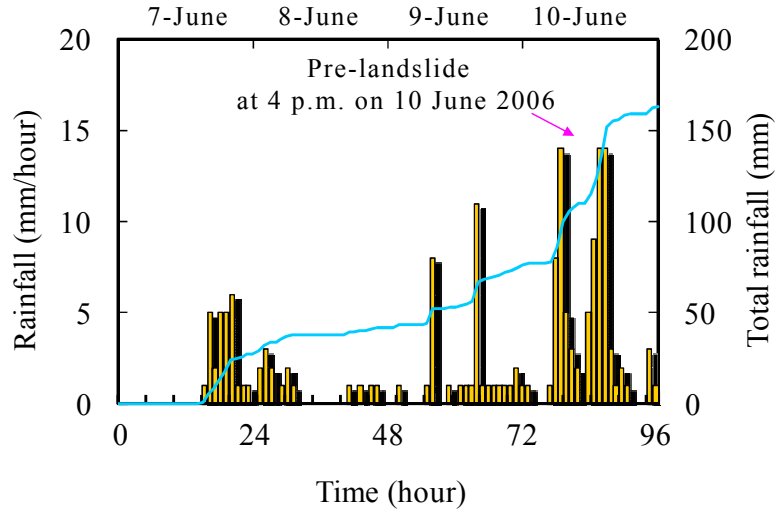


Fig.4.3 Rainfall of 4 days before the landslide

ここで、 \mathbf{a}_i^k は第 k ステップにおける節点 i の加速度、 \mathbf{n}_i^b は接点 i の境界面に対する内向きの法線ベクトルである。そして、摩擦力は境界面上の節点速度を用いて表される。すなわち、

$$\mu' = \begin{cases} \mu & (\text{if } \mathbf{v}_i^k \neq 0) \\ \left[\mathbf{n}_i^b \times (\mathbf{a}_i^k \times \mathbf{n}_i^b) / (\mathbf{a}_i^k \cdot \mathbf{n}_i^b) \right] & (\text{if } \mathbf{v}_i^k = 0) \end{cases} \quad (4.45)$$

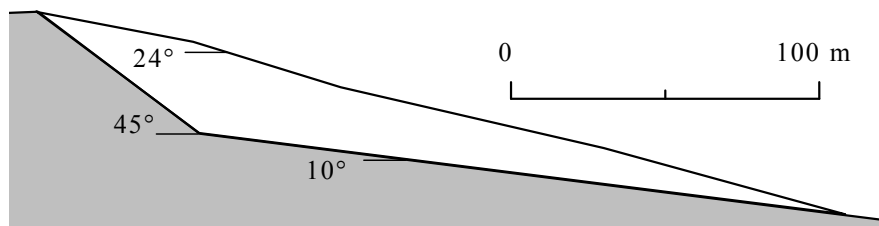
とし、接点加速度次式にて更新し、摩擦力の影響を取り入れる。

$$\left[\mathbf{n}_i^b \times (\mathbf{a}_i^k \times \mathbf{n}_i^b) \right]_{\text{update}} = \left[\mathbf{n}_i^b \times (\mathbf{a}_i^k \times \mathbf{n}_i^b) \right] - \text{sign} \left\{ \mathbf{n}_i^b \times (\mathbf{v}_i^k \times \mathbf{n}_i^b) \right\} \mu' \left| \mathbf{a}_i^k \cdot \mathbf{n}_i^b \right| \quad (4.46)$$

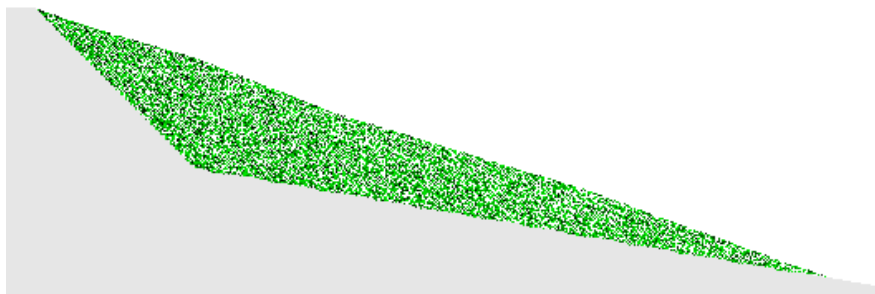
ここで、 μ は動粘性係数であり、本研究では 0.1 としている。また法線方向に関して、法線成分を 0 にすれば良く次式より表わされる。

$$\mathbf{a}_i^k \cdot \mathbf{n}_i^k = 0 \quad (4.47a)$$

$$\mathbf{v}_i^{k+1} \cdot \mathbf{n}_i^k = 0 \quad (4.47b)$$



(a) The Landform



(b) The sliding part

Fig.4.4 Numerical landslide model

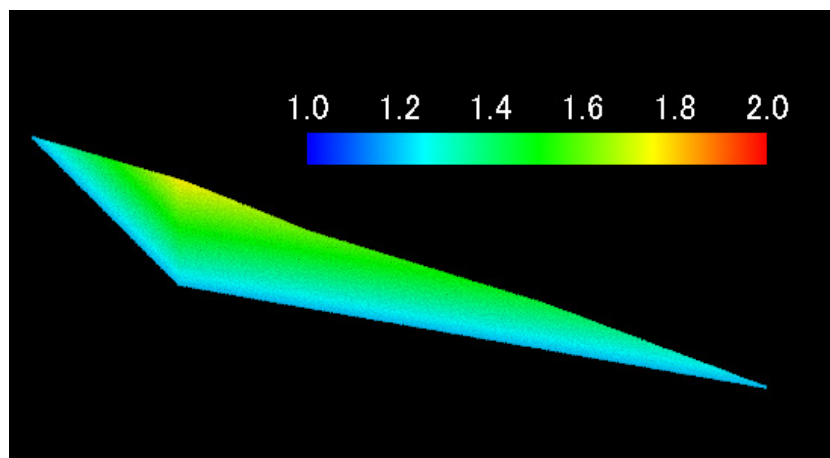


Fig.4.5 The distribution of the mass density for the landslide model ($\times 10^3$ [kg/m³])

4.3.4 数値解析結果

Fig.4.6 に時間と移動層先端の到達距離の関係を示す。同図より、内部摩擦角が 25 degrees（ピークの内部摩擦角の範囲内）の時、移動層はほとんど動いていないことが分ける。一方、内部摩擦角が 12 degrees（残留内部摩擦角の範囲内）の時、50 秒間における移動距離は 110.7 m となり、宜保ら^{4.52)}の観測結果とほぼ同等な値となった。このことから、斜面崩壊が発生する時の地盤の強度特性はピーク強度から著しく低下していることが示唆される。また、Tokashiki and Aydan^{4.53)}の解析結果（109.87m）と比較すると、解析開始時から 15 秒において、Tokashiki and Atdan の結果では移動層の移動距離は線型的に増加している。一方で、本解析結果においては、二次関数的に移動距離が増加していることがわかる。すなわち、本解析結果では斜面崩壊は突発的に発生したことがわかる。Fig.4.7 に、内部摩擦角が 12 degrees と 25 degrees における北上原斜面崩壊のシミュレーション結果を示す。同図においても、内部摩擦角が 25 degrees の時、移動層がほとんど移動してないことがわかる。

Fig.4.8 には、地すべり時における移動層の応力状態を示す。2.4 秒の時（移動層の移動開始直後）において、内部摩擦角が 12 degrees の時よりも 25 degrees の場合の方が、地盤内部のせん断応力が高い値となった。そして、4.8 秒においても 25 dgrees における地盤内部のせん断応力が極めて高い結果となった。すなわち、内部摩擦角が高い場合、地盤内部のせん断抵抗力が高く、斜面崩壊現象が生じないことがわかる。その後、内部摩擦角が低い場合の地盤内のせん断応力は、内部摩擦角が高い場合よりも低い値であることが同図よりわかる。また内部摩擦角によらず、移動層と不動層の境界付近のせん断応力は常に高い値であるが、内部摩擦角が低い場合において、斜面崩壊現象は生じた。すなわち、地質構造的弱面のせん断抵抗が高く場合においても、弱面から離れた箇所のせん断応力が低い場合においても斜面崩壊現象は生じることが示唆される。このように地盤内部の応力状態を可視化することで、斜面崩壊現象のメカニズムに解明につながり、メカニズムを考慮した対策を行えることが可能になると考える。したがって、地盤内部の応力状態の可視化は極めて有用でありと思われる。

Fig.4.9 には、各内部摩擦角における時間と到達距離の関係を示す。同図より、内部摩擦角が 8, 10, 14, 16 degrees の時、移動距離はそれぞれ 205.9 m, 176.7 m, 63.0 m, 32.5 m であった。このことから、移動距離が 12 degrees を境に突然変化していることがわかる。すなわち、斜面崩壊時における内部摩擦角の閾値の存在が、数値解析的に示唆される結果となった。

以上の結果より、MPM を用いて斜面崩壊を数値解析に検討することは可能であり、MPM を用いることで、地盤内部の応力状態や内部摩擦角の違いによる移動層の挙動の変化等を考慮した数値解析な検討を行うことも可能であると考えられる。すなわち、MPM の地盤・岩盤の大変形問題、大変位問題への適用は極めて重要であると考えられる。しかしながら、上記で述べたように MPM は弾性状態が長く続く場合において、エネルギーが変動しエネルギー保存則が成り立たないという問題が指摘されている。本節における解析対象モデルのように、解析対象が塑性状態になる前提でかつ、弾性状態が長く続かない問題においては、上記の問題の影響は少ない

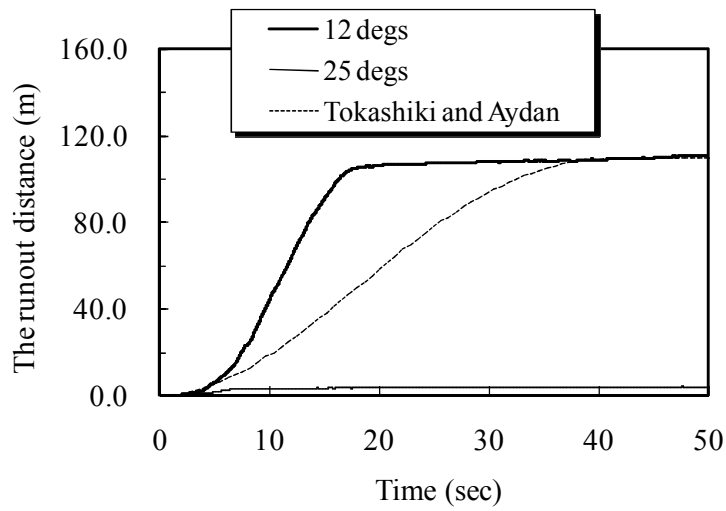


Fig.4.6 Numerical result for the runout distance

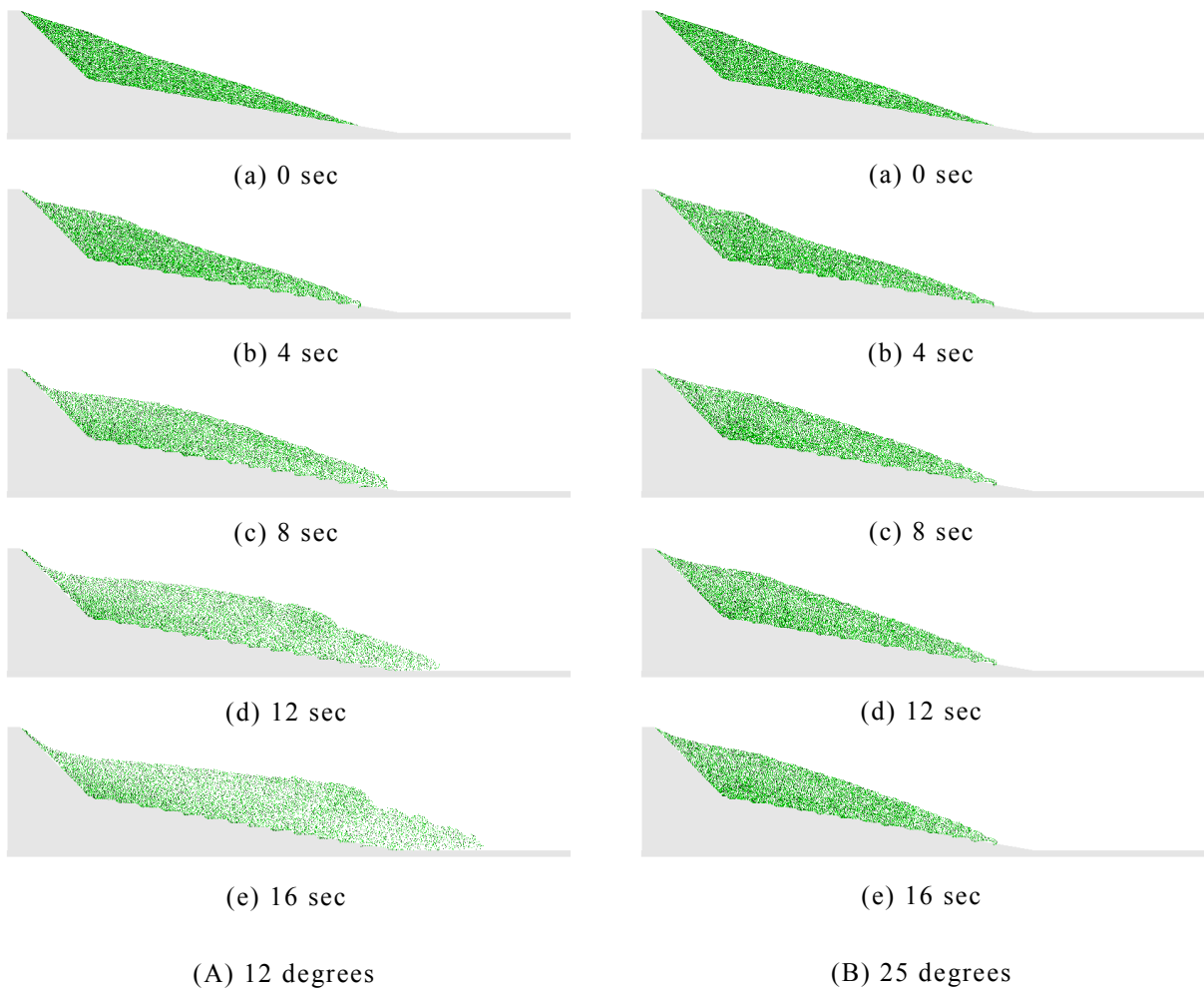
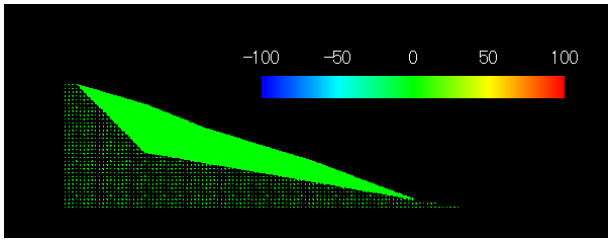
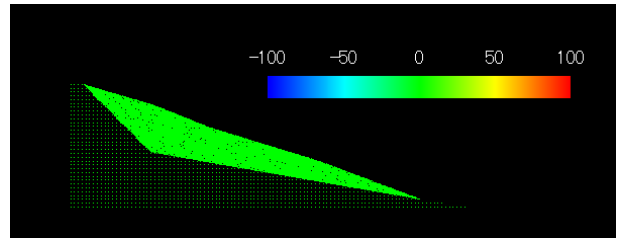


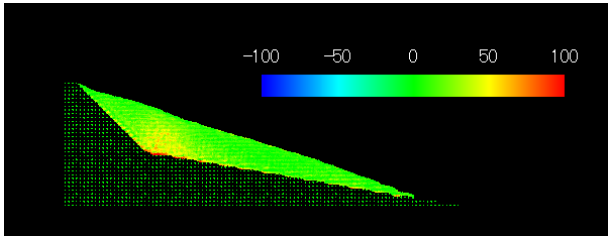
Fig.4.7 The proposed landslide behaviors



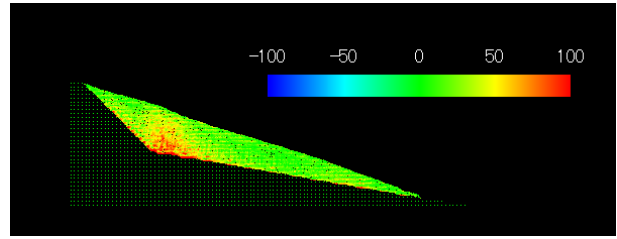
(a) 0.0 sec



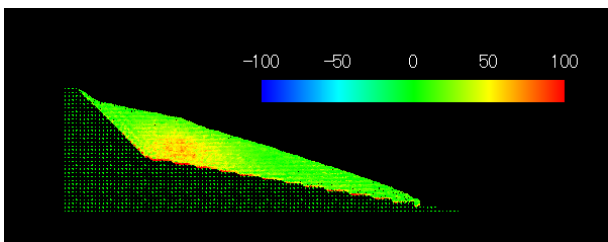
(a) 0.0 sec



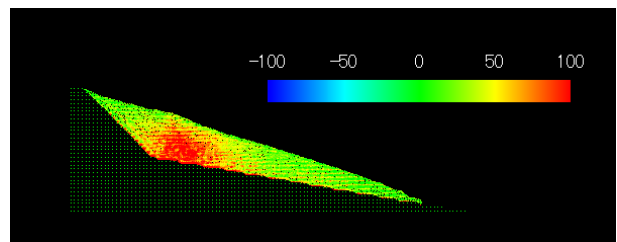
(b) 2.4 sec



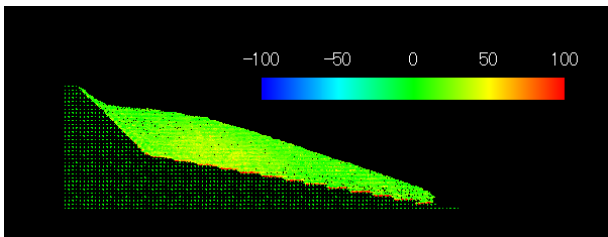
(b) 2.4 sec



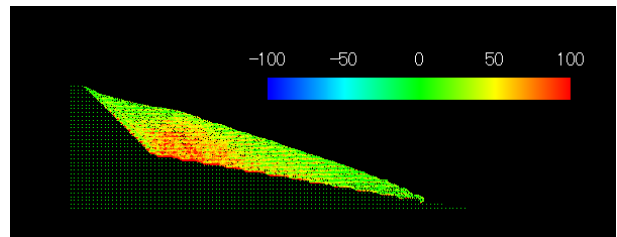
(c) 4.8 sec



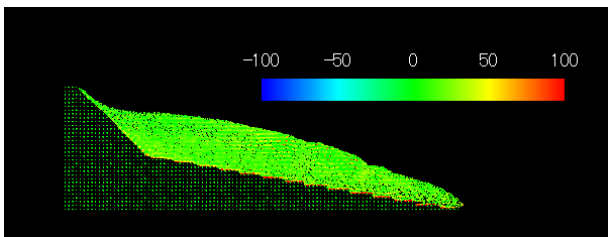
(c) 4.8 sec



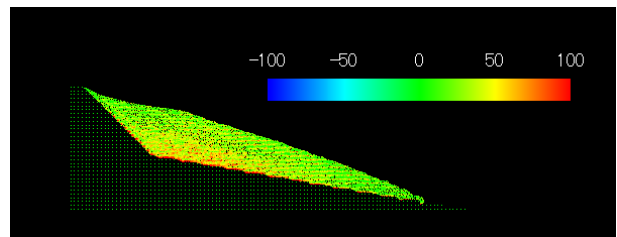
(d) 7.2 sec



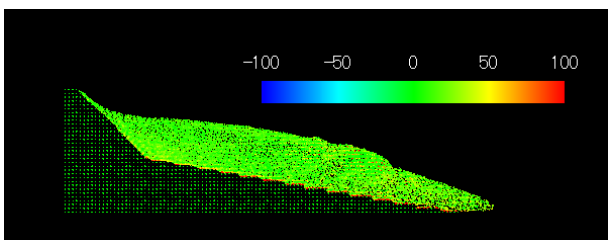
(d) 7.2 sec



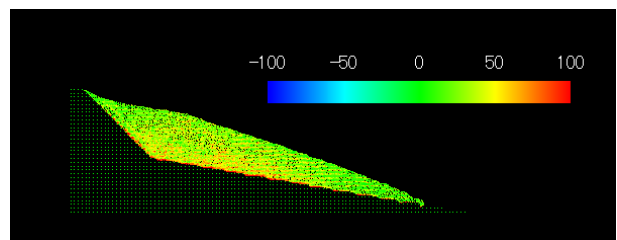
(e) 9.6 sec



(e) 9.6 sec



(f) 12.0 sec
(A) 12 degrees



(f) 12.0 sec
(B) 25 degrees

Fig.4.8 The distribution of shear stress for the landslide model ($\times 10^3$ [N/m²])

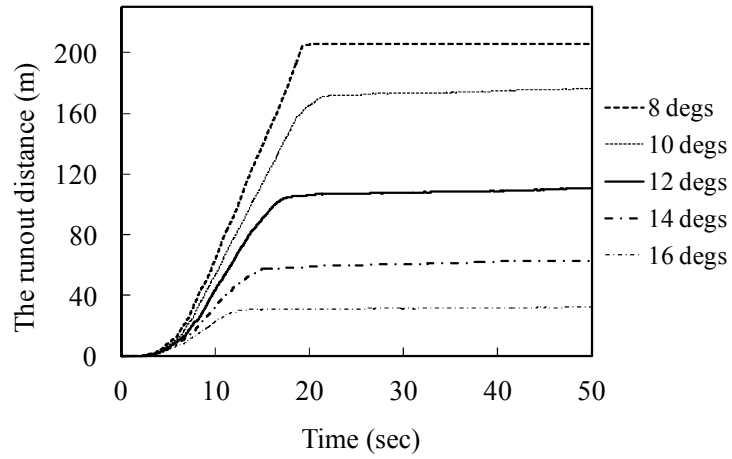


Fig.4.9 The runout distance in some cases where various friction angles were assumed

と思われが、今後、MPM を用いて、岩盤の落石のような弾性状態が長く続き、ある時刻を過ぎ、突発的に崩壊等の大変形が起こるような現象を対象とした場合、MPM を用いることは難しい。そこで次節にて、この問題の抑制手法の開発を行う。

4.4. エネルギー変動に関する抑制法

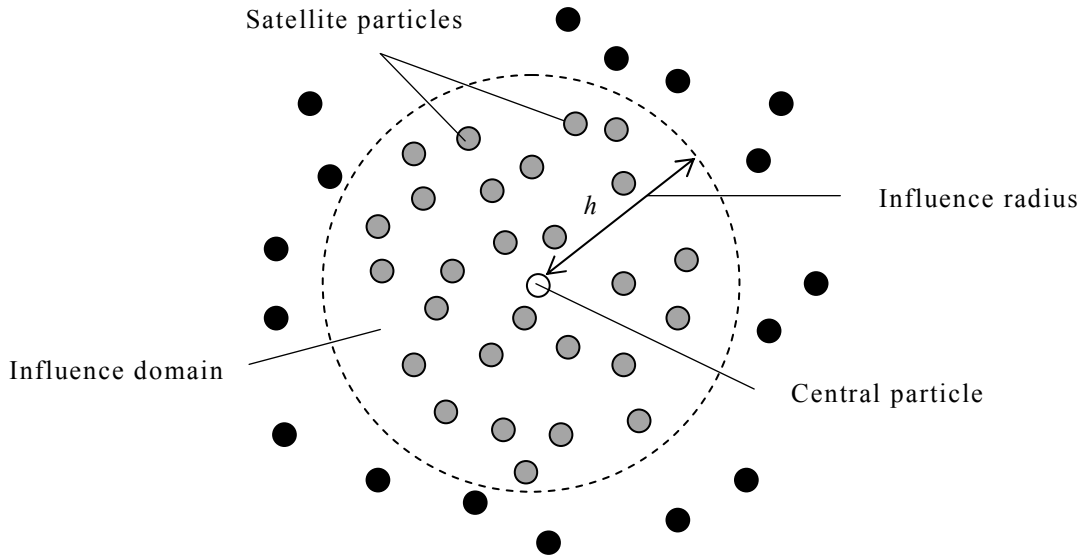


Fig.4.10 Illustration of influence domain for MLSM

ここでは、MPM の動弾性解析における弾性エネルギー変動問題に関する抑制手法を提案する。この問題は、ひずみエネルギーの誤差の蓄積が原因であるとされており、このエネルギー変動に関して Bardenhagen *et al.*^{4.45)}は、MPM の一般的なアルゴリズムである MUSL (Modified Update Stress Last)^{4.35)}において、アルゴリズムの最後に行っていたひずみ増分値の算出を先に求めることで、この問題に対応している。また、Nairn *et al.*^{4.46)}は、ひずみ増分値を先に求め、その後節点速度を求め、そしてその節点速度を用いて、ひずみ増分値を求めることで変動を抑えた。すなわち、両者ともにひずみ増分値を求めるアルゴリズムを変えることでエネルギー変動の抑制を行っていることになる。また、Søren *et al.*^{4.60)}は節点速度より求めた粒子の応力 (式(4.34)参照) を、次式に示すように、質量を重みにし、内挿関数を用いて節点の応力を求め、そして再び内挿関数を用いて粒子の応力を求める手法を提案している。

$$\sigma_i = \sum_{p=1} \frac{\sigma_p \phi_{ip} m_p}{m_i} \quad (4.48)$$

$$\sigma_p^{\text{modified}} = \sum_{i=1} \sigma_i \phi_{ip} \quad (4.49)$$

そこで本章では、粒子のひずみ値に着目し、エネルギー変動の抑制を行うことを試みる。具体的には、着目粒子のひずみ増分値を、移動最小自乗法 (MLS 法: Moving Least Squares Method)^{4.61)}を用いて近傍粒子のひずみ増分値で補間することで、誤差の蓄積を抑制する手法である。以下に本手法の詳細について述べる。

4.4.1 Moving Least Squares MPM (MLS-MPM)

(a) MLSMにおける評価関数

本章では、着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子のひずみ増分値を用いて補間することで、エネルギー変動に対する抑制を行った。具体的には、近傍粒子のひずみ増分値を用いて次式の重み付き自乗和を最小にすることで、着目粒子の修正ひずみ増分値 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}}$ が求められる。

$$J = \sum_{I=1}^n W(r_I, h) (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_I)^2 \quad (4.50)$$

ここで、 J : 残差の自乗和、 n : 影響領域内 (Fig.4.10 に示す円領域) にある粒子数、 r_I : 着目粒子と近傍粒子 I との距離、 h : 影響領域の半径 (Fig.4.2 参照)、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_I$: 近傍粒子 I のひずみ増分値である。なお重み関数 $W(r_I, h)$ に関して、次式に示す3次のスプライン関数^{4.62)}を用いた。

$$W(r_I, h) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s + 4s^3 & 0 \leq s < \frac{1}{2}, \quad s = r_I / h \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \frac{1}{2} \leq s < 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases} \quad (4.51)$$

(b) 修正ひずみ増分値の導出

前項で示した着目粒子のひずみ増分値 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}}$ を次式にて定義する。

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} = \mathbf{c}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (4.52)$$

ここで、 \mathbf{c} : 未定係数、 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$: 任意の多項式である。式(4.52)を式(4.50)に代入し、 J 値の停留条件より式を整理すると、未定係数 \mathbf{c} は次式によって得られる。

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_I \quad (4.53)$$

ただし、

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n W(r_I, h) \mathbf{F}(\mathbf{x}_I) \mathbf{F}^T(\mathbf{x}_I) \quad (4.54)$$

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{x}) = \{W(r_1, h) \mathbf{F}(\mathbf{x}_1), \dots, W(r_n, h) \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)\} \quad (4.55)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_I = \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\}^T \quad (4.56)$$

である。したがって、式(4.53)を式(4.52)に代入すると、

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}} = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_I \quad (4.57)$$

が得られる。ただし、

$$\Phi_I = \sum_{I=1}^m \mathbf{F}_I(\mathbf{x}) \{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})\}_{II} \quad (4.58)$$

である。ここで、 $m : \mathbf{F}(\mathbf{x})$ における多項式の項数である。したがって、本章では式(4.57)を着目粒子のひずみ増分値とし解析を行うものとする。

4.4.2 MLS-MPM のアルゴリズム

MPM におけるアルゴリズムに関して、一般的に MUSL (Modified Update Stress Last) ^{4.35)}, USF (Update Stress First) ^{4.45)}, MUSL と USF の平均的なアルゴリズムである USAVG (Update Stress Avaraged) ^{4.46)}の3つの手法があるが、本章では、提案手法の有用性を示すために、Sulsky らによって示された MUSL をベースとした。

初めに粒子 p の座標を用いて、前節に示した内挿関数および内挿関数の空間勾配を求める。そして、粒子の質量 m_p を用いて、各節点の質量 m_i を求める。

$$m_i^k = \sum_p m_p \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (4.59)$$

ここで、 k はステップ数を表わす。そして式(4.22), (4.23)より、粒子の応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$, 体積力 \mathbf{b}_p を用いて、節点の外力および内力を求め、節点の加速度 \mathbf{a}_i を求める。

$$\mathbf{a}_i^k = \frac{\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}}{m_i^k} \quad (4.60)$$

節点加速度を用いて、節点の速度を更新する。

$$\mathbf{v}_i^L = \mathbf{v}_i^k + \mathbf{a}_i^k \Delta t \quad (4.61)$$

そして、節点速度を用いて、粒子の速度ならびに座標を更新する。

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i^k \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (4.62)$$

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i^L \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (4.63)$$

このとき、運動量保存則より、 $k+1$ ステップにおける節点速度を求める。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{\sum_{p=1} m_p \mathbf{v}_p^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{m_i^k} \quad (4.64)$$

そして、 $k+1$ ステップにおける節点速度を用いて、粒子のひずみ増分値を求める。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^L = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} + \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} \right)^T \right\} \quad (4.65)$$

このとき、式(4.57)より、着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子のひずみ増分値で補間する。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}, p}^{k+1} = \sum_{l=1}^n \Phi_l(\mathbf{x}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_l^L \quad (4.66)$$

そして、修正したひずみ増分値を用いて、粒子の応力と密度を更新する。

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \mathbf{D} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}, p}^{k+1} \quad (4.67)$$

$$\rho_p^{k+1} = \frac{\rho_p^k}{1 + \text{tr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{modified}, p}^{k+1})} \quad (4.68)$$

このとき GIMP において、粒子サイズは次式にて更新される^{4.48)}。

$$l_p^{k+1} = \mathbf{G}_p^{k+1} l_p^0 \quad (4.69)$$

ただし、

$$\mathbf{G}_p^{k+1} = (1 + \nabla \mathbf{v}_p \Delta t) \mathbf{G}_p^k \quad (4.70)$$

である。なお以下に示す解析結果においては、式(4.69)を満たす GIMP を“cpGIMP”とし、次式を満たす GIMP を“uGIMP”としている。

$$l_p^{k+1} = l_p^0 \quad (4.71)$$

Fig.4.11 に MLS-MPM のフローチャートを示す。なお、通常の MPM のアルゴリズム (MUSL) は、同図に示す「着目粒子のひずみ増分値の補間 (MLS 法)」の項目が無い。また、MPM は陽解法であるため、時間増分は Courant 条件^{4.63)}により制限される。したがって本章では、時間増分値に関して、次式を満足するように時間増分値を決定した。

$$\alpha = \frac{c \Delta t}{L} \quad (\because \alpha < 1.0) \quad (4.72)$$

ここで、 α : クーラン係数, c : 弾性波速度である。

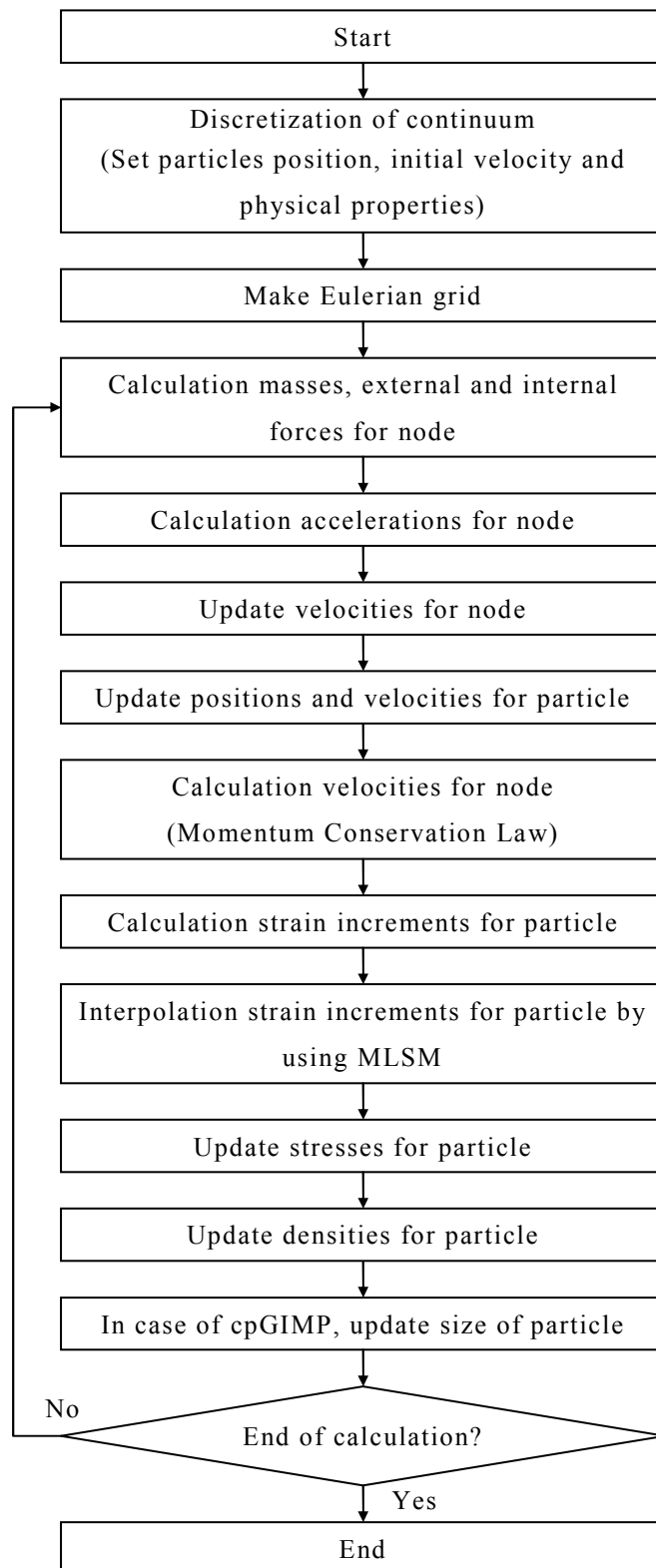


Fig.4.11 Flowchart for MLS-MPM

4.5. 数値解析例

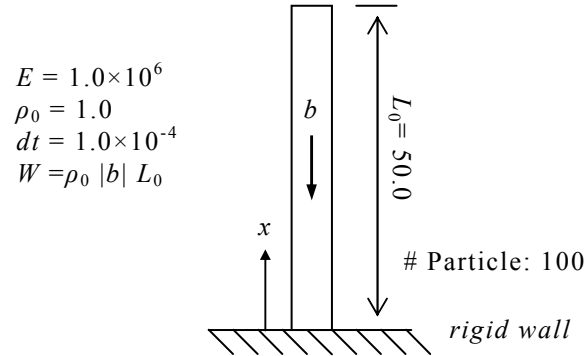


Fig.4.12 Quasi-static compression test of bar

本章では，従来のMPMならびにGIMPと提案手法との比較検証を行い，得られる解について考察する。また，式(4.40)に示す関数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は3次多項式とし，計算の破綻を防ぐために影響領域内に4つ以上の粒子が存在しない場合，その着目粒子のひずみ増分値の補間を行わないものとした。なお，影響半径は格子サイズに任意の定数を乗じ決定した。

4.5.1 棒の準静的問題

ここでは，Fig.4.12に示す試験体に，体積力（重力加速度等）が作用する一次元準静的圧縮問題^{4.47)}を対象とし，次式に示す応力の理論解との比較を行った。

$$\sigma(x) = E \left\{ \sqrt{\frac{2\rho_0 b}{E} (\Delta - x) + 1} - 1 \right\} \quad 0 \leq x \leq \Delta \quad (4.73)$$

ただし，

$$\Delta = L_0 + \frac{\rho_0 b}{2E} L_0^2 \quad (4.74)$$

ここで， E ：弾性係数， b ：体積重量， Δ ：試験体の長さである。境界条件は同図に示すように，試験体の底部 ($x = 0.0$) において完全固定とした。本問題における材料特性は，Bardenhagen *et al.*^{4.47)}同様に，弾性係数は 1.0×10^6 ，初期密度は1.0，初期の試験体の長さは50，試験体の断面積は1.0，時間増分値は 1.0×10^{-4} （クーラン係数：0.1），粒子数は100とした。

Fig.4.13～4.15に，粒子の座標を試験体長さ Δ で除した値と，応力を $s_0 (= b/A$ ： A ：断面積) で除した正規化応力との関係を示す。なお，同図は初期試験体長さを弾性波速度で除した時間における結果であり，Euler格子の格子サイズは1.0とした。

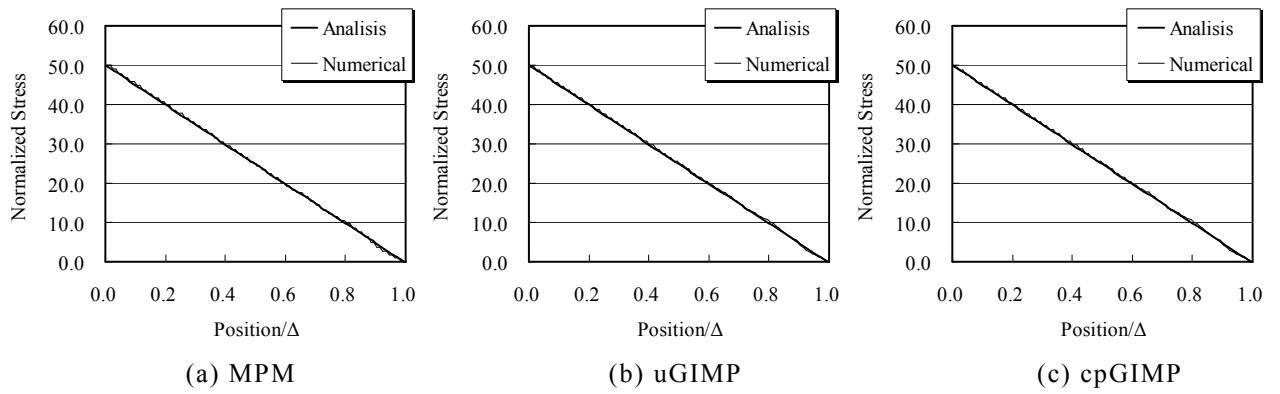


Fig.4.13 Distribution of axial stress at $W = 1000$

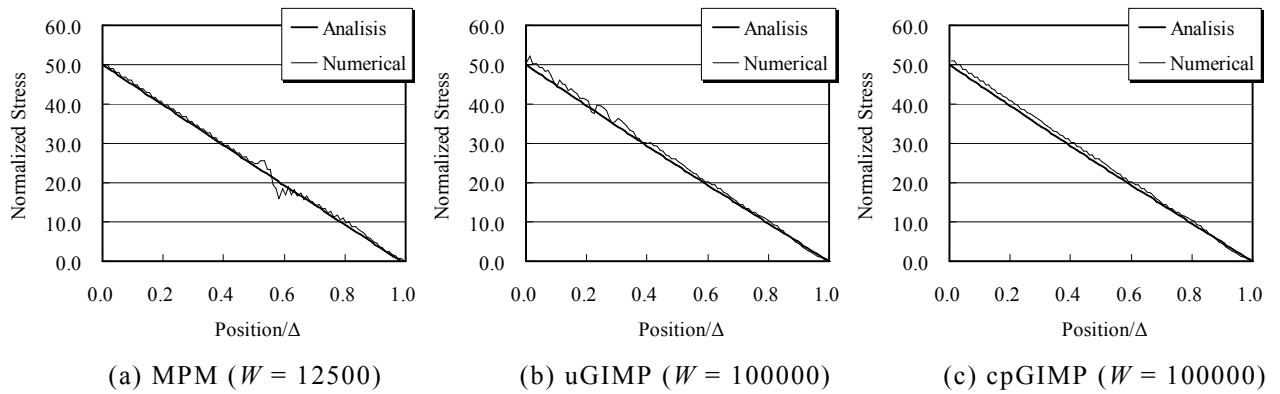


Fig.4.14 Distribution of axial stress (unused MLSM)

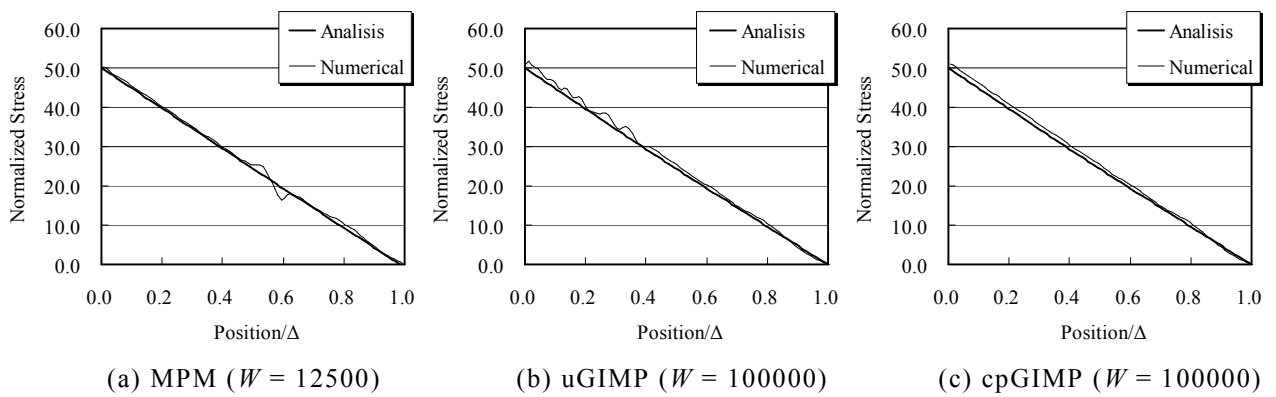


Fig.4.15 Distribution of axial stress (used MLSM)

Fig.4.13 に W 値($=\rho_0 b |L_0$)が 1000 の場合の結果を示す。Bardenhagen らと同様に、MPM ならび GIMP ともに、理論解と同程度の値が得られた。しかしながら、Fig.4.14 に示すように、MPM において $W=12500$ の時、試験体内部において高い応力値が得られ、試験体全体において応力値の振動が見られた。また、位置が 0.6 付近において、隣合う粒子の応力値が急激に変化している様子も見られる。GIMP においては同図に示すように、 $W=100000$ の時、uGIMP (同図(b)参照) では試験体の境界側で応力値の振動が見られ、MPM 同様に、隣合う粒子同士の応力値が急激に変化している箇所も存在する。cpGIMP (同図(c)参照) では、uGIMP に比べ応力値の振動は少ないものの、試験体全体において微小な振動が見られた。Fig.4.15 に、MLS-MPM の結果を示す。同図に示すように、移動最小自乗法を導入すると、全ての手法において解の振動が抑えられ、応力値が滑らかになり、隣合う粒子の応力値の急激に変化する箇所も少なくなる結果となった。したがって、準静的問題において本手法は妥当であると考えられる。

4.5.2 棒の動的問題

ここでは、Fig.4.16 に示す試験体に初速度を与えた場合の試験体内部における応力の精度検証を行う。このとき、応力の理論解^{4,47)}は次式となる。

$$\sigma = E \left(\frac{ct - v_0 t}{ct} - 1 \right) \quad (4.75)$$

ここで、 c ：弾性波速度、 v_0 ：初期速度である。なお、本問題において、 $v_0 = c/50$ とした。試験体の材料特性は上記の問題と同様な値を用いており^{4,47)}、本問題においても、Euler 格子の格子サイズは 1.0 とした。

Fig.4.17, 4.18 に、応力波が試験体の 8 割を通過した時における粒子の座標を初期試験体長さで除した値と、得られた応力を理論解で正規化した正規化応力との関係を示す。Fig.4.17 より、どの手法においても応力波が伝播している様子が見られるが、MPM においては、試験体内部の応力より境界付近における応力が高い結果となった。また、本問題における応力波は、通常滑らかになるものの、応力波が角張る結果となった。これは、MPM においては粒子の内挿関数に Dirac のデルタ関数を用いているためだと考えられる。また、GIMP は粒子の内挿関数に粒子サイズを用いているため、従来の MPM に比べ内挿関数に幅が生じ、その結果 MPM に比べ滑らかな応力波が得られているものの、解が若干振動している様子が見られた。Fig.4.18 に MLS-MPM の結果を示す。同図より、MPM ならびに GIMP に実装した場合ともに、境界に近づくにつれ応力波が減衰している様子が見られ、さらに極めて滑らかな応力波が得られる結果となった。したがって、本例題においても提案手法の妥当性を確認することができた。

4.5.3 物体の平行移動問題

ここでは、Fig.4.19 に示す試験体の平行移動問題を対象として、弾性エネルギーの変動について検討する。平行移動の空間を $D = 50$ とし、試験体の初期位置を空間

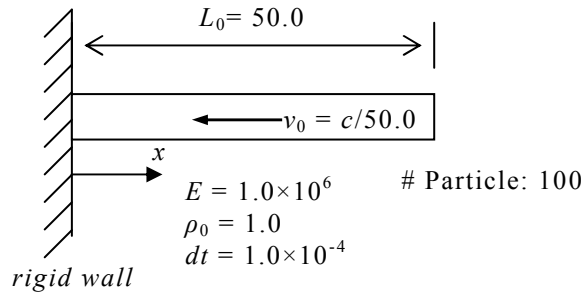


Fig.4.16 Dynamic compression test of bar

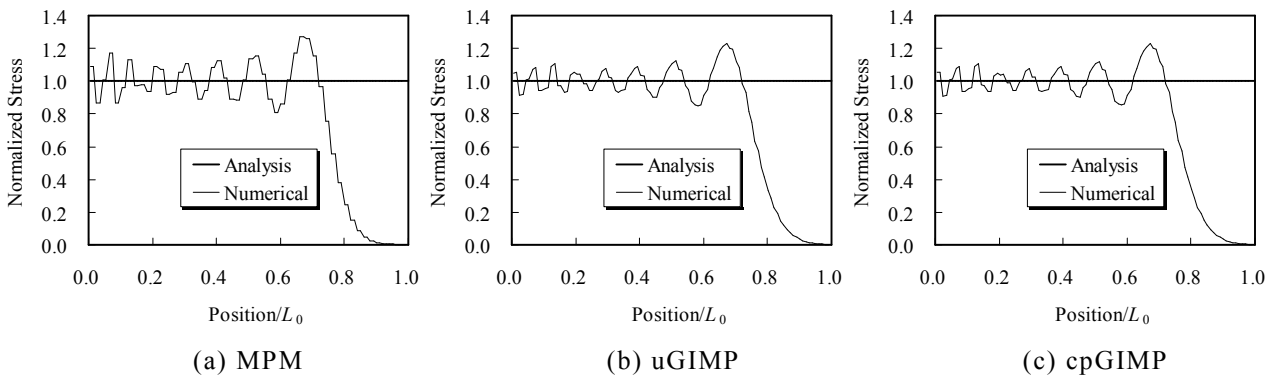


Fig.4.17 Distribution of normalized stress (unused MLSM)

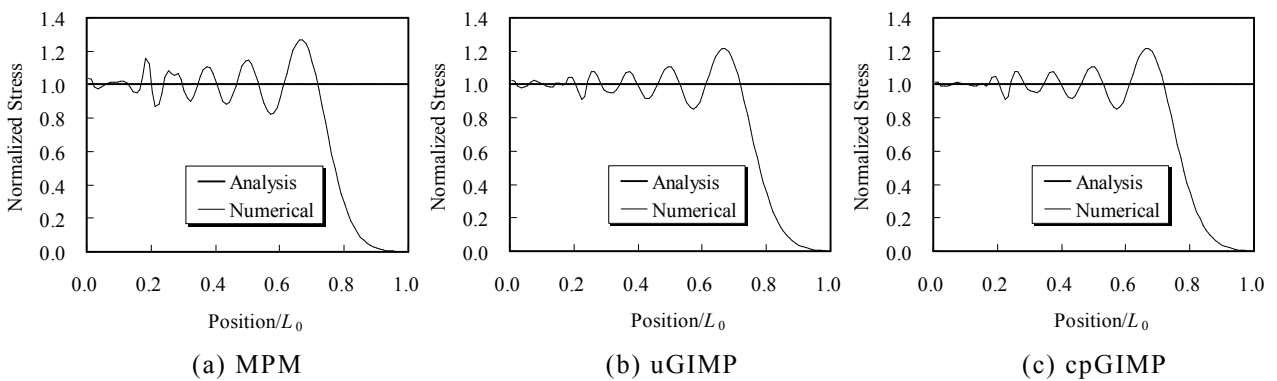


Fig.4.18 Distribution of normalized stress (used MLSM)

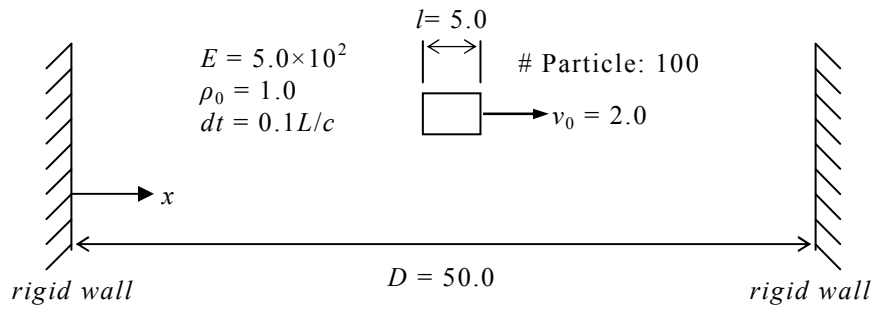


Fig. 4.19 Parallel translation test of bar

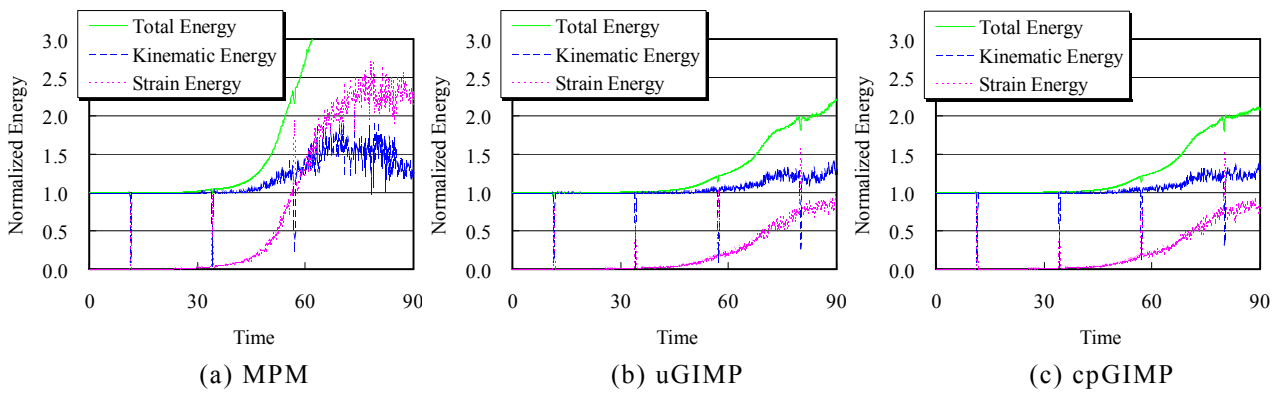


Fig.4.20 Fluctuation of normalized energy (unused MLSM)

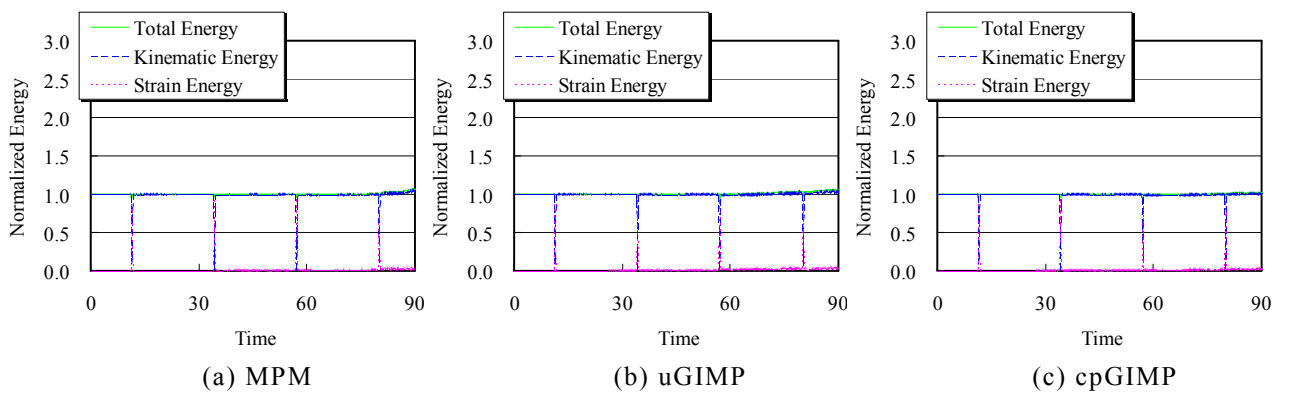


Fig.4.21 Fluctuation of normalized energy (used MLSM)

の中心 ($x = 25$) とし、初期条件として初期速度 $v_0 = 2.0$ を与えた。材料特性は、同図に示すように、試験体長さは 5.0、弾性係数は 500、密度は 1.0 とした。本問題における、格子サイズは 0.5 としており、時間増分値に関して、クーラン係数を 0.1 として決定した。

Fig.4.20, 21 に、時間と初期のエネルギーで正規化した正規化エネルギーとの関係を示す。Fig.4.20 より、MPM において、試験体が $x=50.0$ に位置する壁に到達し、壁に跳ね返り $x=0.0$ に位置する壁に到達すると（同図(a)の 30 秒付近）、ひずみエネルギーが徐々に上昇し、その結果、エネルギー保存則が成り立たなくなっている。また、3 回目の壁への衝突の時（同図(a)の 60 秒付近）にひずみエネルギーが高くなり、その後運動エネルギーが大きくばらつく結果となった。GIMP においては、uGIMP ならびに cpGIMP とともに MPM に比べ安定した解を得ているが、2 回目の壁への衝突を機にひずみエネルギーが増加する結果となった。Fig.4.21 に MLS-MPM の結果を示す。MPM においては、4 回目の壁への衝突後（同図の 90 秒付近）、若干エネルギーの変動があったものの、どの手法も壁の衝突後におけるひずみエネルギーが安定しており、エネルギー保存則が成り立つ結果となった。すなわち、着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子で補間することで、各粒子におけるひずみ増分値の誤差が少なくなり、連続体のひずみエネルギーの誤差を抑えることが可能であることがわかった。

以上より、MPM ならびに uGIMP では、連続体に作用する荷重により応力値が高く評価される場合があるが、cpGIMP では MPM, uGIMP にくらべ安定した応力が算出される。しかしながら、cpGIMP においても応力値が振動するため、MLS 法と併用する必要があることがわかった。よって、MLS 法と cpGIMP を併用することで、応力値が高く評価されることを抑え、安定した解析を行うことが可能であると考えられる。

4.6. 結語

本章では、粒子法の一つである Material Point Method (MPM) に関して、動弾性解析時における解の変動特性を把握し、弾性エネルギーの変動に関する抑制手法を提案した。具体的には、移動最小自乗法 (MLS 法: Moving Least Squares Method) に基づき、着目粒子のひずみ増分値を近傍粒子のひずみ増分値で補間することで、エネルギー変動の抑制を行った。本章で得られた結果を以下に列記する。

- (1) MLS 法に基づき、MPM の着目粒子のひずみ増分値を補間する MLS-MPM を提案した。
- (2) 棒の準静的問題において、MPM ならびに GIMP とともに理論解と同程度の解が得られるものの、 W 値($=\rho_0|b|L_0$)が高くなると理論解から離れ、応力値が振動することがわかった。また、uGIMP に比べて cpGIMP は解の振動が少ないことがわかった。そして、MLS 法を導入することで応力値の振動を抑えることができる結果となった。
- (3) 棒の動的問題において、MPM では角張った応力波が得られ、GIMP においては MPM にくらべ滑らかな応力波となったものの、角張った箇所が見られる応力波となった。そして、MLS 法を導入することで、MPM ならびに GIMP とともに応力波が滑らかになり、境界に近づくにつれ、応力波の減衰も見られる結果となった。
- (4) 物体の平行移動の問題においては、MPM および GIMP とともに壁への衝突後、ひずみエネルギーが高くなりエネルギー保存則が成立しなくなった。一方、MLS 法を導入することで、壁への衝突後のエネルギー変動が抑えられ、エネルギー保存則を満たすことが可能となった。

本章では、MPM のエネルギー変動問題に対する抑制手法の提案を行い、弾性体の準静的、動的、平行移動問題にて精度検証を行った。今後は、地盤、岩盤の崩壊、変形、移動挙動への本手法の更なる発展が期待できる。

参考文献

- 4.1) 土田孝, 湯怡新: 港湾構造物における最適な円弧すべりの安全率, 土木学会論文集, No.596/III-43, pp.295-306, 1998.
- 4.2) 菊沢正裕, 長谷川高士, 内田一徳, 片平辰義: 層状斜面の延伸模型実験と安定解析, 土木学会論文集, No.430/III-15, pp.49-58, 1991.
- 4.3) Goodman, R.E., Taylor, R.L. and Breeke, T. L.: A model for the mechanics of jointed rock, *Journal of the Soil Mechanics & Foundations, Division. ASCE*, pp.637-660, 1968.
- 4.4) Cundall, P. A. and Board, M.: A microcomputer program for modelling large-strain plasticity problems, *Proc. 6th Int Conf on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Austria*, pp.2101-2108, 1988
- 4.5) 中川光雄, 蔣宇静, 江崎哲郎: 大変形理論の岩盤挙動および安定性評価への適用, 土木学会論文集, No.575/III-40, pp.93-104, 1997.
- 4.6) Cundall, P. A.: Computer model for simulating progressively large scale movements in blocky systems, *Proc. of ISRM Symp., Nancy, II-8*, pp.129-136, 1971.
- 4.7) 大西有三, 佐々木猛, Shi, G. H.: 不連続変形法 (DDA), 丸善, 2005.
- 4.8) 小山倫史, 赤尾悟史, 西山哲, 大西有三: 岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法 (DDA) の適用に関する研究, 土木学会論文集 C, Vol.65, No.3, pp.644-662, 2009.
- 4.9) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modeling, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989.
- 4.10) Marsden, J. E. and Hughes, T. J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, 1994.
- 4.11) Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- 4.12) 長田健吾, 清水義彦, 若井明彦: 個別要素法を用いた流砂解析における問題点に関する考察, 応用力学論文, Vol.7, No.2, pp.1033-1041, 2004.
- 4.13) 藤岡奨, 牛島省: エネルギーの保存性を考慮した DEM における接触力の評価法, 水工学論文集, Vol.49, No.1, pp.751-756, 2005.
- 4.14) Wu, J. H., Juang, C. H. and Lin, H. M.: Vertex-to-face contact searching algorithm for three-dimensional frictionless contact problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.63, pp.876-897, 2005.
- 4.15) Yeung, M. R., Jiang, Q. H. and Sun, N.: A model of edge-to-edge contact for three-dimensional discontinuous deformation analysis, *Computers and Geotechnics*, Vol.34, pp.175-186, 2007.
- 4.16) Wu, J. H.: New edge-to-edge contact calculating algorithm in three-dimensional discrete numerical analysis, *Advances in Engineering Software*, Vol.39, pp.15-24, 2008.

- 4.17) Beyabanakia, S. A. R., Mikolab, R. G. and Hatamib, K.: Three-dimensional discontinuous deformation analysis (3-D DDA) using a new contact resolution algorithm, *Computers and Geotechnics*, Vol.35, pp.346-356, 2008.
- 4.18) Liu, G. G. R. and Liu, M. B.: Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method, *World Scientific*, 2003.
- 4.19) Shaofan, L. and Wing K. L.: Meshfree Particle Methods, *Springer*, 2004.
- 4.20) Li, S. and Liu, W. K.: Meshfree Particle Methods, *Springer*, 2007.
- 4.21) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 4.22) Belytschko, T., Krogauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, pp.3-47, 1996.
- 4.23) 越塚誠一：粒子法，培風館，2005.
- 4.24) Matsubara, H. and Yagawa, G.: Convergence studies for Enriched Free Mesh Method and its application to fracture mechanics, *Interaction and Multiscale Mechanics: An International Journal*, Vol.2, No.3, pp.277-293, 2009.
- 4.25) Yagawa, G. and Matsubara, H.: Enriched Free Mesh Method: An Accuracy Improvement for Node-based FEM, *Computational Plasticity, Springer*, Vol.7, pp.207-219, 2007.
- 4.26) 松原仁，矢川元基：Patch by Patch 型混合法における基底関数の応用とその精度，応用力学論文集，Vol.10, pp. 201-209, 2007.
- 4.27) Tian, R., Matsubara, H. and Yagawa, G.: Advanced 4-node tetrahedrons, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.68, pp.1209-1231, 2006.
- 4.28) Naili, M., Matsushima, T. and Yamada, Y.: A 2D Smoothed Particle Hydrodynamics method for liquefaction induced lateral spreading analysis, *Journal of applied mechanics, JSCE*, Vol.8, pp.591-599, 2005.
- 4.29) 佐藤忠信，松丸貴樹：メッシュフリー法による地盤の液状化・流動解析，土木学会論文集 C，Vol.813, pp.89-101, 2006.
- 4.30) 五十里洋行，後藤仁志：MPS 法弾塑性解析による粘性土河岸崩落過程の計算力学，水工学論文集，Vol.53, pp.1069-1074, 2009.
- 4.31) 五十里洋行，後藤仁志，吉年英文：斜面崩壊誘発型津波の数値解析のための流体－弾塑性体ハイブリッド粒子法の開発，土木学会論文集 B2（海岸工学），Vol.65, No.1, pp.46-50, 2009.
- 4.32) 吉田郁政：MPS 法を用いた地盤構造物の地震時破壊挙動解析のための基礎的検討，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.67, No.1, pp.93-104, 2011.
- 4.33) 井鳥聖也，入部綱清，仲座栄三：MPS 法における圧力ポアソン方程式のディリクレ境界条件判定の改善，土木学会論文集 B2（海岸工学），Vol.68, No.1, pp.17-28, 2012.

- 4.34) Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H. L.: A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.118, pp.179-196, 1994.
- 4.35) Sulsky, D., Zhou, S. J. and Schreyer, H. L.: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *Computer Physics Communications*, Vol.87, pp.236-252, 1995.
- 4.36) Harlow, F. H.: PIC and its progeny, *Computer Physics Communications*, Vol.48, pp.1-10, 1988.
- 4.37) Bardenhagen, S. G., Brackbill, J. U. and Sulsky, D.: The material-point method for granular materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.187, pp.529-541, 2000.
- 4.38) Huang, P., Zhang, X., Ma, S. and Huang, X.: Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.85, pp.498-517, 2011.
- 4.39) Andersen, S. and Andersen, L.: Modelling of land-slides with the material-point method, *Computational Geosciences*, Vol.14, pp.137-147, 2010.
- 4.40) Zhang, H.W., Wang, K.P. and Chen, Z.: Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.198, pp.1456-1472, 2009.
- 4.41) Beuth, L., WiReckowsk, Z. and Vermeer, P. A.: Solution of quasi-static large-strain problems by the material point method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.35, pp.1451-1465, 2011.
- 4.42) Andersen, S. and Andersen, L.: Analysis of spatial interpolation in the material-point method, *Computers & Structures*, Vol.88, pp.506-518, 2010.
- 4.43) 桐山貴俊 : MPM を用いた三軸供試体のせん断帯形成に関する数値解析的検討, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.70, No.2, pp.I_441-I_451, 2014.
- 4.44) 阿部慶太, JOHANSSON Jörgen, 小長井一男 : MPM を応用した高速長距離土砂流動の運動範囲予測のための数値解析手法, 土木学会論文集 C, Vol.63, No.1, pp.93-109, 2007.
- 4.45) Bardenhagen, S. G.: Energy Conservation Error in the Material Point Method for Solid Mechanics, *Journal of Computational Physics*, Vol.180, pp.383-403, 2002.
- 4.46) Nairn, J. A.: Material Point Method Calculations with Explicit Cracks, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.4, No.6, pp.649-663, 2003.
- 4.47) Bardenhagen, S. G. and Kober, E. M.: The generalized interpolation material point method, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.5, pp.477-495, 2004.
- 4.48) Wallstedt, P. C. and Guilkey, J. E.: An evaluation of explicit time integration schemes for use with the generalized interpolation material point method,

- Journal of Computational Physics*, Vol.277, pp.9628-9642, 2008.
- 4.49) Steffen, M., Wallstedt, P. C. and Kirby, R. M.: Examination and Analysis of Implementation Choices within the Material Point Method (MPM), *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.31, No.2, pp.107-127, 2008.
- 4.50) Edo, T., Matsubara, H. and Hara, H.: Kita-Uebaru Landslide Analysis by using Material Point Method (MPM), *Proceedings of the 7th International Joint Symposium on Problematic Soils and Geoenvironment in Asia*, pp.127-130, 2013.
- 4.51) 宜保清一, 中村真也, 木村匠, 陳伝勝: 沖縄, 島尻層群泥岩分布地域における初生型地すべりの縦断面形状と発生場の特徴-地すべりの危険度評価に関連して-, *日本地すべり学会誌*, Vol.46, No.3, pp.154-161, 2009.
- 4.52) 宜保清一, 佐々木慶三, 周亜明, 中村真也: 2006 (平成 18) 年 6 月 10 日沖縄県中城村で発生した北上原地すべりの調査報告, *日本地すべり学会誌*, Vol.43, No.2, pp.44-47, 2006.
- 4.53) Tokashiki, N. and Aydan, Ö.: Kita-Uebaru natural rock slope failure and its back analysis, *Environmental Earth Sciences*, Vol.62, pp.25-31, 2011.
- 4.54) Aydan, Ö., Kumsar, H., Ulusay, R. and Shimizu, Y.: Assessing limiting equilibrium methods (LEM) for slope stability by discrete finite element method (DFEM), *Proceedings of IACMAG, Wuhan*, pp.1681-1686, 1997.
- 4.55) 木村匠, 宜保清一, 中村真也, 佐々木慶三, 周亜明: 島尻層群泥岩地すべりの発生・再滑動に関与する強度-沖縄, 安里地すべりを事例として-, *日本地すべり学会誌*, Vol. 47, No. 3, pp.138-146, 2010.
- 4.56) 中村真也, 宜保清一, 木村匠, ブッディシワラタヴィタナ: 各種地すべり形態におけるすべり面平均強度定数-沖縄, 島尻層群泥岩地すべりを事例として-, *日本地すべり学会誌*, Vol. 48, No. 5, pp.251-262, 2011.
- 4.57) Drucker, D. C. and Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.10, No.2, pp.157-165, 1952.
- 4.58) Drucker, D. C. and Prager, W.: Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, *Quarterly of applied mathematics*, Vol.10, No.2, pp.157-65, 1952.
- 4.59) 阿部慶太, Jorgen Johansson, 小長井一男: MPM を用いた乾燥砂の流動解析, *土木学会地震工学論文集*, Vol.28, No.96, pp.1-10, 2005.
- 4.60) Søren, A. and Lars, A.: Analysis of Stress Updates in the Material-point Method, *Proceedings of the Twenty Second Nordic Seminar on Computational Mechanics*, pp.129-134, 2009.
- 4.61) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol.37, No.155, pp.141-158, 1981.
- 4.62) Chaniotis, A. K. and Poulikakos, D.: High order interpolation and differentiation using B-splines, *Journal of Computational Physics*, Vol.197, pp.253-274, 2004.
- 4.63) Belytschko, T. and Mullen, R.: Explicit integration of structural problems, *Finite elements in nonlinear mechanics*, Vol.2, pp.697-720, 1977.

第 5 章 多面体形状を有する幾何モデリングシステムの開発
**Development of Geometrical Modeling for Arbitrary Polyhedral
Blocks**

5.1 緒言

地盤岩盤分野において、これまで多くの研究者が地盤・岩盤の大変形問題を精度よく評価することを試みてきた。その評価手法は様々で、斜面内部のすべり面（弱面）を円弧と仮定し、そのすべり土塊を複数個に分割し、そのブロック間に作用する応力を考慮せず極限状態を単純化し、地盤のせん断応力、有効応力、間隙水圧、せん断強さを用いてその斜面の安定性を評価するフェレニウス法（Fellenius 法）^{5.1)}、ブロック間に作用する応力をモデル化したビショップ法（Bishop 法）^{5.2)}や、すべり土塊を剛体とみなし土塊の変形量を算定するニューマーク法（Newmark 法）^{5.3) - 5.5)}等がある。さらに、地盤工学の発展、観測・計算機器の発展に伴い、上記の簡易法等を用いた場合においても土塊の安定性評価が可能になってきており、今なおこれらの手法が多く用いられている現状がある。異常気象や地震の多発に伴い、地盤・岩盤の崩壊、大変形や崩壊後の流動挙動が複雑化してきており、Newmark 法等を用いた簡易法では、それらの複雑な挙動を高精度に解くことは不可能である。したがって、より詳細な挙動を把握できる評価手法の開発が重要であると思われる。

このような挙動の解明に数値計算技術が適用され、多くの評価手法の開発が行われてきている^{5.6), 5.7)}。その中でも粒子法（SPH 法、MPS 法等）、メッシュフリー法要素を用いないメッシュレス法に関する研究が近年盛んに行われ^{5.8) - 5.17)}、地盤・岩盤分野においても地盤・岩盤の変形、破壊問題に適用されている^{5.18) - 5.22)}。第4章において、著者が用いた解析手法（MPM：Material Point Method）もその粒子法の一つである。また地盤・岩盤の大変形、崩壊現象等の離散体挙動を評価する手法として、これまでにジョイント要素を有する有限要素法（FEM）^{5.23)}や大変形理論を考慮した有限差分法（FDM）^{5.24)}等が用いられ、地盤の変形挙動に適用されてきた。しかしながら、大変形に伴い計算破断や多くの亀裂を有する岩盤等の複雑化するモデルに対して、計算コストが膨大にかかるなどの問題が指摘されてきた。その他にも不連続岩盤の変形挙動を解析する手法として、等価弾性体モデル^{5.25), 5.26)}、クラックテンソル理論^{5.27)}、個別要素法（DEM）^{5.28)}、不連続変形法（DDA）^{5.29) - 5.31)}、剛体ばねモデル（RBSM）^{5.32)}、修正仮想変位法（FESM）^{5.33)}等がある。これらの解析手法を用いて評価する場合、モデルの作成が必須となるが、複雑形状を有する場合においてはモデルの作成は極めて困難となる。さらに、地すべり面がわかっているような簡易的な形状においても、その土塊を複数のブロックで構成させることは難しく、さらに複数の多面体ブロックを構成させることは極めて困難である。

そこで本章では、複数の多面体を有する任意形状におけるブロックモデリングシステムの開発を目的とする。大西ら^{5.31)}は不連続変形法（DDA）における2次元の解析モデルを作成する際に、解析対象となるモデルより大きいポロノイ図を作成し、そこに解析対象となるモデルの座標点をマッピングし、そして線分を切り、得られた線分データを用いて多角形ブロックを有する解析モデルの作成を行っている。しかしながら、モデル形状が簡易的な場合、線分を作成することは容易であるが、複雑化した場合、線分を作成することは容易ではない。また、このモデル化技術を3次元へ拡張をした場合、ポロノイ図の中から2次元平面における線分と等価な平面

を作成することは難しいと考えられる。そこで本章では、自動メッシュ生成技術に着目した。近年において有限要素法等で使用可能な自動メッシュ生成技術は急速に進歩しており、機械部品のように極めて複雑な形状を有する対象であっても高い精度のメッシュモデルが比較的容易に作成できるようになっている。本章ではこの技術を2, 3次元における多面体ブロックモデリングシステムに用いた。2次元ブロックのモデリングには、オープンソースの2次元高精度メッシュジェネレータである“Triangle”^{5.34) - 5.36)}を用いており、3次元のブロック形状をモデル化する場合には“TetGen”^{5.37) - 5.39)}を用いている。そして、上記の自動メッシュ生成技術を用いて任意形状を要素分割し、要素分割された任意形状をブロック化し、多面体ブロックのモデリングを行う。以下に、そのブロックモデリングシステムの詳細を示す。

5.2 多面体ブロックのモデリングシステムの開発

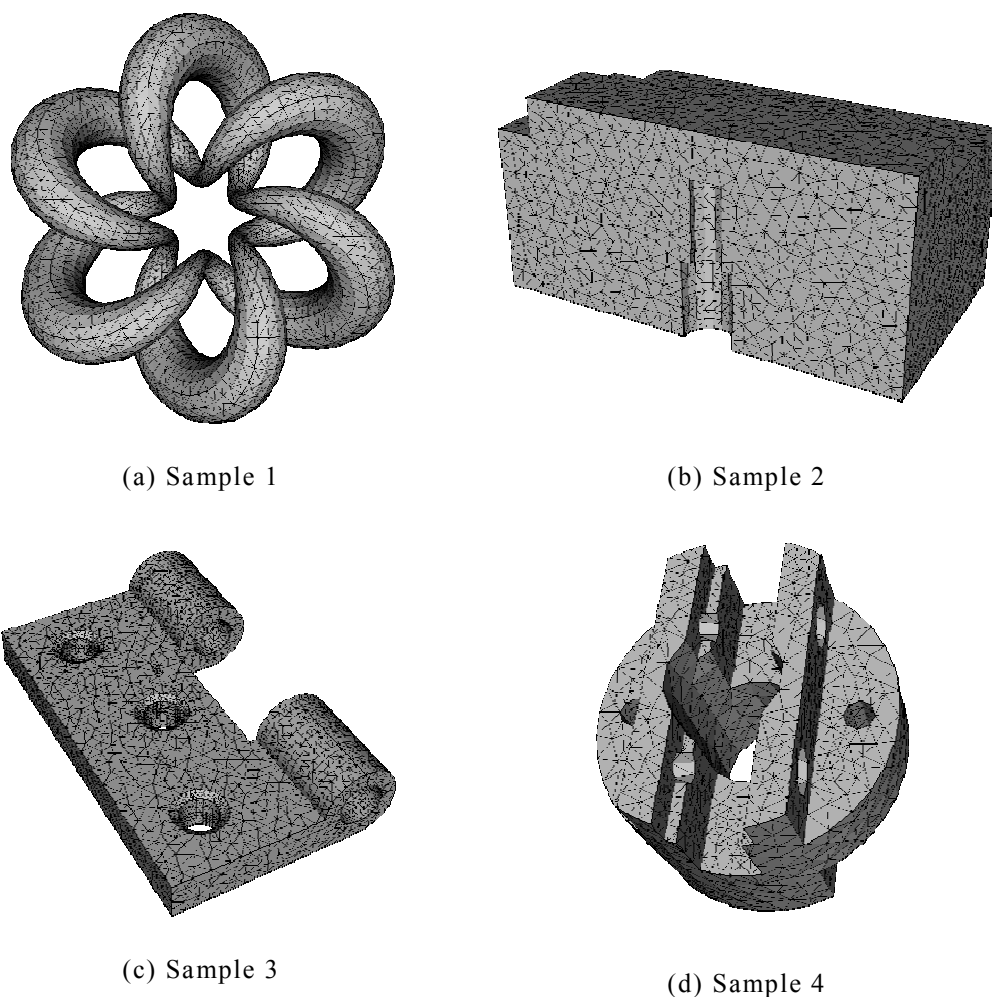


Fig.5.1 The tetrahedrons of three-dimensional arbitrary models by TetGen

5.2.1 任意形状の要素分割

近年，計算機性能の進歩に伴い，有限要素法^{5.40)}等で使用可能な自動メッシュ生成技術^{5.41)}は急速に進歩している。三角形あるいは四面体形状に関しては高精度なメッシュモデルが比較的容易に作成可能である^{5.34) - 5.39)}。そこで本章では，2次元および3次元高精度メッシュジェネレータである“Triangle”^{5.42)}および“TetGen”^{5.43)}を用いて，任意形状の三角形要素または四面体要素に分割した。Fig.5.1にTetGenを用いて任意形状を四面体一次要素に分割したモデルを示す。同図に示すように，高精度メッシュジェネレータを用いると極めて複雑な形状においても，容易に要素分割することができ，高品質な要素の作成が可能である。Fig.5.2にTiangleならび

に TetGen で用いられる poly ファイルの形式を示す。Fig.5.3, 5.4 に、一例として、その形式を用いた場合における三角形および四面体要素モデルを示しており、Fig.5.3 においては縦×横：1×1、Fig.5.4 には縦×横×高さ：1×1×1 の簡易形状を用いた。なお、Triangle ならびに TetGen におけるファイルの形式に関して、その他に node ファイル、ele ファイルなど複数のファイル形式が存在するが、各ファイル形式の詳細は参考文献 (5.42), (5.43) を参照されたい。Fig.5.3, 5.4 より、Triangle および TetGen を用いることで容易に任意形状の要素分割が可能であることが確認される。また Fig.5.3(B)(b) において、境界付近でいくつかの要素形状が他の要素形状より極端に変形していることがわかる。このような要素を FEM 等の格子法で用いると、応力を算出する際に極端に高い応力を算出してしまう。このようなメッシュは一般に品質が悪いとされている。一方、Triangle のコマンドライン引数を変更すると (Fig.5.3(B)(c) 参照)、境界付近において極め変形していた要素形状はなくなり、品質の良いメッシュが作成されていることが確認できる。5.4(B) に示すように、TetGen においも同様に、コマンドライン引数を変えることで要素形状が異なることが確認できる。すなわちコマンドライン引数を用いることで恣意的に要素形状を変えることができ、要素数、節点数、要素の品質を変更することが可能である。このことは以下にて後述するが、本手法はブロック形状を作成する際に、このメッシュジェネレータを用いていることから、このコマンドライン引数はブロック形状に大きく関係し、大小様々なブロックモデルや砂の様な同程度の粒径を有するブロック構造を作成する場合、極めて重要になってくる。Fig.5.5 に任意形状モデルの一部を恣意的に細かくしたモデルを示す。同図 (b) に示すように、部分的に細かくすることで、種々の要素形状が存在することが確認され、また要素数および節点数が増えていることがわかる。このように上記のメッシュジェネレータを用いると、任意形状内において一部だけ要素形状を小さくすることも可能であり、また空洞を有するモデルの作成も容易に行える。具体的に空洞を有するモデルを作成する場合、poly ファイルにおいて、「Part 1 -node list」に空洞の座標値を付加し、「Part 3 -hole list」にて空洞の個数ならびに各空洞の中心または空洞内の座標値を付加することで作成することが可能である。すなわち、複数の空洞を有し、大小様々な形状を有する地盤や岩盤のモデル化も容易に作成することができる。

5.2.2 ブロック構造のモデリングシステム

ここでは、2次元および3次元における多面体ブロックのモデリングシステムについて述べる。本章では、多面体ブロックの構造を作成する際に、前項にて詳説した三角形要素ならびに四面体要素を用いる。

(a) 2次元多面体ブロック

Fig.5.6 に、2次元のブロックモデリングシステムの概念図を示す。2次元におけるブロック構造は三角形要素を用いて作成した。同図(a)において、緑色の点は三角形要素の頂点、赤色の点は要素辺の中点、青色の点は三角形要素内における内接円の中心点を示す。まず同図 (a) に示すように、各三角形要素の頂点 (緑色の点)

Part 1 - node list

- First line: <# of vertices> <dimension (must be 2)> <# of attributes> <# of boundary markers (0 or 1)>
- Following lines: <vertex #> <x> <y> [attributes] [boundary marker]
- ...

Part 2 - segments list

- One line: <# of segments> <# of boundary markers (0 or 1)>
- Following lines: <segment #> <endpoint> <endpoint> [boundary marker]
- ...

Part 3 - hole list

- One line: <# of holes>
- Following lines: <hole #> <x> <y>
- Optional line: <# of regional attributes and/or area constraints>
- Optional following lines: <region #> <x> <y> <attribute> <maximum area>
- ...

(a) Poly file format of Triangle

Part 1 - node list

- First line: <# of points> <dimension (must be 3)> <# of attributes> <# of boundary markers (0 or 1)>
- Remaining lines list # of points:
- <point #> <x> <y> <z>[attributes] [boundary marker]
- ...

Part 2 - facet list

- One line: <# of facets> <boundary markers (0 or 1)>
- Following lines list # of facets:
- <facet #>
- ...
- where each <facet #> has the following format:
- One line: <# of polygons> [# of holes] [boundary marker]
- Following lines list # of polygons:
- <# of corners> <corner 1> <corner 2> ... <corner #>
- ...
- Following lines list # of holes:
- <hole #> <x> <y> <z>
- ...

Part 3 - hole list

- One line: <# of holes>
- Following lines list # of holes:
- <hole #> <x> <y> <z>
- ...

Part 4 - region attributes list

- One line: <# of region>
- Following lines list # of region attributes:
- <region #> <x> <y> <z><region number><region attribute>

(b) Poly file format of TetGen

Fig.5.2 An example of poly file format of Triangle and TetGen

```

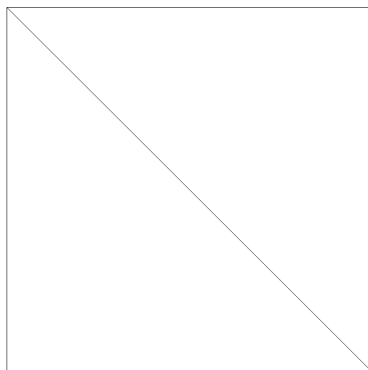
# Part 1 - node list
# node count, 3 dim, no attribute, no boundary marker
4 2 0 0
# Node index, node coordinates
1  0 0  0
2  0 1  0
3  1 0  0
4  1 1  0

# Part 2 - segments list
# segment count, no boundary marker
4  0
# facets
1  1  3  0
2  3  4  0
3  4  2  0
4  2  1  0

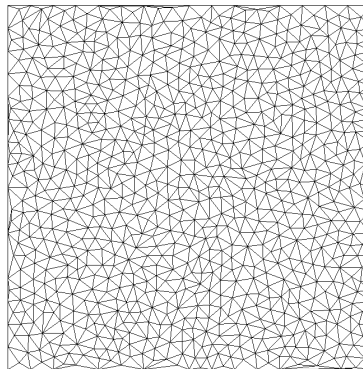
# Part 3 - hole list
0          # no hole

```

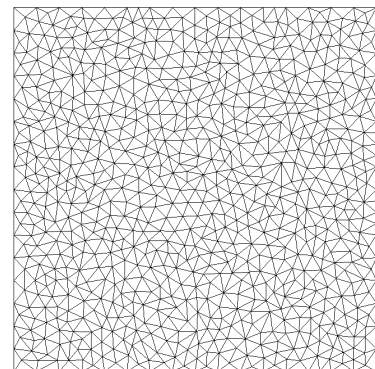
(A) An example of poly file (1x1.poly)



(a) Command line: `-p`
(#Element: 2:, #Node: 4)



(b) Command line: `-pa0.01`
(#Element: 1587, #Node: 820)



(c) Command line: `-pqa0.01`
(#Element: 1545, #Node: 809)

(B) Examples of mesh-division

Fig.5.3 Mesh modeling a box (1x1) using Triangle

```

# Part 1 - node list
# node count, 3 dim, no attribute, no boundary marker
8 3 0 0
# Node index, node coordinates
1 0.0 0.0 0.0
2 1.0 0.0 0.0
3 1.0 1.0 0.0
4 0.0 1.0 0.0
5 0.0 0.0 1.0
6 1.0 0.0 1.0
7 1.0 1.0 1.0
8 0.0 1.0 1.0

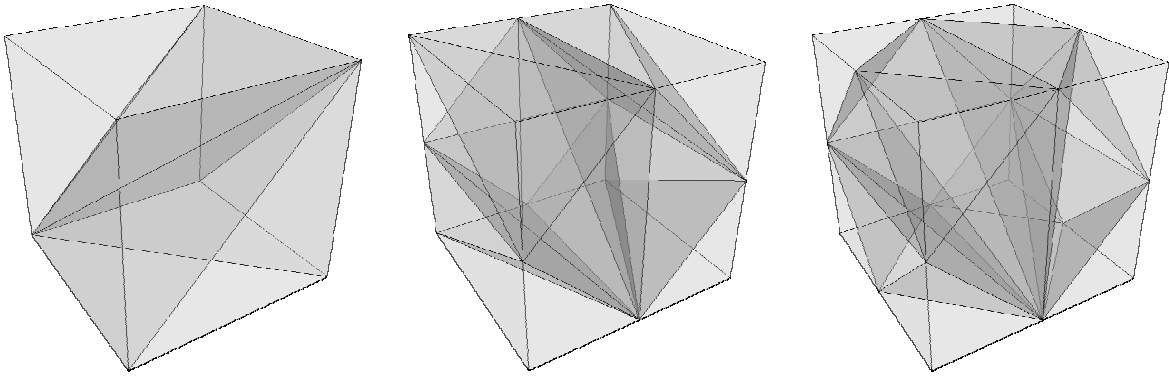
# Part 2 - facet list
# facet count, no boundary marker
6 0
# facets
1 # 1 polygon, no hole, no boundary
marker
4 1 2 3 4 # front
1
4 5 6 7 8 # back
1
4 1 2 6 5 # bottom
1
4 2 3 7 6 # right
1
4 3 4 8 7 # top
1
4 4 1 5 8 # left

# Part 3 - hole list
0 # no hole

# Part 4 - region list
0 # no region

```

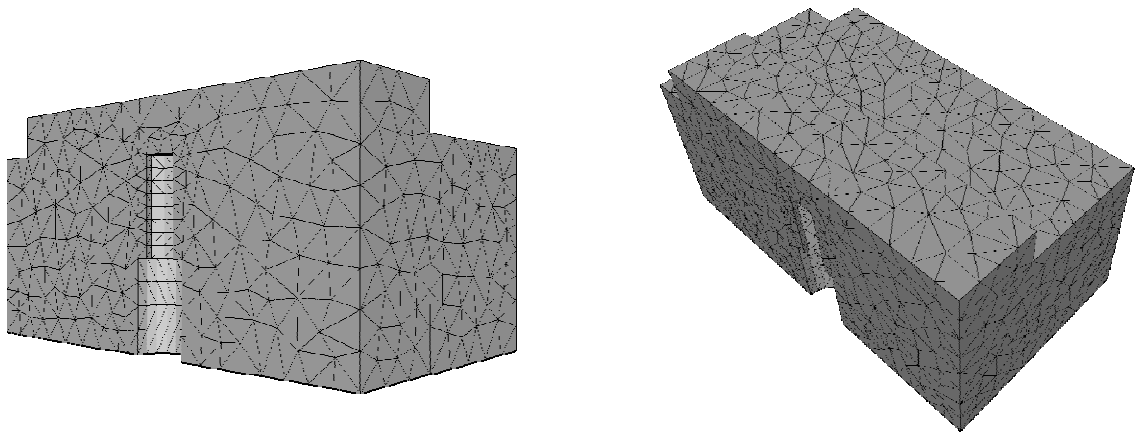
(A) An example of poly file (1x1x1.poly)



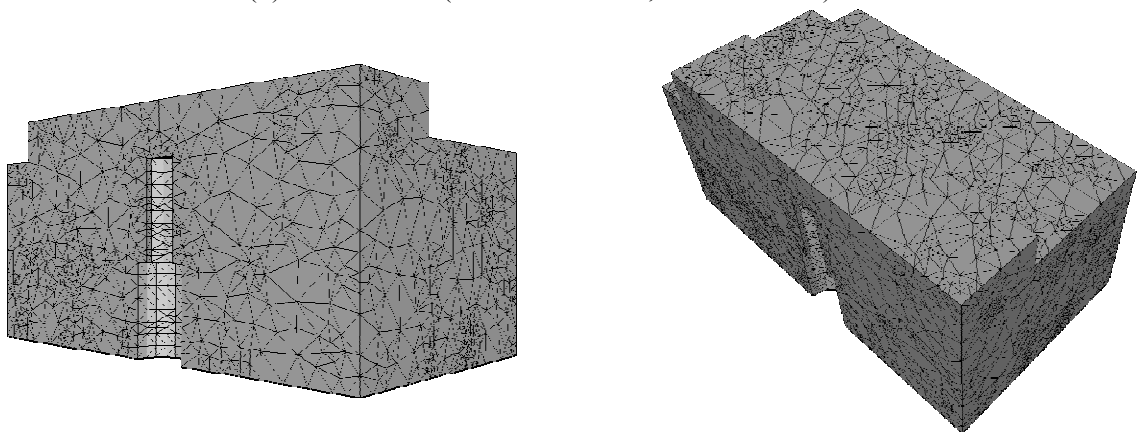
(a) Command line: -p (#Element: 6, #Node: 8) (b) Command line: -pqa0.1 (#Element: 18, #Node: 16) (c) Command line -pq1a0.1 (#Element: 22, #Node: 22)

(B) Examples of mesh-division

Fig.5.4 Mesh modeling a box (1x1x1) using TetGen



(a) Base model (#Element: 7639, #Node: 1693)



(b) Remeshing model (#Element: 49556, #Node: 9416)

Fig.5.5 Comparison between base model and remeshing model

ならびに要素辺の中点（赤色の点），三角形要素における内接円の中心点（青色の点）を探し，要素辺の中点と内接円の中心点を結ぶ（同図（b）参照）。そして，その結び囲まれるできる領域（同図（d）における茶色の領域）を，2次元におけるブロック構造とした。すなわち，連続体の内部においては各頂点を囲む領域がブロック構造となる。ただし同図（c）に示すように，境界においては頂点，要素辺の中点，内接円の中心点とで囲まれる領域をブロック構造とした。ここで，上記のようにブロック構造を作成する場合，常に頂点，要素辺の中点，内接円の中心点を用いると，Triangleの要素分割技術は極めて高く，Fig.5.3に示すように，境界付近においては大きく変形した要素を作成することはできるが，部分的に細かくする場合を除き，内部においてあまり要素形状は大きく異なることはないため，ブロックの形状にあまり変化がなく常に類似したような形状ができる。また上述したように，コマンドライン引数を用いることで境界における大きく変形した要素を修正し，全領域において同程度の要素（高品質なメッシュ）を作成することは容易である。しかしながら，自然界においてブロックの形状，大きさ等は多種多様であり，実存す

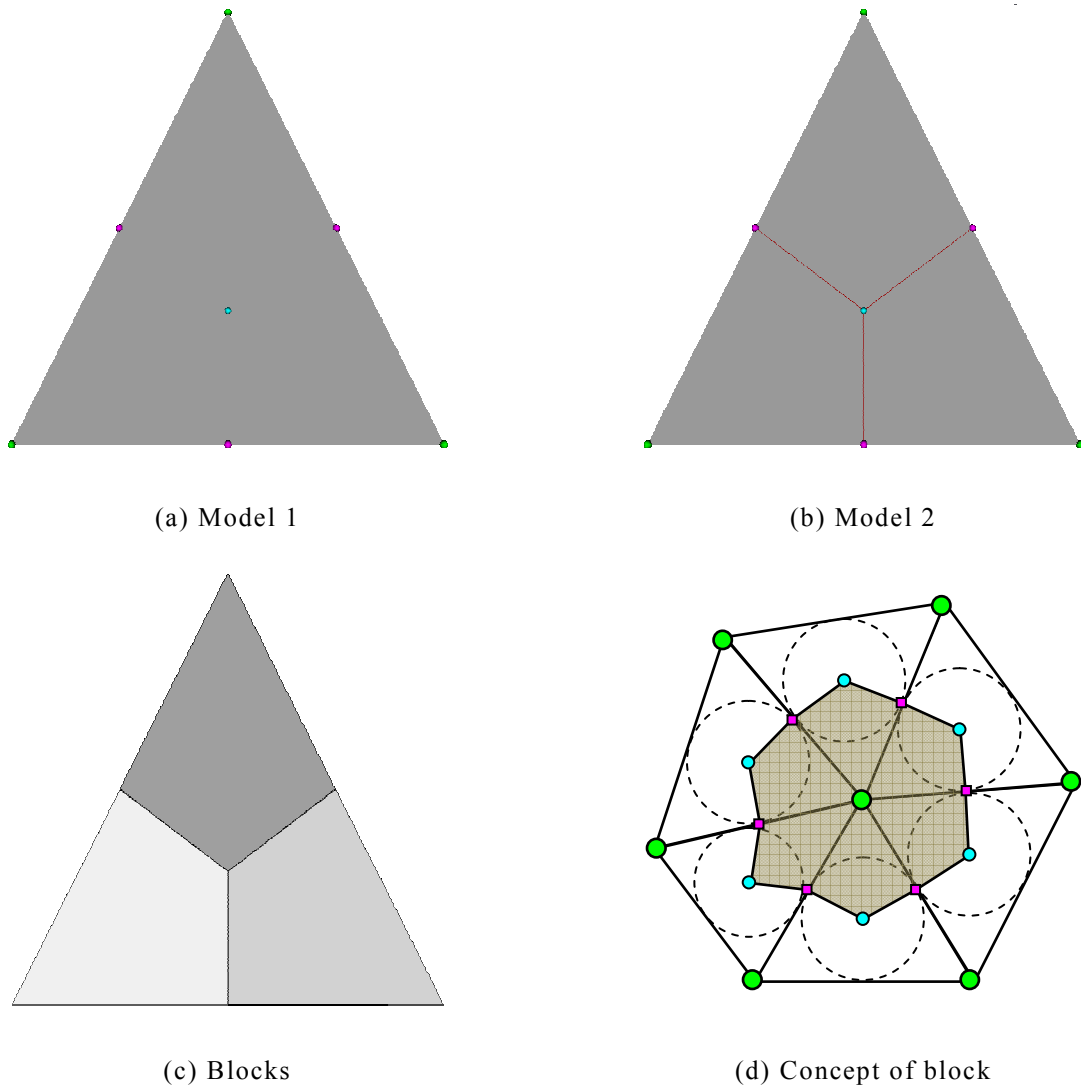


Fig.5.6 Modeling from triangle element to 2D blocks

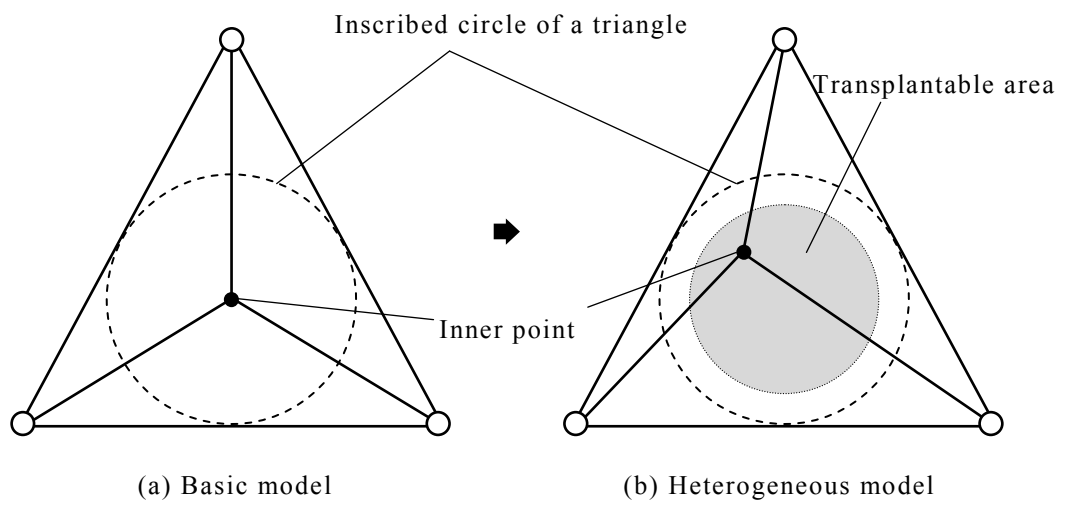


Fig.5.7 Illustration of heterogeneous modeling

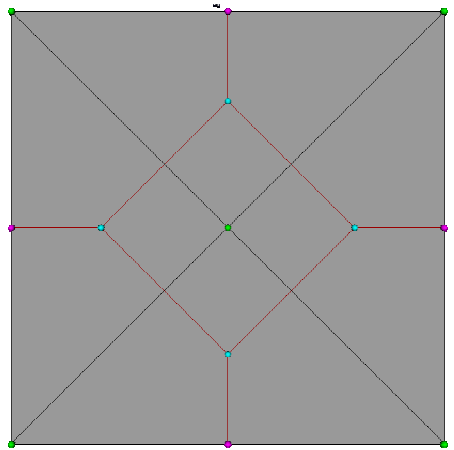
る地盤・岩盤を対象とする場合，そのような多種多様なブロック構造から成るモデルを作る必要がある。

そこで本章では，任意にブロック構造の形状を複雑化するために，三角形要素における内接円の中心点ではなく，内接円内の点をランダム用いることで多種多様な形状を有するブロック構造の作成を行った。Fig.5.7 にその概念図を示す。同図 (a) に示すように，基本的なモデルでは全要素における内接円の中心点を用いたが，ブロック構造を多種多様にし，複雑化させるために内接円内の点をランダムに用いることにした。Fig.5.8 に，内接円の中心点ならびに内接円内の点を用いた場合におけるブロック構造を示す。同図に示すように，内接円内の点をランダムに用いることで，より自然なブロック構造に近い形状が作成されると思われる。また，より均質な構造に近いモデルを作成する場合，Fig.5.7(b)に示すように，内接円内の点に移動可能領域 (Fig.5.7(b)における灰色の領域) を設けることで，容易に作成可能である。

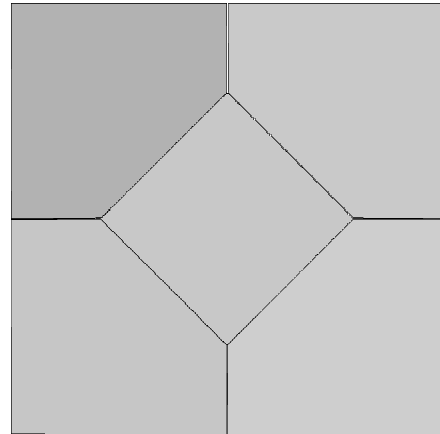
(b) 3次元多面体ブロック

Fig.5.9 に3次元のブロックモデリングシステムの概念図を示す。3次元におけるブロック構造は四面体一次要素を用いて作成した。同図 (b) において，緑色の点は四面体一次要素の頂点，赤色の点は要素辺の中点，青色の点は四面体要素の面における内接円の中心点を示す。3次元のブロック構造において，ブロックの面は四面体要素の頂点，各要素辺の中点，各要素面の重心，要素の重心を用いて形成することを仮定した。したがって，ブロック面は必ず4つの点で構成される。同図に示すように四面体要素が一つの場合，この要素から作成されるブロックは4つであり，各ブロックは6つの面を有している。各ブロック面は頂点，辺の中点，面の重心，辺の中点からなる面が3面，要素の重心，要素面の重心，要素辺の中点，要素面の重心からなる面の3面が存在する。隣接する四面体要素が存在する時，隣り合うブロック同士の重複する面を取り除いてできるブロックを1ブロックとした。すなわち四面体要素における頂点が解析領域の境界に位置していない場合，2次元ブロック同様に，その頂点はブロック面を形成する点としては用いないものとする。

Fig.5.10 に円柱のブロック化の概念図を示す。同図に示すように，上記のように3次元のブロック構造を作成することで，TetGen等を用いて四面体一次要素で構成される物体は全てブロック化することが可能である。Fig.5.11 に形状の異なる3次元ブロック構造の概念図を示す。同図に示すように，TetGenにおいて要素数の異なるモデルを作成することで (Fig.5.4 参照)，粒径の異なる3次元ブロック構造を作成することも容易である。ここで，2次元ブロック構造同様に，3次元においてもより自然界に存在するような多種多様な3次元ブロック構造を作成する必要がある。2次元ブロック構造においては，三角形要素における内接円内の点をランダム移動させることで多種多様なブロック構造の作成を可能としたが，3次元において，同様なアルゴリズムを用いる計算時間をかなり費やしてしまい，計算コストが膨大にかかる。上記の手法では，ブロックのサイズは要素サイズに依存するため，任意形状のモデルを四面体要素にて分割する際に，要素サイズを均一に分割した場合には各ブロックのサイズは均一となり，要素サイズをランダムに分割すると大小様々な

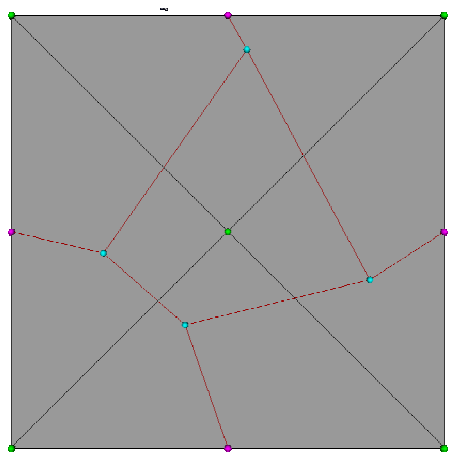


(a) Original mesh and its refinement

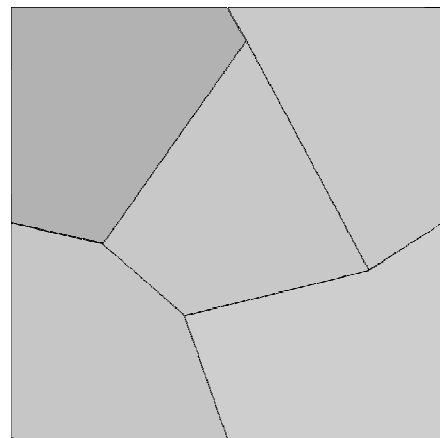


(b) Homogeneous blocks

(A) Homogeneous model



(a) Original mesh and its refinement



(b) Homogeneous blocks

(B) Heterogeneous model

Fig.5.8 Modeling of homogeneous and heterogeneous blocks

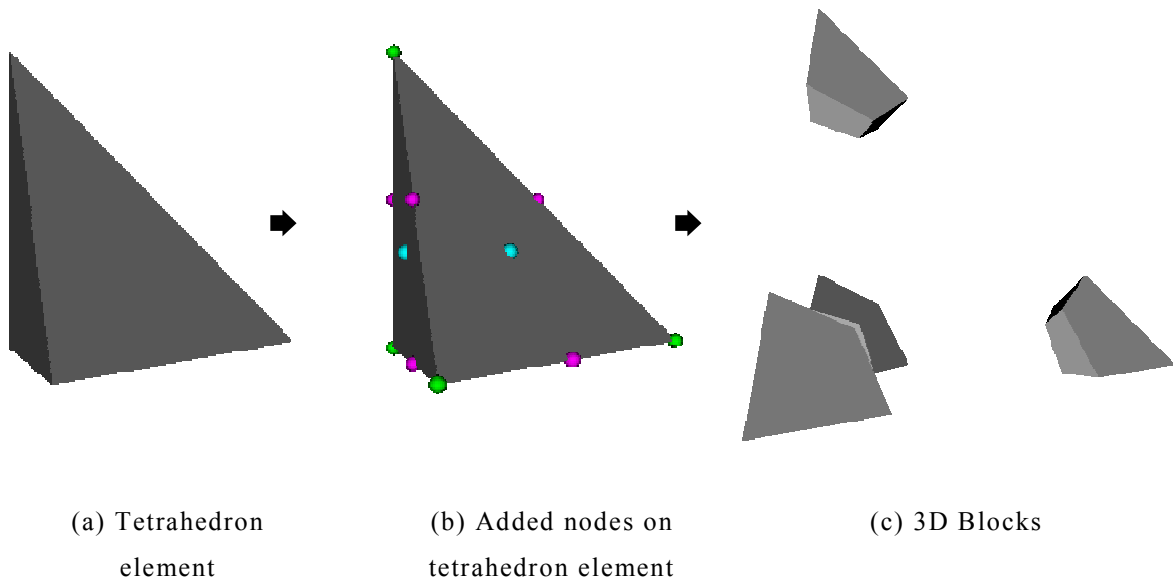


Fig.5.9 3D blocks modeling

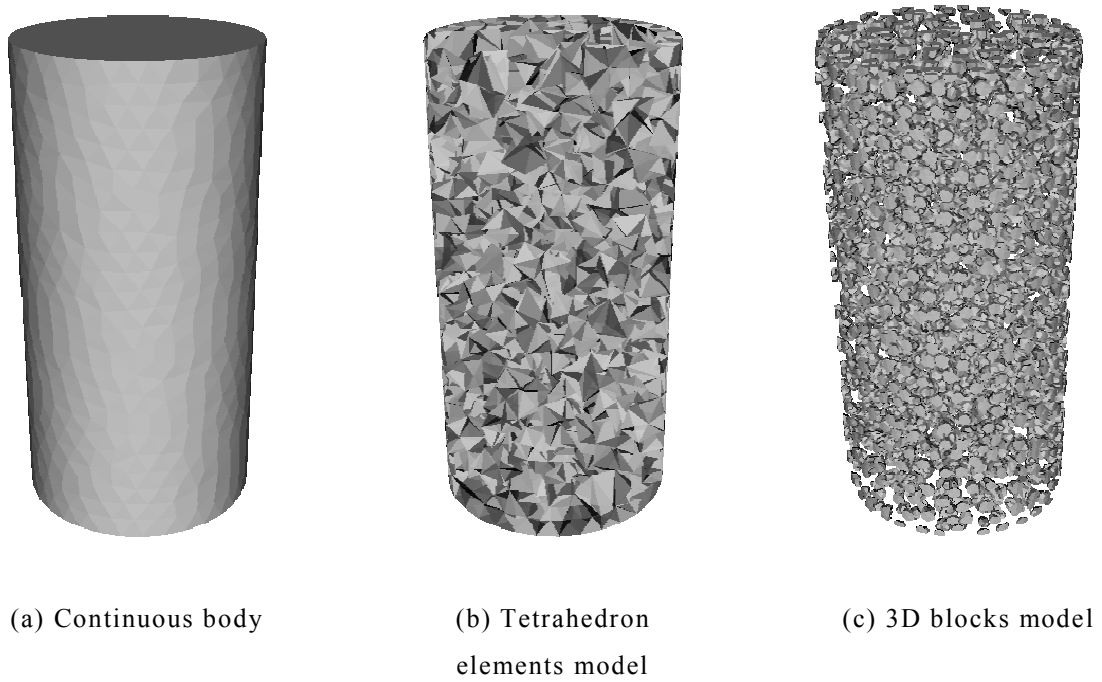


Fig.5.10 3D block modeling of a cylinder

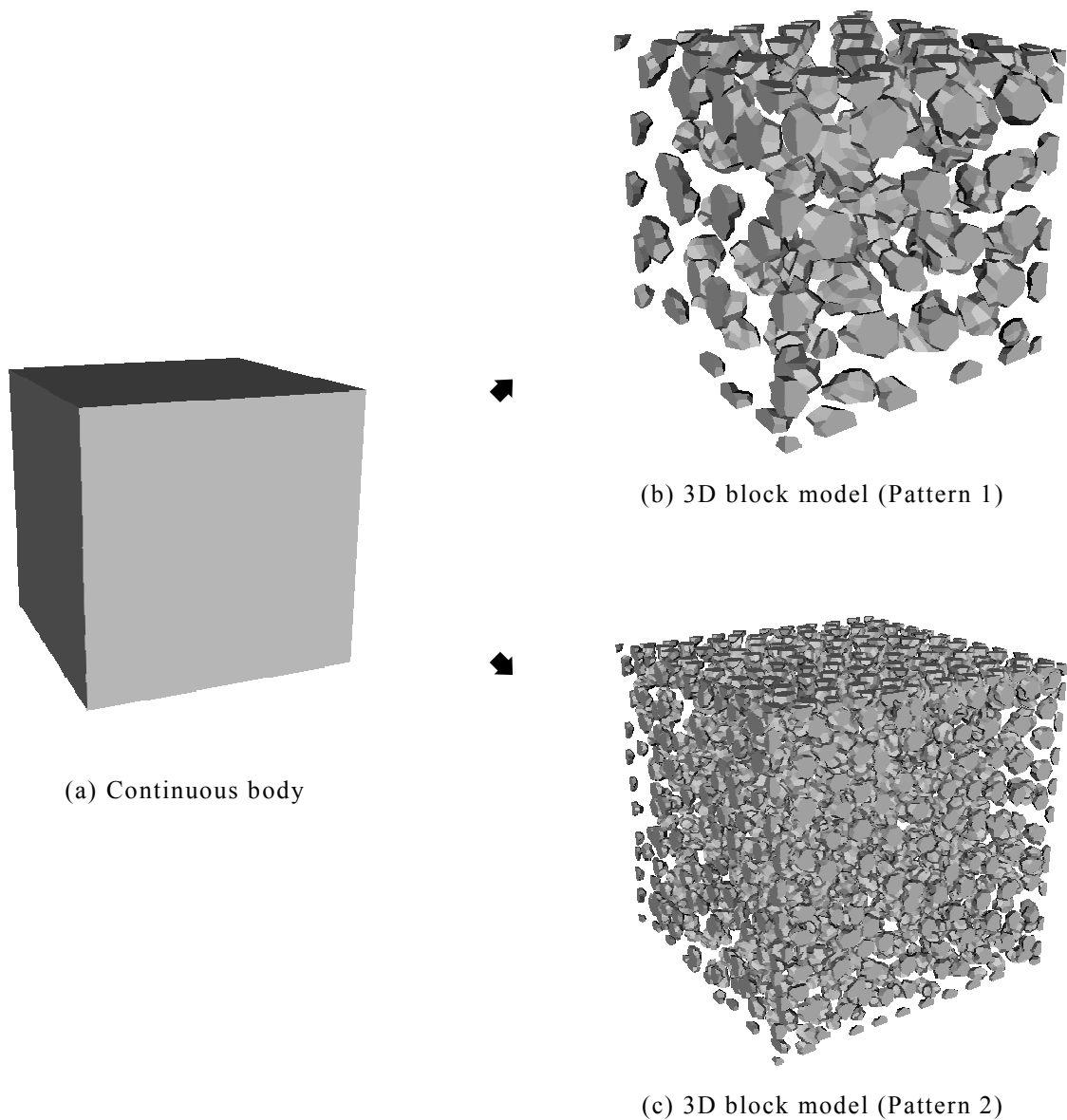


Fig.5.11 3D block model with difference block size

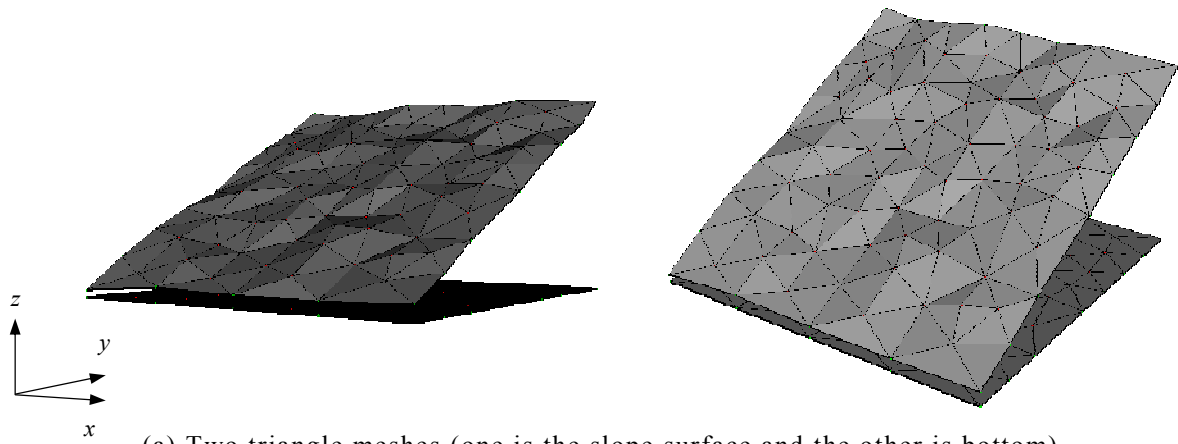
ブロックを有すモデルの作成が可能となる。そこで、TetGen を用いて任意形状のメッシュを作成時に、対象モデル内で部分的に細かい箇所や粗い箇所を作成するほうが計算時間を抑えることが可能であると考えた。したがって、3次元ブロック構造に関しては、TetGen で四面体一次要素を作成する際に、Fig.5.5 に示すように部分的に粗細箇所を作成し、大小様々な要素形状を有するメッシュを作成し、上記のブロックモデリングシステムを適用することで、多種多様な3次元ブロック構造モデルの作成を行った。

5.3 3次元地形のモデル化

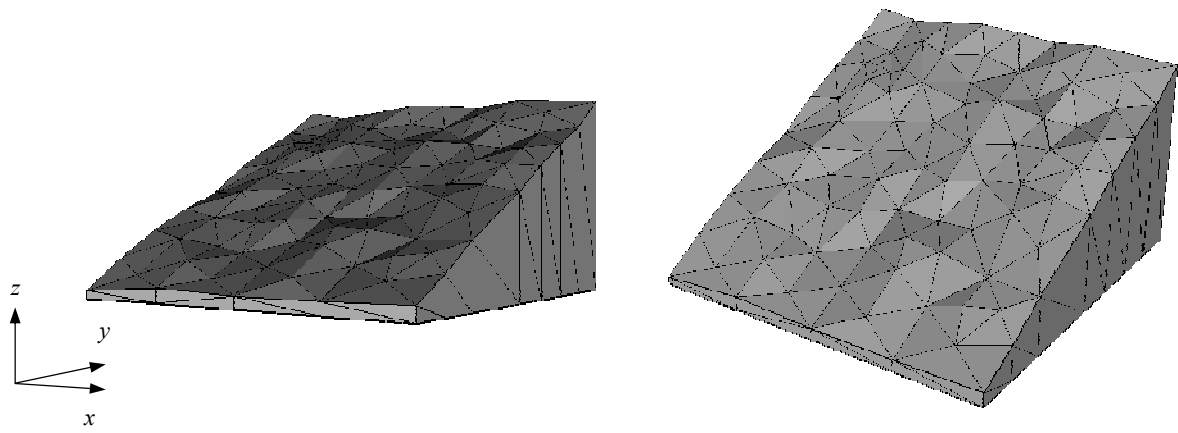
5.3.1 移動層のモデル化

ここでは、3次元地形のモデル化手法について述べる。モデル化する地形の平面を x - y 平面とし、高さ方向を z 方向とする。Fig.5.12 に地すべりモデルにおける移動層を模擬した3次元ブロックでモデリングした地形モデルを示す。同図 (a) 示すように、まず2次元のメッシュを二つ用いて、斜面部と底面部を作成する。底面部は $z=0$ とし作成し、斜面部は z 方向に任意の座標値を与えて作成した。斜面部と底面部はその地形の表面パッチとなることから TetGen おける poly ファイルとして用いることが可能であり、そこに斜面部と底部を結ぶ境界（側面）における節点同士の情報を付加することで表面パッチ (poly ファイル) を作成する (同図 (b) 参照)。そして、TetGen を用いて四面体要素に分割し、上記の3次元ブロックモデリングシステムを適用することでブロック構造の作成が可能である (同図 (c) 参照)。なお、同図 (c) に示すブロック構造は、各ブロック構造を明瞭にするために恣意的に小さくし表示している。Fig.5.13 に、より小さな粒径から成る3次元ブロック構造を示す。このモデルでは斜面をモデリングする際に、あらかじめ最初に用いる2次元メッシュの表面を細かくし、そして TetGen で四面体要素の分割する際にも要素形を小さくし作成することで、Fig.5.12 に比べ、より微細なブロック構造を作成した。

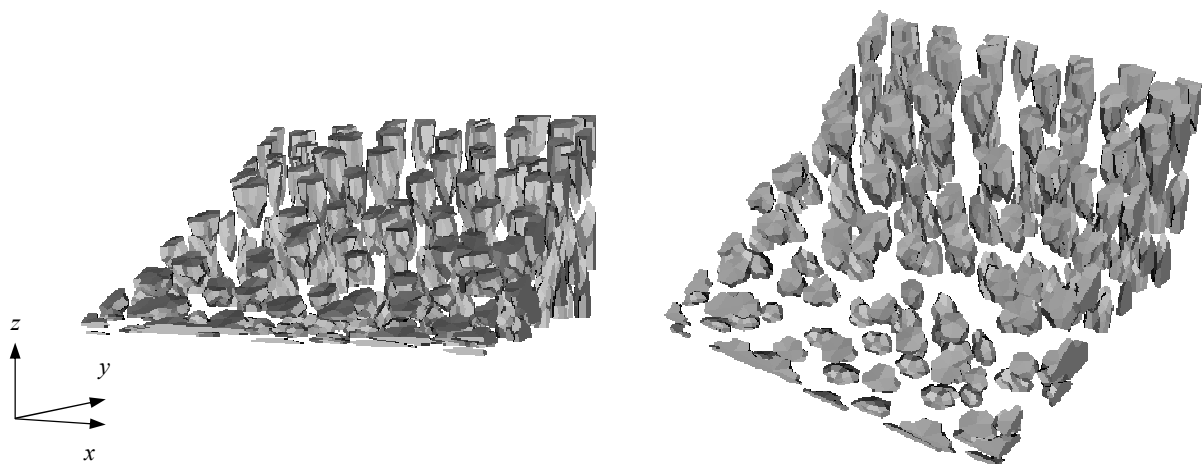
Fig.5.14 ならびに Fig.5.15 に砂山を模擬したモデルを示す。このモデルも上記の移動層と同様に、まず底面となる2次元平面のメッシュを作成し、 z 方向に任意の値を用いて上部面の形状を作成する。そして、底面と上部面における境界の節点同士を結び表面パッチを作成する (各図 (b) 参照)。そして本ブロック作成技術を用いて砂山を作成する。このとき、TetGen において四面体要素形状を大きく作成すると、岩のようなブロックの集合体からなる地形モデルができ (Fig.5.14(c) 参照)、四面体要素形状を小さくするとブロックの形状は小さくなり、より砂のようなブロックから成る地形が作成される (Fig.5.15(c) 参照)。また Fig.5.16 に示すように、それぞれで作成したブロックモデルを結合させることで、ブロック形状や大きさが異なるモデルの作成も可能であり。したがって、Fig.5.17 に示すように、複数の微細粒径と極めてブロックサイズが異なるブロックから成る移動層モデルも容易に作成可能である。



(a) Two triangle meshes (one is the slope surface and the other is bottom)



(b) Making the poly file of TetGen



(c) Modeling 3D blocks

Fig.5.12 Modeling of 3D moving part (Rough model)

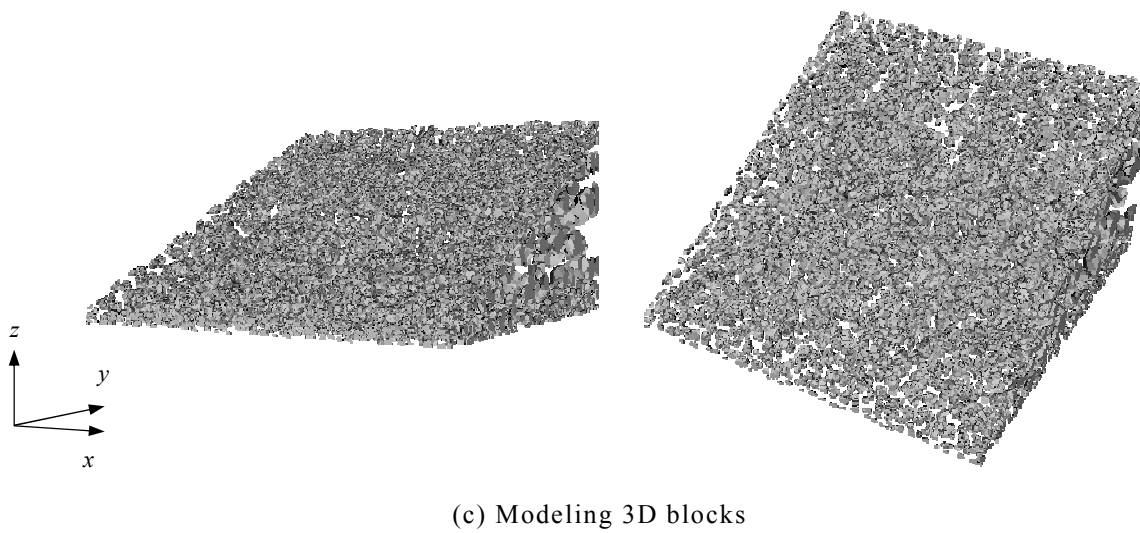
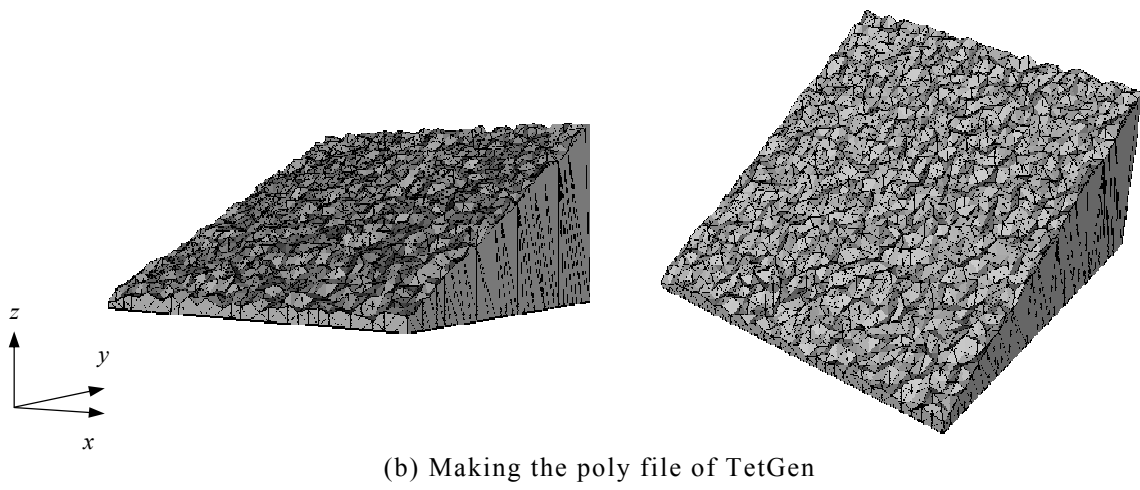
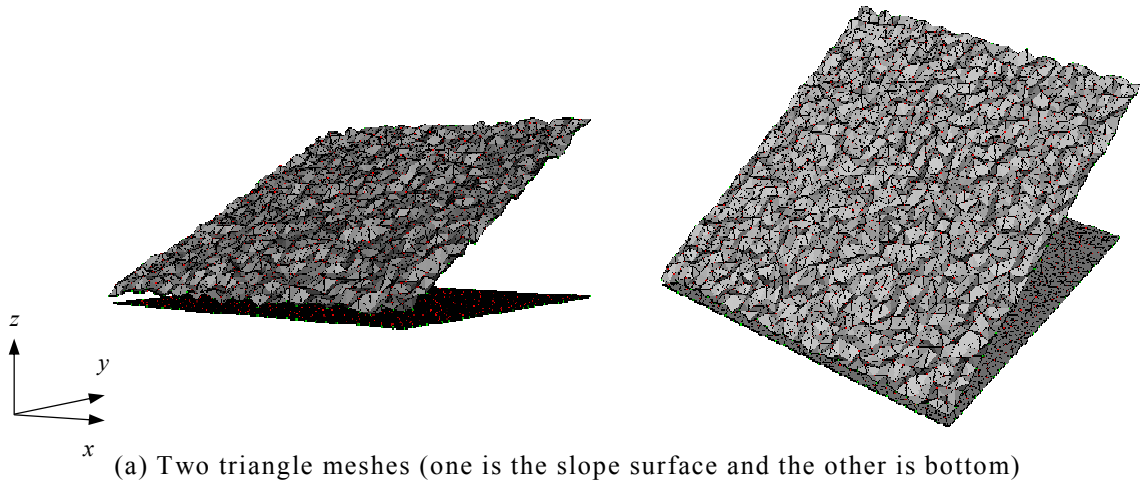
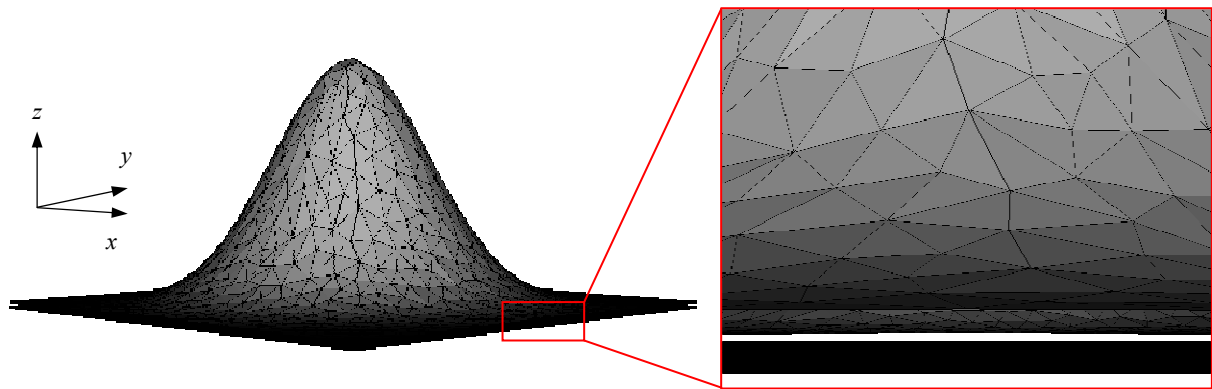
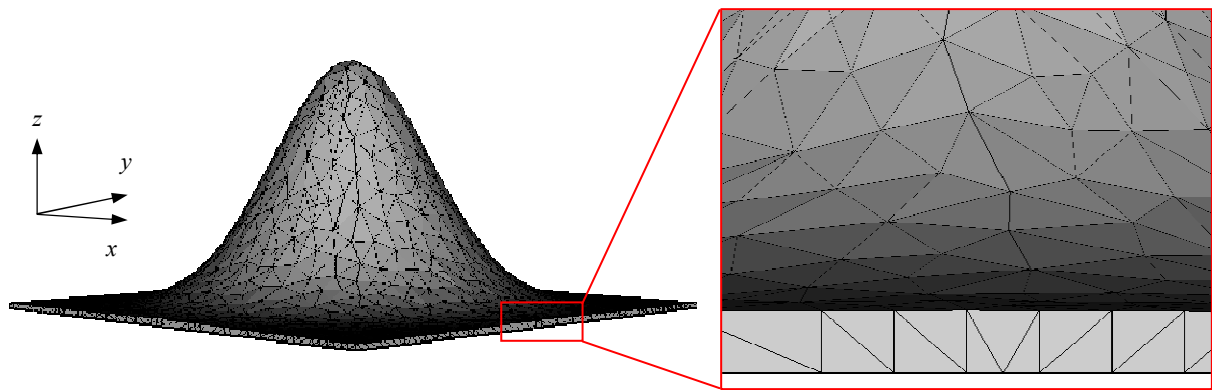


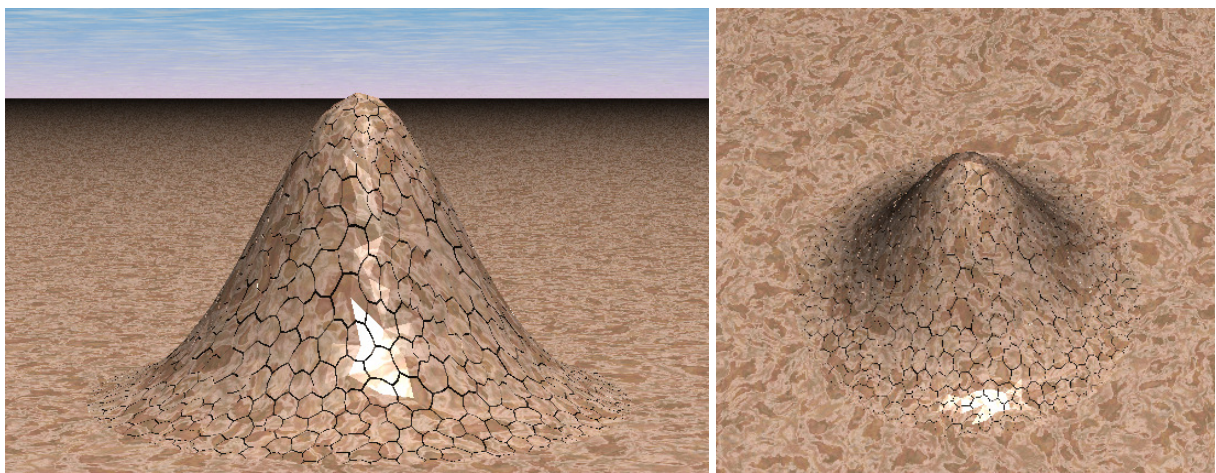
Fig.5.13 Modeling of 3D moving part (Fine model)



(a) Two triangle meshes (one is upper side and the other is bottom)

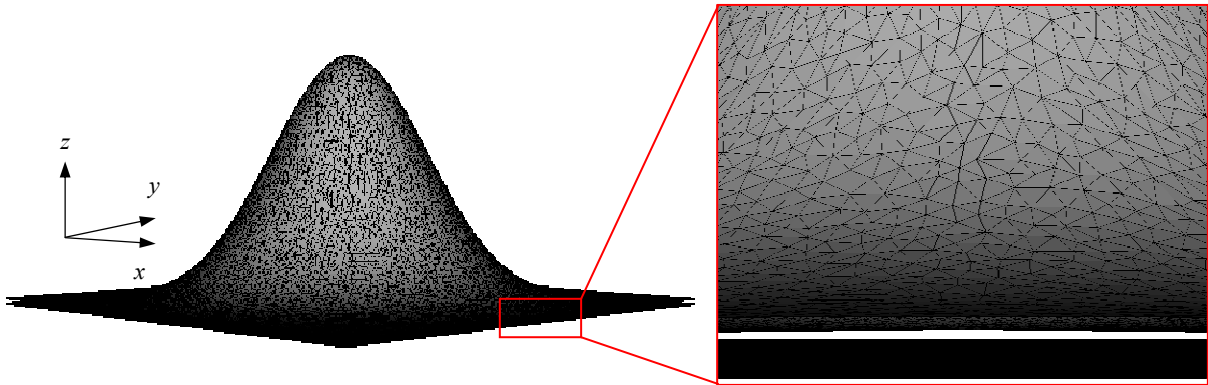


(b) Modeling the surface mesh of sandpile model

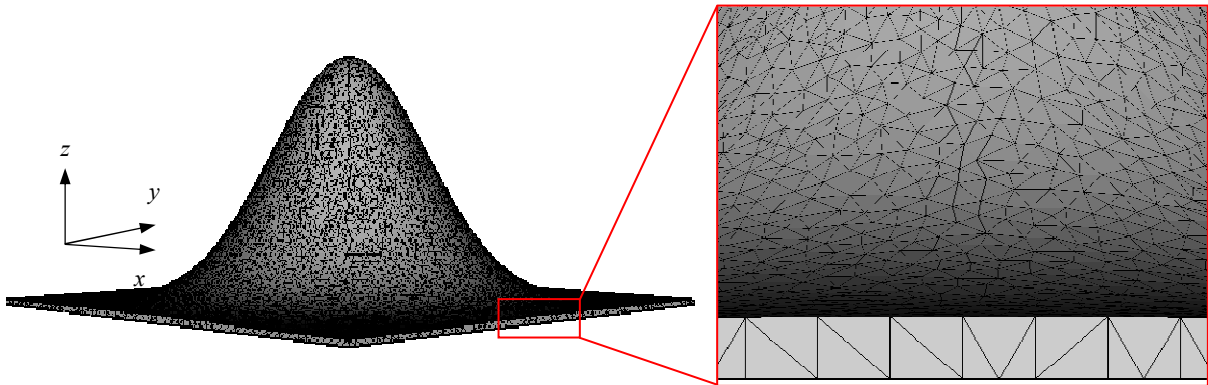


(c) The perspective views using PovRay

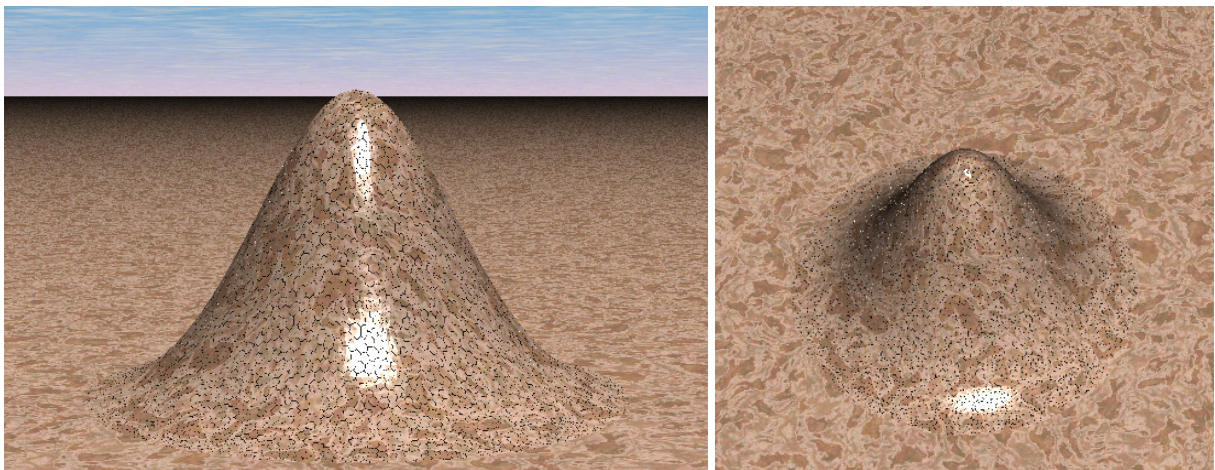
Fig.5.14 3D dune model (Rough blocks)



(a) Two triangle meshes (one is upper side and the other is bottom)

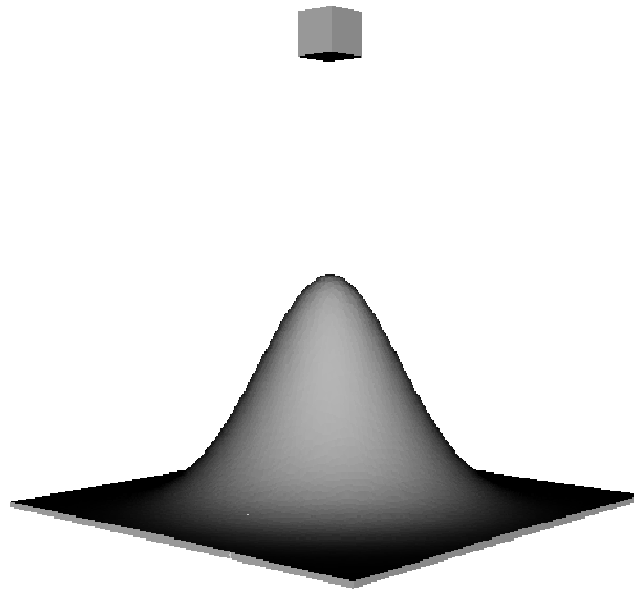


(b) Modeling the surface mesh of sandpile model

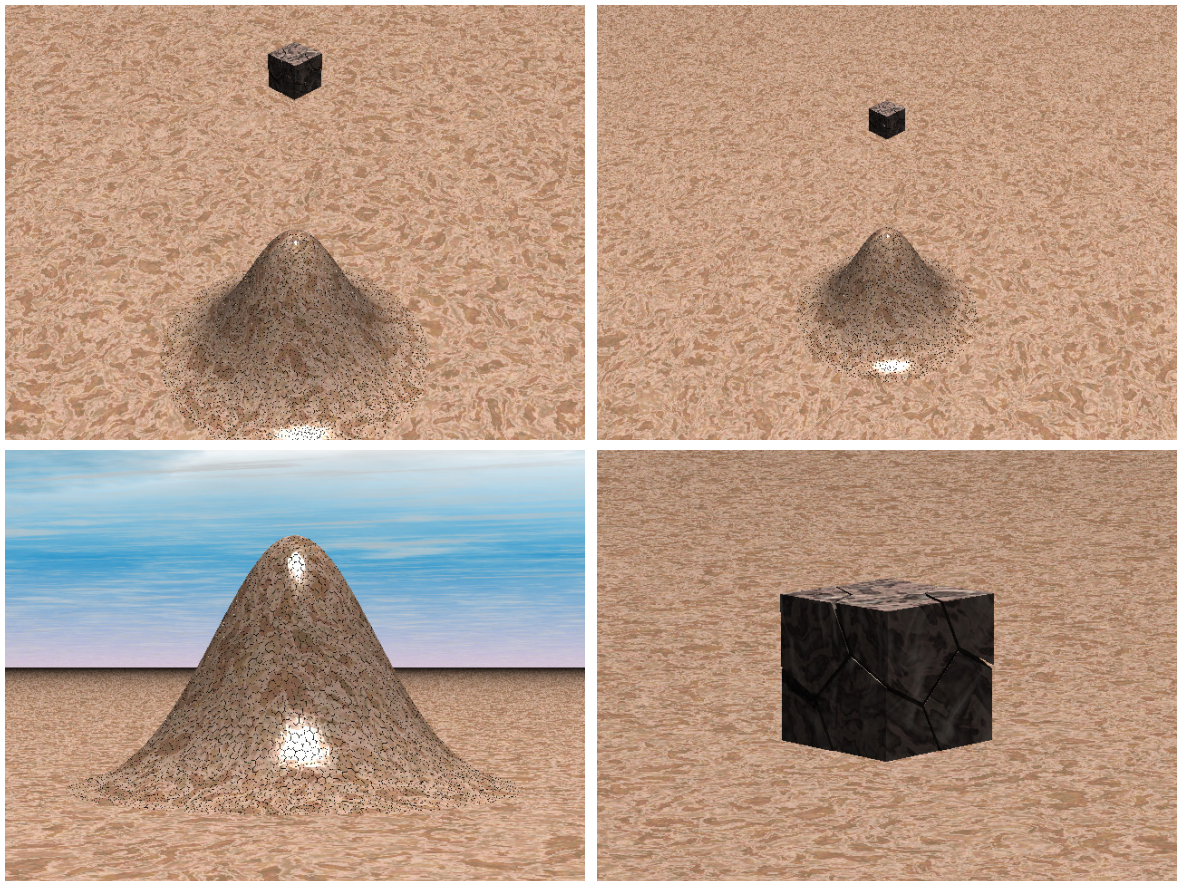


(c) The perspective views using PovRay

Fig.5.15 3D dune model (Fine blocks)

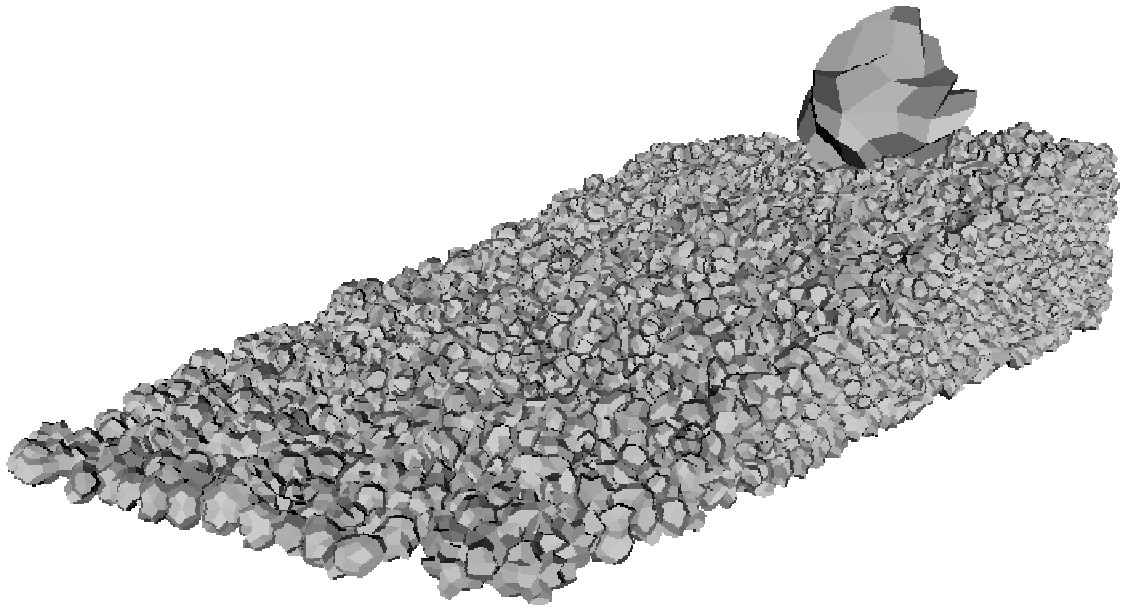


(a) Continuous body model composed a box and dune

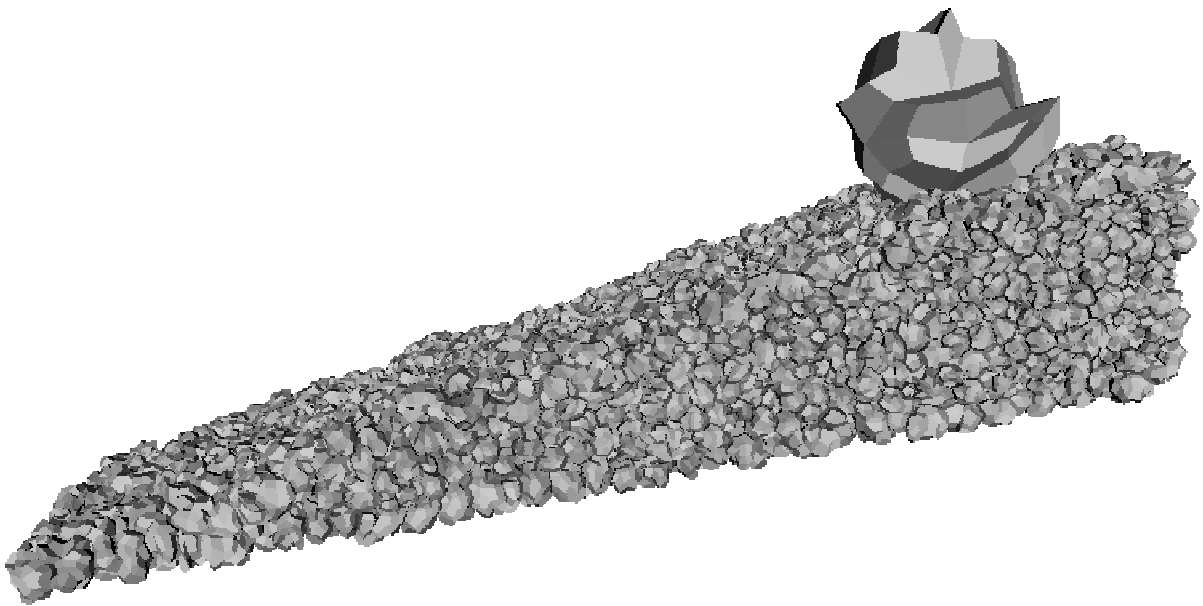


(b) PovRay view that is some blocks and dune model

Fig.5.16 Concept of the modeling 3D blocks composed some blocks with different physical properties



(a) The perspective view of 3D landslide model



(b) The side view of 3D landslide model

Fig.5.17 3D complex landslide model with many small and large blocks

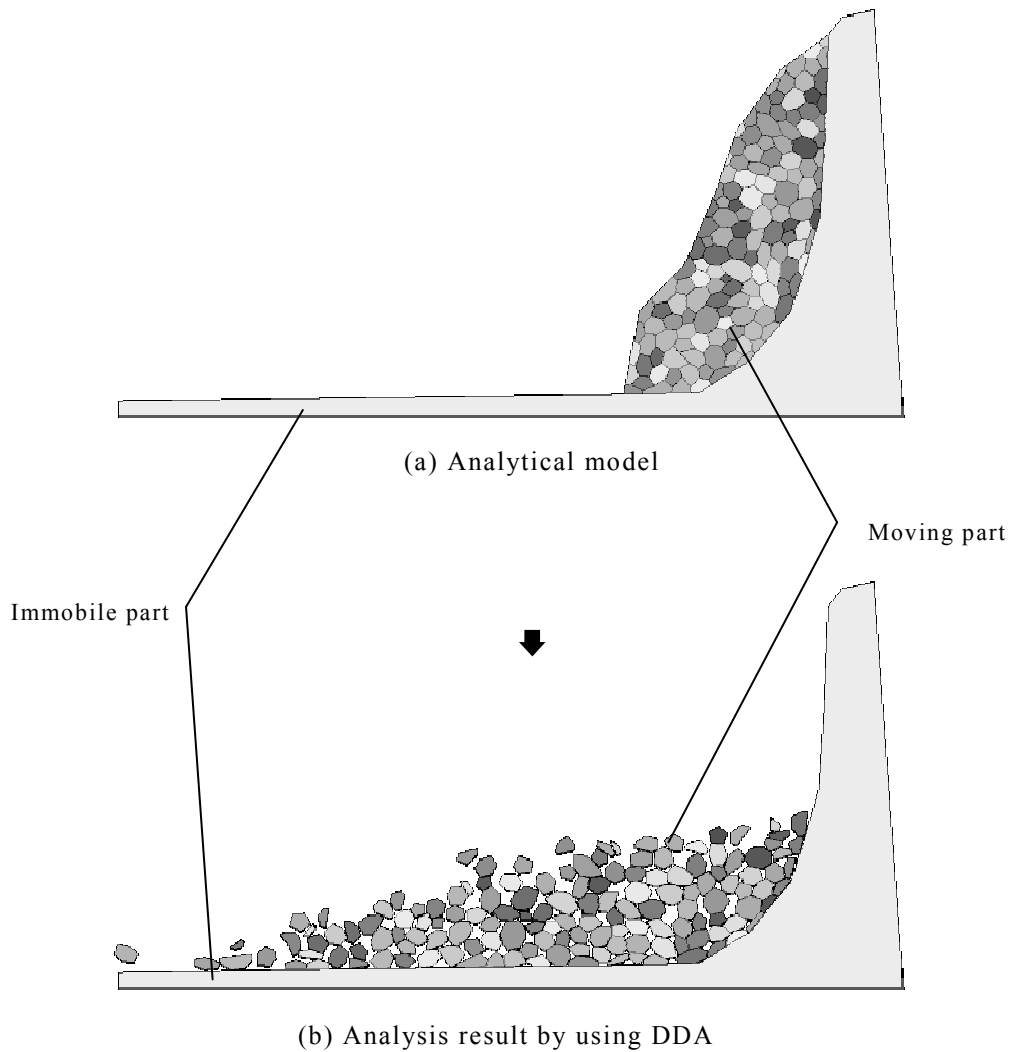


Fig.5.18 DDA simulation result of deep-seated landslide

5.3.2 不動層および移動層から成る地形のモデル化

不連続変形法 (DDA) や個別要素法 (DEM) のように斜面崩壊現象をシミュレーションする場合, Fig.5.18 に示すように, 地形データに基づき上部の移動層と下部の不動域が作成される^{5.44)}。一般的に不動域は 1 ブロックで表わされ, 移動層に比べ, ブロックのサイズは極めて大きい。これは不動域の崩壊はなく, 移動層のみが崩壊するとしているためである。ここでは, そのような不動域と移動層から成る地形モデルの作成方法について述べる。まず (1) 項の方法を用いて, 不動域の地形モデルを作成し, 表面パッチを作成する。この表面パッチを用いて 1 ブロックの不動域を作成する。このとき 5.2 節 (2) 項 (b) で述べたように, ブロック面は 4 つの点で構成されるため, 表面パッチを形成する三角形要素内に点を設け, 三角形要素の頂点, 要素辺の中点, 要素内の点で構成される 4 点をブロックの面とした。すなわち Fig.5.19 に示すように, 1 つの三角形要素からできるブロック面は 3 面であ

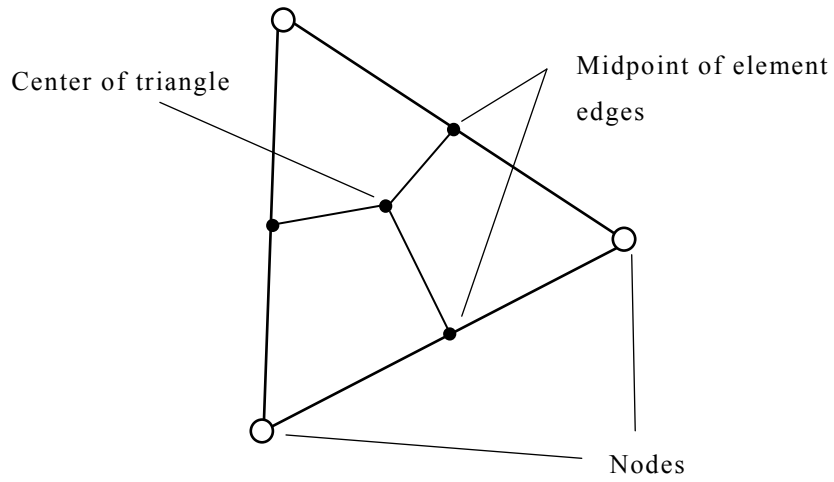


Fig.5.19 Illustration of triangle element

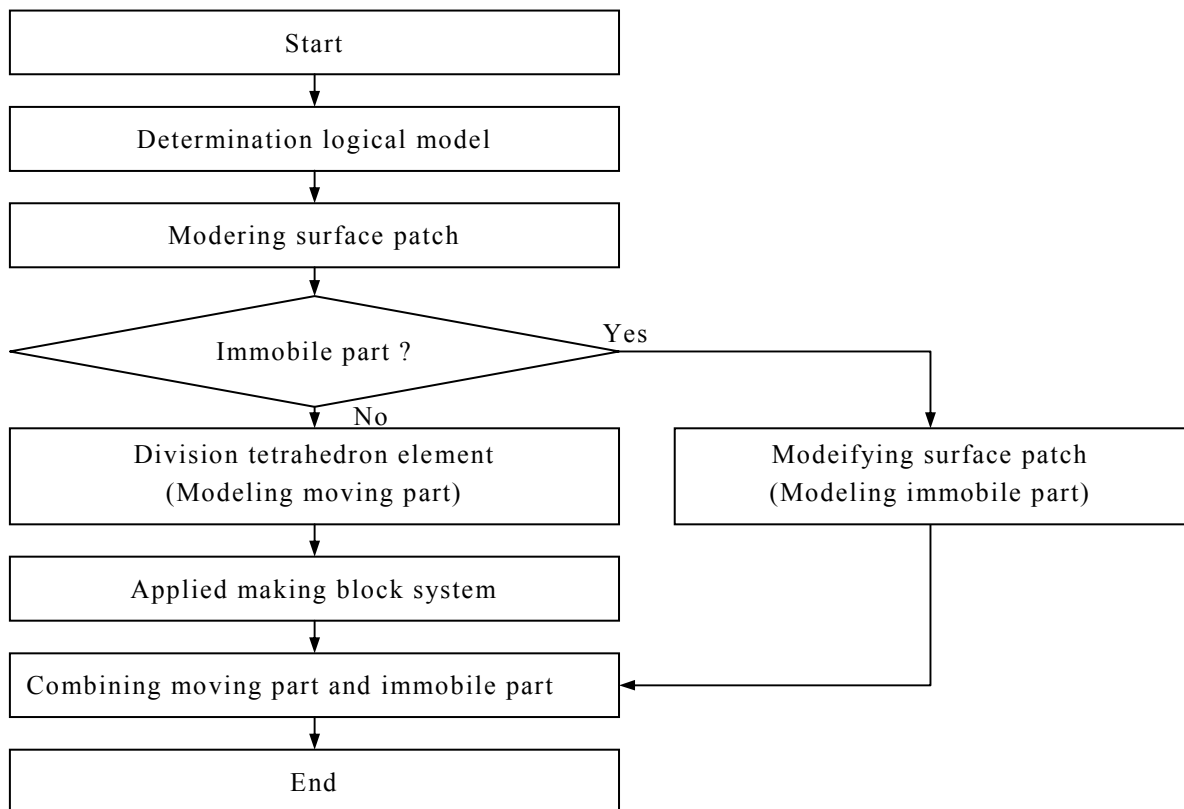
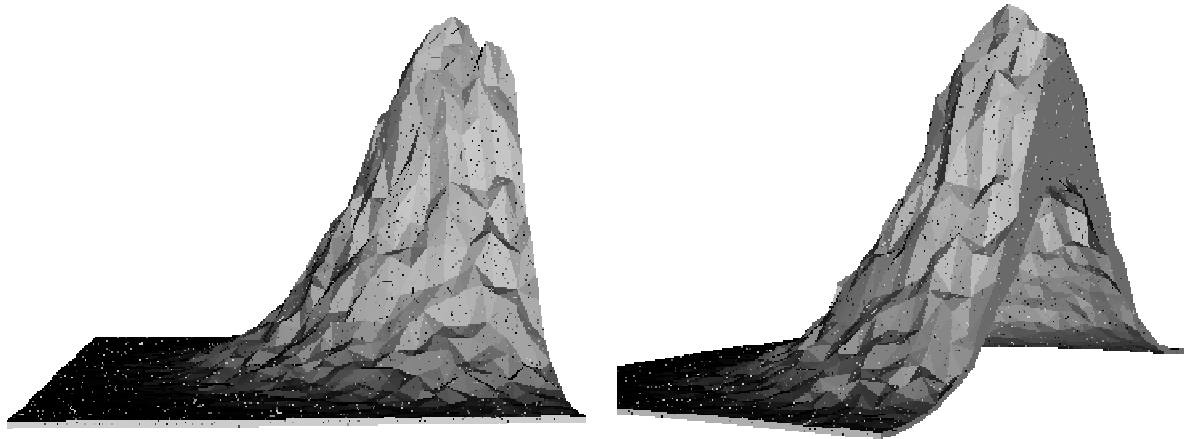


Fig.5.20 Flowchart of 3D block generation system with moving part and immobile part

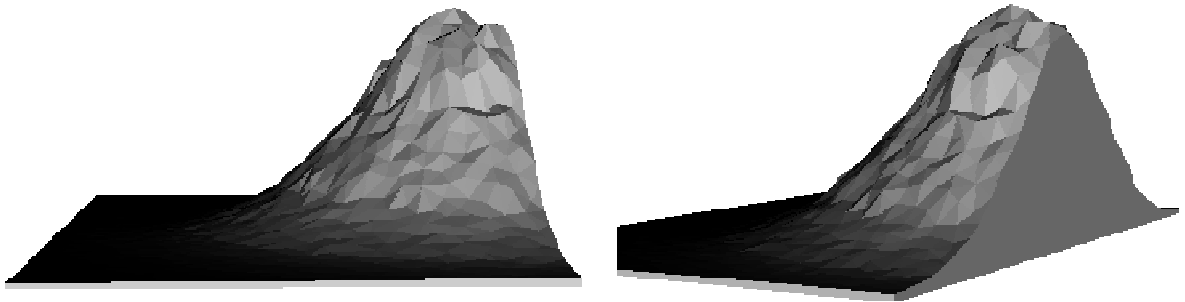
る。この面を用いることで、不動域が1ブロックにて表現可能となる。Fig.5.20に移動層および不動域からなる3次元地形のモデル化のフローチャートを示す。まず、地形データの決定し、表面パッチを作成する。そして、その表面パッチが移動層の場合、上記の方法にて、表面パッチを構成する三角形要素を用いてブロック面を作り、不動域を1ブロックで表現する。移動層の場合には、5.2節(2)項(b)で述べたように、その表面パッチを用いてブロック構造を作成する。最後に移動層と不動域を結合させることで地形モデルを作成する。本手法を用いることで、任意形状の不動域ならびに移動体の作成が可能となる。

Fig.5.21に本手法における3次元地形モデルの例を示す。同図に示すように、移動層は8686のブロックで構成されており、不動層は1ブロックで構成されている。同図(c)に示すように、移動体と不動域の結合を行うことで容易に任意形状の3次元地形をモデル化することが可能となる。また3次元地形データが存在する場合^{5.45) - 5.48)}、より精度のよい、現実性のある3次元モデルの作成も容易に行える。

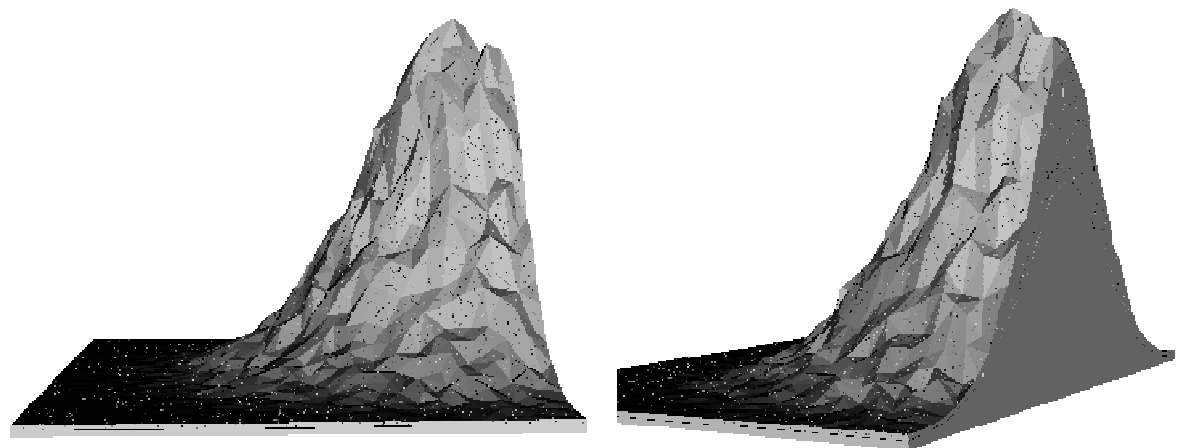
本手法の応用例としてFig.5.22に地盤および地盤内にあるマンホールを模擬したモデルを示す。同図に示すように、まずマンホールの形状を決め、表面パッチを作成し、マンホールを1ブロックで表現する。そして、その形状の空洞を有する地形モデルを作成し、その表面パッチをブロック化する。そして、地形モデルとマンホールモデルを結合させることで作成可能である。このモデルは液状化現象を評価する場合の3次元モデルを想定している。これまで数値計算技術を用いてこのような液状化モデルを作成する場合、マンホールのような連続体においても複数の粒子の集合体と見なし作成されることが一般的であったが、本手法を用いることでそのような連続体を複数の粒子の集合体とせずとも、1ブロックで表現することが可能となる。複数の粒子で連続体を表現する場合、数値解析を行い際に、種々の定義(粒子間力、ゴースト粒子等)が必要となり、幾つかの曖昧な定義を必要とする場合がある。しかしながら、本手法を用いることで連続体は1ブロックで表現されるため、そのような定義を少なくすることが可能であると考えられる。したがって、今後、3次元のブロック間の接触判定、条件等の向上による3次元ブロック構造を有する計算手法(DEM, DDA, etc)の進歩も考えられることから、本手法は極めて有意義な手法であると考えられる。



(a) Upper side (Moving part, #Block: 8686)

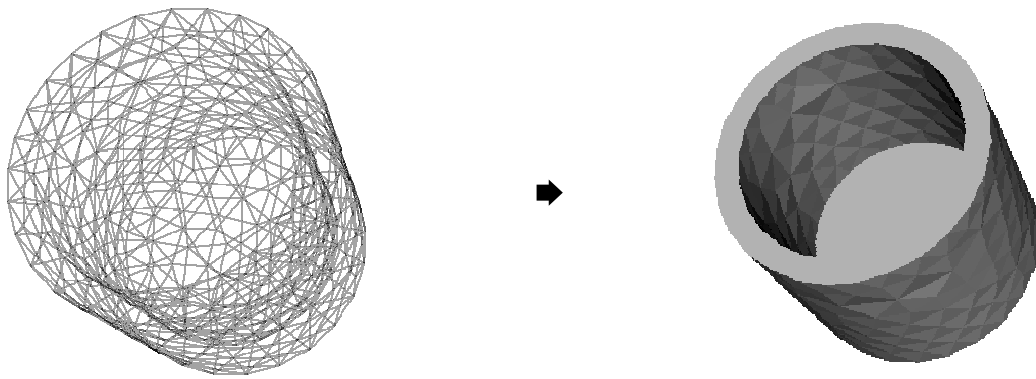


(b) Bottom side (Immobile part, #Block: 1)

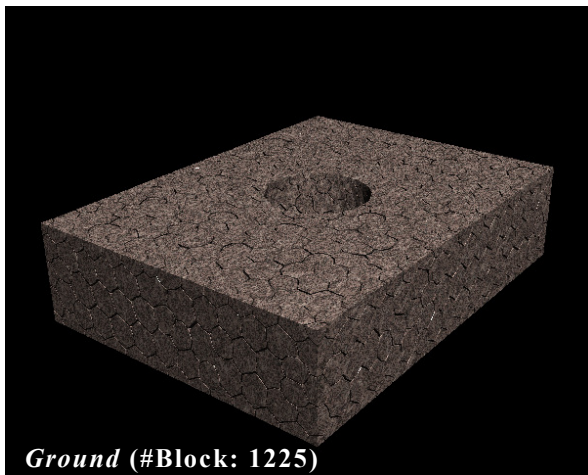


(c) Combining moving part and immobile part (#Block: 8687)

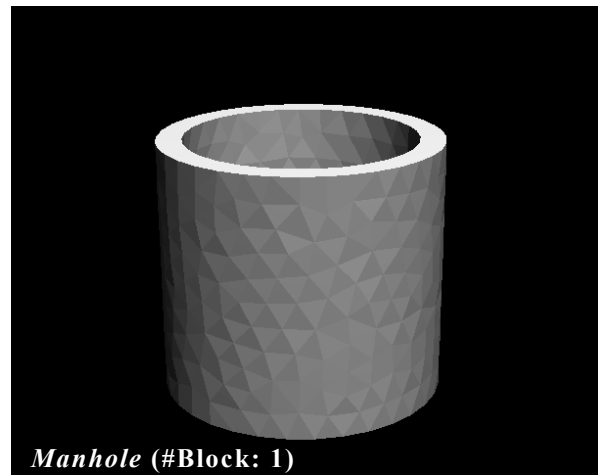
Fig.5.21 Concept of 3D deep-seated landslide modeling



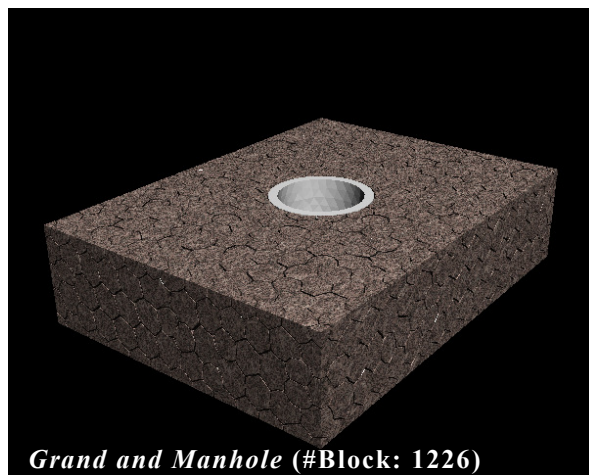
(a) A manhole model composed one block



Ground (#Block: 1225)



Manhole (#Block: 1)



Grand and Manhole (#Block: 1226)

(b) PovRay views

Fig.5.22 3D ground liquefaction model with around a manhole

5.4 3次元大規模地形モデルの構築

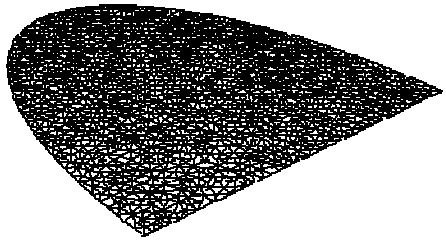
ここでは、上記の多面体ブロックのモデリングシステムの応用例として、移動層および不動域から成る大規模3次元モデルを示す。任意の地形形状のモデル化ならびに多種多様なブロック構造を用いてモデル化した。以下にその詳細を述べる。

Fig.5.23 に、一例として移動層および不動域から成る3次元大規模地形モデルを示す。まず、移動層の作成を行う。2次元メッシュジェネレータである **Triangle** を用いて、同図 (a) に示す形状を作成し、さらに不動域の基礎となる2次元メッシュ ($z=0$) を作成する (同図 (b) における長方形メッシュ)。そして、移動層の z 方向一定の値を与え、同図 (c) に示すように移動層と不動域とのメッシュを重ね、 x - y 平面において移動層内にある座標を不動域にマッピングする (同図 (d) における赤い点)。次に、不動域の2次元メッシュを用いて任意の地形形状を作成する。このとき、本章では次式を用いた。

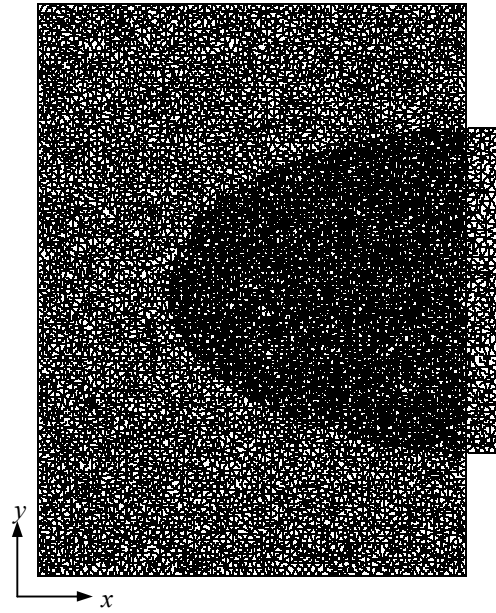
$$z = b \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{a}\right) + c \quad (5.1)$$

ここで、 a 、 b 、 c は任意の係数である。このとき、マッピングされた点 (同図 (e) における赤い点) の z 方向に任意に座標値を与え、 z 方向の座標値を下げることで斜面崩壊現象におけるすべり面を作成し、深層崩壊を模擬した不動域のモデル化を行った (同図 (e) における中段の図)。そして、5.3 節 (2) 項で述べたように、今、上下の2面からなる不動域の境界において節点同士を結び表面パッチを作成し、その表面パッチを用いて不動域を1ブロックで表現する。移動層に関して、同図 (a) で作成したメッシュに、上記の不動域におけるすべり面を作成する際に用いた座標値を与え、移動層の底面部を作成する。そして式(5.1)を用いて z 値を与えることで上部面を作成する。なお、このとき上記の不動域を作成する際に用いた式と同等な式を用いる。そして、5.3 項 (1) 節で述べたように、境界における節点同士を結び、表面パッチを作成し、ブロック構造を作成する。最後に、同図 (g) に示すように、移動層と不動域を結合することで任意の3次元大規模地形モデルが完成する。

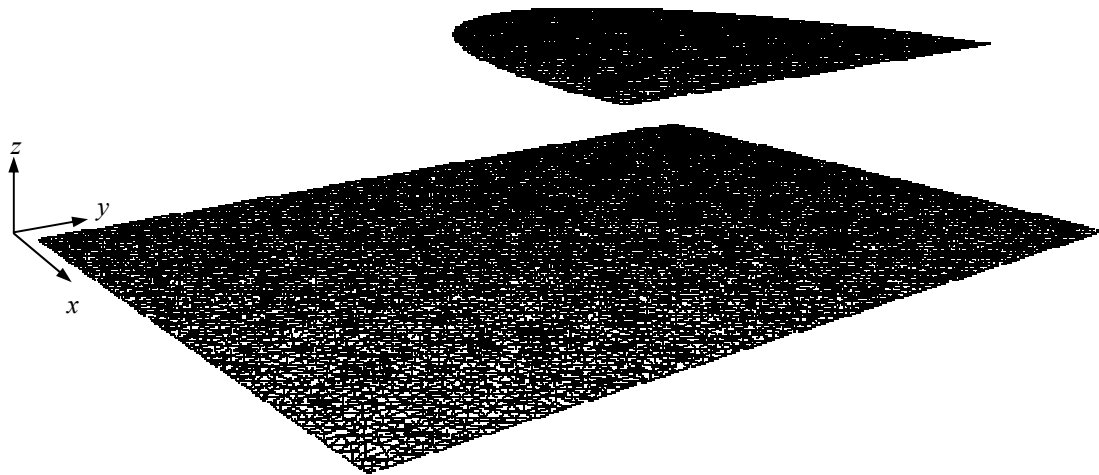
Fig.5.24 には上記と同様な手順で作成した、100,000 個のブロックを有する移動層と1ブロックで構成された不動域の地形モデルを示す。このように、ブロックの個数が100,000 個を超える場合においても本手法は容易に3次元地形をモデル化することができる。Fig.5.25 に100,000 ブロックにおける体積のヒストグラムを示す。同図 (a) に示すグラフは、移動層を作成する際、**TetGen** において要素形状をおおむね同程度の形状で作成した場合の結果を示しており、同図 (b) は、Fig.5.5(b) に示すように、複数の箇所において任意に粗細個所を設け作成した場合におけるブロック体積のヒストグラムを示す。Fig.5.25 に示すように、本手法ならびにオープンソースである3次元高精度メッシュジェネレータ **TetGen** を用いることで、複数の多面体ブロック構造を有し、多種多様なブロックから成る3次元大規模地形モデルが容易に作成可能であることが確認される。すなわち本手法は、フィールド調査等により対象とする地形のブロック形状のヒストグラム等のデータが存在する場合、



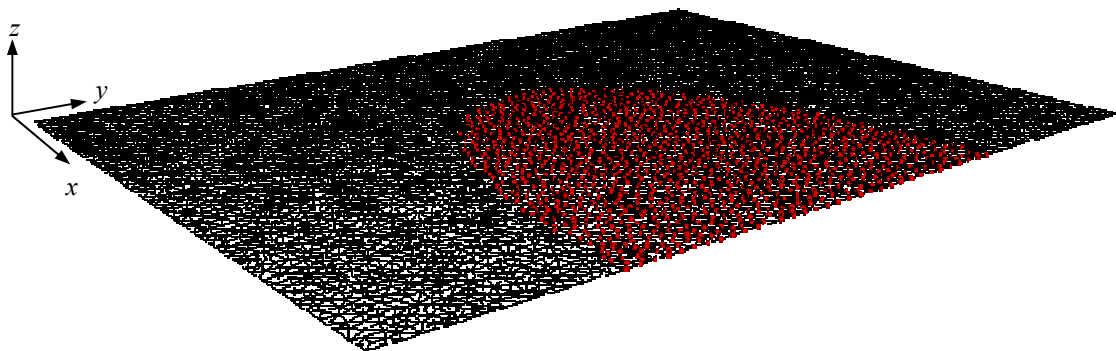
(a) Base triangle model of moving part



(b) Base triangle model of moving part and immobile part

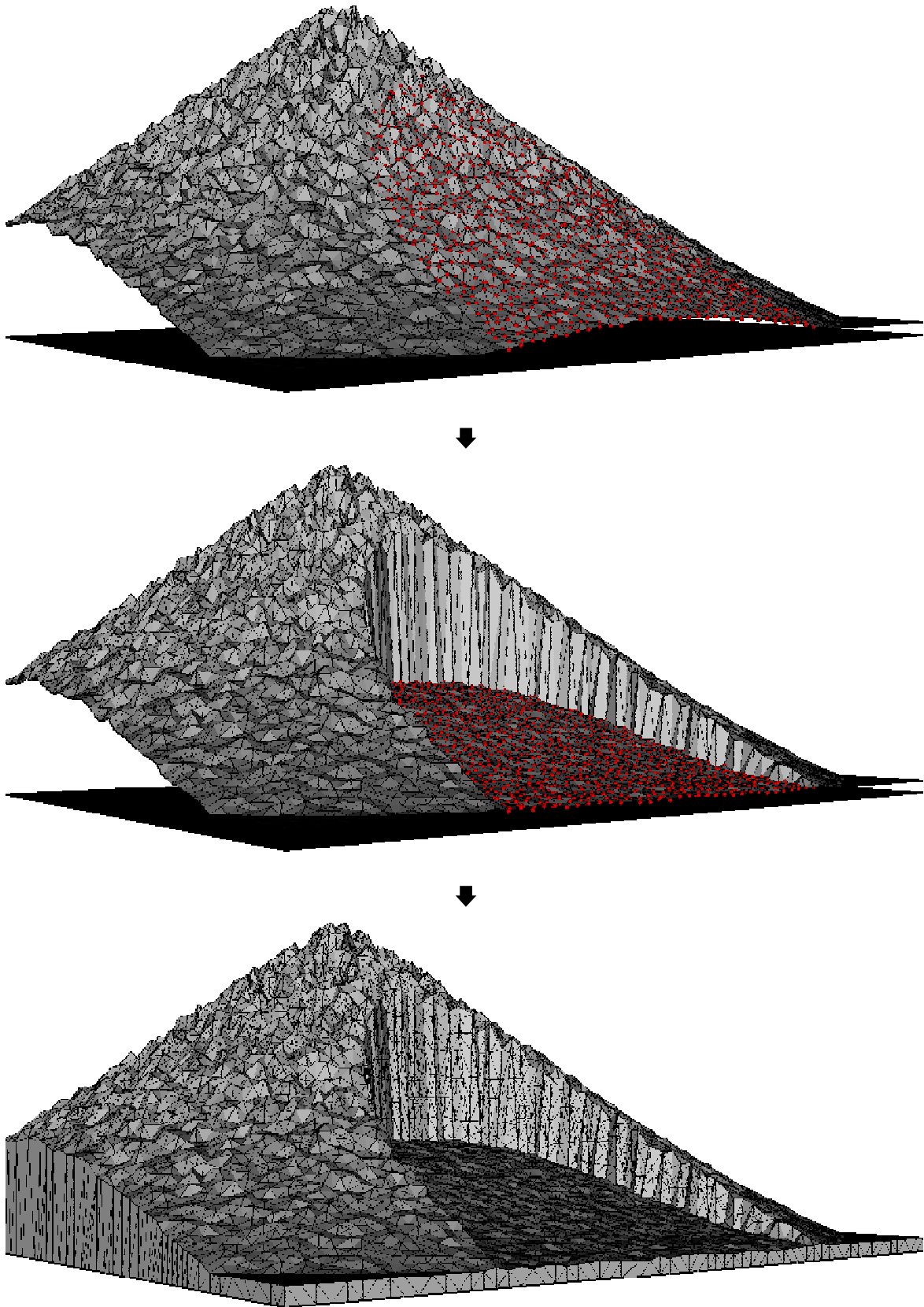


(c) The perspective view base triangle elements of two parts



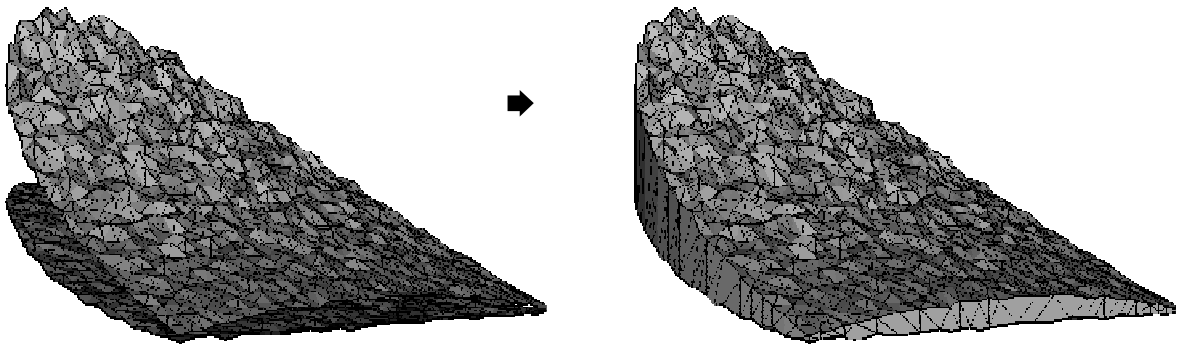
(d) Mapping point of the same x and y coordinate moving part and immobile part

Fig.5.23 3D large-scale deep-seated landslide model composed of moving part and immobile part

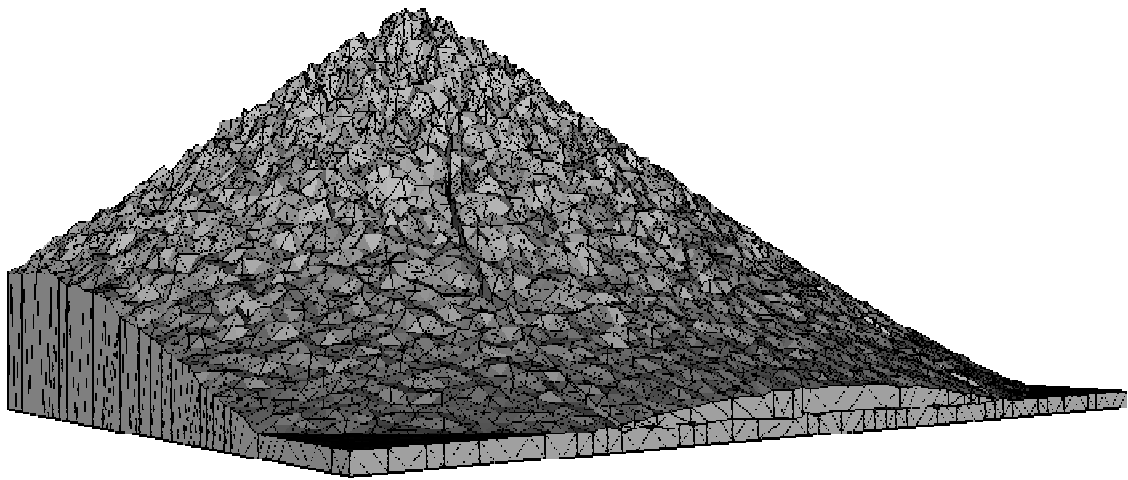


(e) Modeling of large-scale immobile part (#Block: 1)

Fig.5.23 3D large-scale deep-seated landslide model composed of moving part and immobile part



(f) Modling of large-scale moving part

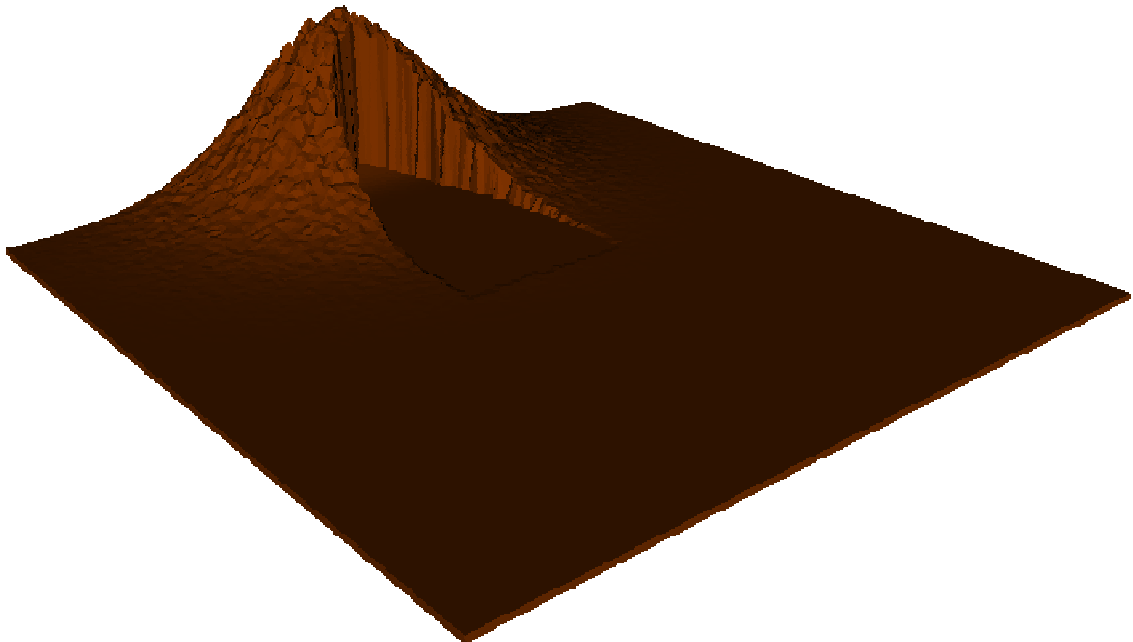


(g) Large-scale deep-seated landslide model

Fig.5.23 3D large-scale deep-seated landslide model composed of moving part and immobile part

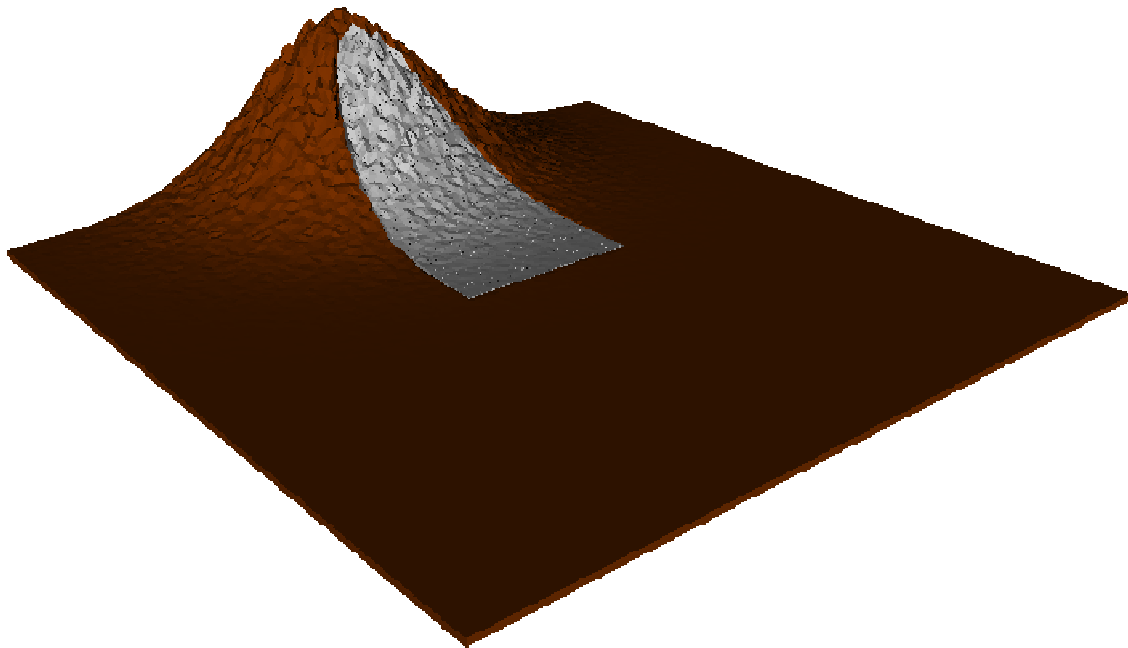


(a) Moving part composed more than 100,000 blocks



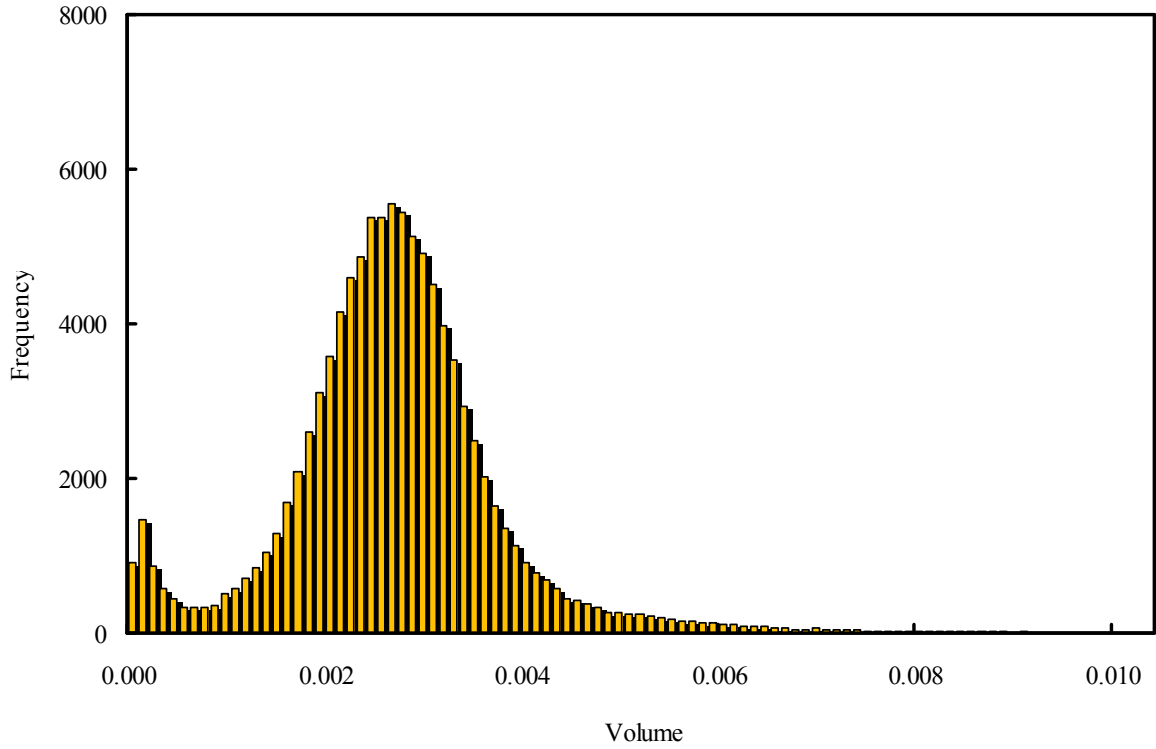
(b) Immobile part composed one block

Fig.5.24 3D large-scale landslide model with more than 100,000 blocks

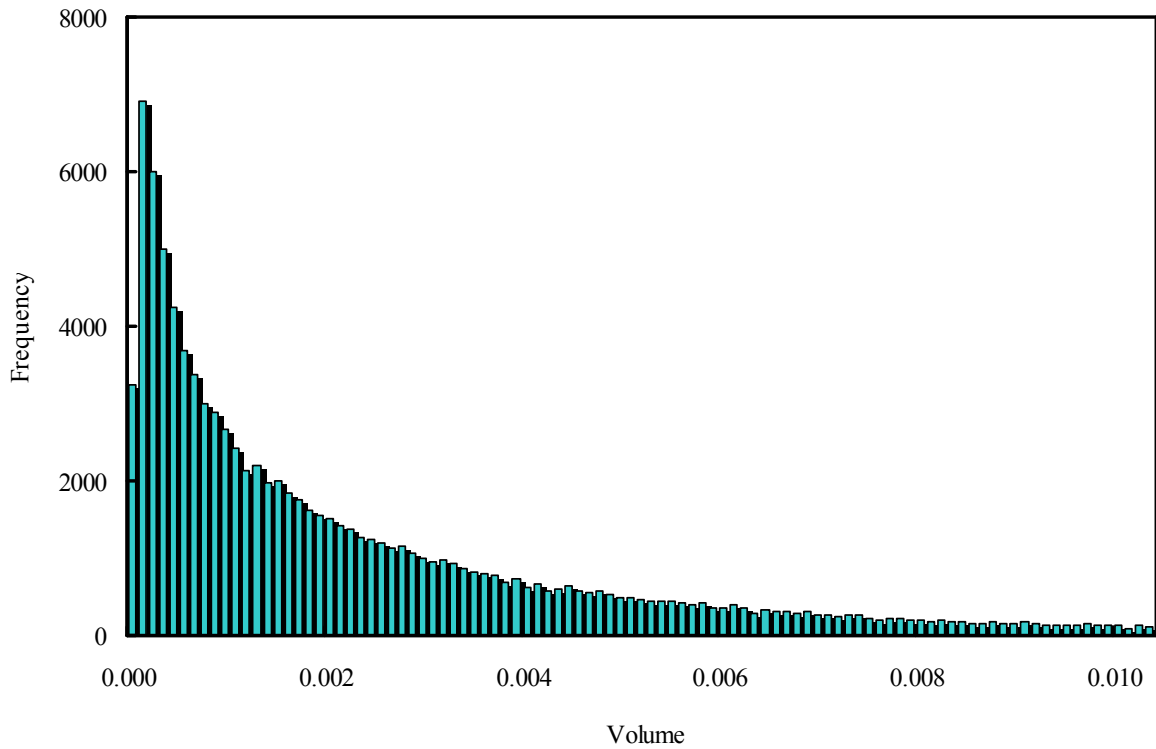


(c) Large-scale landslide model

Fig.5.24 3D large-scale landslide model with more than 100,000 blocks



(a) Case of homogeneous mesh (#Block: 100,824)



(b) Case of heterogeneous mesh (#Block: 100,996)

Fig.5.25 Frequency distribution of large scale 3D model

容易にそれを模擬した3次元のモデル化が可能であり、より現実的な3次元地形モデルの作成が可能な手法である。

5.5 結語

本章では、不連続変形法 (DDA) や個別要素法 (DEM) 等で用いられる、2, 3次元地形のモデル化技術を開発した。具体的に、2次元においては、オープンソースの2次元高精度メッシュジェネレータである **Triangle** を用いて任意形状を三角形要素分割し、三角形要素の頂点、要素内における内接円の中心点、要素辺の中点とで囲まれる領域をブロックとして作成した。隣接する三角形要素が存在する場合、隣り合うブロック同士の重複する辺を取り除きできる領域、すなわち三角形要素の頂点座標を囲むようにできる領域をブロックとした。また、多種多様なブロック構造を作成するために、本章では、各要素において三角形要素内における接円内の中心点を円内で移動させることで種々のブロック構造を有する2次元モデルの作成を可能とした。3次元においては、2次元同様に、オープンソースの **TetGen** を用いて、任意形状を四面体要素分割し、要素の頂点、要素辺の中点、重心、要素面の重心を用いて3次元ブロックを作成した。すなわち、各ブロック面は要素の頂点、要素辺の中点、要素面の重心、要素辺の中点からなる面が3面、要素の重心、要素面の重心、要素辺の中点、要素面の重心からなる面の3面が存在するものとした。隣接する四面体要素が存在する時、隣り合うブロック同士の重複する面を取り除いてできるブロックを1ブロックとした。すなわち四面体要素における頂点が解析領域の境界に位置していない場合、その頂点はブロック面を形成する点としては用いないものとする。したがって、ブロックのサイズは要素サイズに依存するため、任意形状のモデルを四面体要素にて分割する際に、要素サイズを均一に分割した場合には各ブロックのサイズは均一となり、要素サイズをランダムに分割すると大小様々なブロックを有する地形モデルの作成が可能となる。さらに本章では、表面パッチを用いることで、複雑形状を有するモデルにおいても1ブロックで構築する技術の開発も行った。具体的には、表面パッチを形成する三角形要素内に点を設け、要素の頂点、要素辺の中点、要素内の点で構成される4点をブロックの面とした。すなわち、一要素あたり3つのブロック面ができ、表面パッチを形成する要素数の3倍の面の数から構成されることとなる。一般的に、個別要素法 (DEM) や不連続変形法 (DDA) のように斜面崩壊をシミュレーションする場合、複数のブロックからなる移動層と1ブロックで構成される不動域とに分けられるが、本手法を用いることで、この不動域のモデリングも容易に行える結果となった。3次元ブロックを用いた数値計算手法において、現在、ブロック同士の接触判定等が極めて難しく、また、未だ計算手法の確立には至っておらず、さらに、このような膨大なブロックを有する問題では自由度が増加に伴い計算コストも膨大となる。このような問題が明解になり手法が確立された時、3次元における任意地形モデル化技術は極めて重要となる。したがって、本手法は大変有意義な手法であると思われる。今後、計算機性能の進歩に伴い、数千万、数億自由度を対象とする場合、3次元多面体ブロック構造用いて容易に地形モデルを作成する本手法は極めて重要な技術となるであろう。

参考文献

- 5.1) Fellenius, W.: Calculation of the stability of earth dams. Proceedings of the 2nd Congress on Large Dams, *International Commission on Large Dams (ICOLD)*, Vol.4, pp.445-462, 1936.
- 5.2) Bishop, A. W.: The use of the slip circle in the stability analysis of slopes, *Gemtechnique*, Vol.5, No.1, pp.7-17, 1955.
- 5.3) Rathje, E. M. and Bray, J. D.: Nonlinear Coupled Seismic Sliding Analysis of Earth Structures, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.126, No.11, pp.1002-1014, 2000.
- 5.4) Bray, J. and Travasarou, T.: Simplified Procedure for Estimating Earthquake-Induced Deviatoric Slope Displacements, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.133, No.4, pp.381-392, 2007.
- 5.5) Bray, J. and Travasarou, T.: Pseudostatic Coefficient for Use in Simplified Seismic Slope Stability Evaluation, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.135, No.9, pp.1336-1340, 2009.
- 5.6) 松原仁, 江戸孝昭, 原久夫: 岩盤のき裂ネットワークを考慮した不連続体解析手法の提案およびき裂進展解析, 日本計算工学会論文集, No.20120017, 2012.
- 5.7) 江戸孝昭, 松原仁, 原久夫: 粒状構造を有する脆性材料の離散き裂進展解析手法の開発および性能評価, 土木学会論文集 C (地圏工学), Vol.69, No.1, pp.31-45, 2013.
- 5.8) Liu, G. G. R. and Liu, M. B.: Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method, *World Scientific*, 2003.
- 5.9) Shaofan, L. and Wing K. L.: Meshfree Particle Methods, *Springer*, 2004.
- 5.10) Li, S. and Liu, W. K.: Meshfree Particle Methods, *Springer*, 2007.
- 5.11) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 5.12) Belytschko, T., Krogauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, pp.3-47, 1996.
- 5.13) 越塚誠一: 粒子法, 培風館, 2005.
- 5.14) Matsubara, H. and Yagawa, G.: Convergence studies for Enriched Free Mesh Method and its application to fracture mechanics, *Interaction and Multiscale Mechanics: An International Journal*, Vol.2, No.3, pp.277-293, 2009.
- 5.15) Yagawa, G. and Matsubara, H.: Enriched Free Mesh Method: An Accuracy Improvement for Node-based FEM, *Computational Plasticity, Springer*, Vol.7, pp.207-219, 2007.
- 5.16) 松原仁, 矢川元基: Patch by Patch 型混合法における基底関数の応用とその

- 精度，応用力学論文集，Vol.10，pp. 201-209，2007.
- 5.17) Tian, R., Matsubara, H. and Yagawa, G.: Advanced 4-node tetrahedrons, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.68, Issue 12, pp.1209-1231, 2006.
- 5.18) Naili, M., Matsushima, T. and Yamada, Y.: A 2D Smoothed Particle Hydrodynamics method for liquefaction induced lateral spreading analysis, *Journal of applied mechanics, JSCE*, Vol.8, pp.591-599, 2005.
- 5.19) 佐藤忠信，松丸貴樹：メッシュフリー法による地盤の液状化・流動解析，土木学会論文集 C，Vol.813，pp.89-101，2006.
- 5.20) 五十里洋行，後藤仁志：MPS 法弾塑性解析による粘性土河岸崩落過程の計算力学，水工学論文集，Vol.53，pp.1069-1074，2009.
- 5.21) 五十里洋行，後藤仁志，吉年英文：斜面崩壊誘発型津波の数値解析のための流体－弾塑性体ハイブリッド粒子法の開発，土木学会論文集 B2（海岸工学），Vol.65，No.1，pp.46-50，2009.
- 5.22) 吉田郁政：MPS 法を用いた地盤構造物の地震時破壊挙動解析のための基礎的検討，土木学会論文集 A2（応用力学），Vol.67，No.1，pp.93-104，2011.
- 5.23) Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L.: A Model for the Mechanics of Jointed Rock, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proc. ASCE*, Vol.94, No.3, pp.637-659, 1968.
- 5.24) 中川光雄，蔣宇静，江崎哲郎：大変形理論の岩盤挙動および安定性評価への適用，土木学会論文集，No.575/III-40，pp.93-104. 1997.
- 5.25) Budiansky, B. and O'Connell, R. J.: Elastic module of a cracked solid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.12, No.2, pp.81-97, 1976.
- 5.26) Cleary, M. P. and Chen, I. Q.: Self-consistent techniques for heterogeneous media, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.106, No.5, pp.861-887, 1980.
- 5.27) Oda, M., Suzuki, K. and Maeshibu, T.: Elastic compliance for rock-like materials with random cracks, *Soils and Foundations*, Vol.24, No.4, pp.27-40, 1984.
- 5.28) Cundall, P. A.: A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics (IRSM)*, Vol.1, II-8, pp.129-136, 1971.
- 5.29) 小山倫史，赤尾悟史，西山哲，大西有三：岩盤斜面の地震応答解析における不連続変形法（DDA）の適用に関する研究，土木学会論文集 C，Vol.65，No.3，pp.644-662，2009.
- 5.30) Shi, G. H. and Goodman, R. E.: Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.13, pp.359-380, 1989.
- 5.31) 大西有三，佐々木猛，Gen-Hua Shi：不連続変形法（DDA），丸善，2005.
- 5.32) 川合忠彦：離散化極限解析法概論，培風館，1990.
- 5.33) 鈴木隆次，浜島良吉：要素変形を考慮した不連続体解析による応力伝達，

- 変形，破壊強度解析，土木学会論文集，No.547/III-36，pp.23-38，1996.
- 5.34) Shewchuk, J. R.: Delaunay Refinement Mesh Generation, *Ph. D. diss., Carnegie Mellon University*, 1997.
- 5.35) Shewchuk, J. R.: Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation, *Computational Geometry*, Vol.22, pp.21-74, 2002.
- 5.36) Shewchuk, J. R.: Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator, *Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering*, Vol.1148, pp.203-222, 1996.
- 5.37) Si, H.: Adaptive tetrahedral mesh generation by constrained Delaunay refinement, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.75, pp.856-880, 2008.
- 5.38) Si, H.: Constrained Delaunay tetrahedral mesh generation and refinement, *Finite elements in Analysis and Design*, Vol.46, pp.33-46, 2010.
- 5.39) Si, H. and Gärtner, K.: 3D boundary recovery by constrained Delaunay tetrahedralization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.85, pp.1341-1364, 2011.
- 5.40) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: Finite Element Method (5th edition), Vol.1, 2000.
- 5.41) 谷口健男，太田親：三次元凸体の四面体有限要素自動分割，土木学会論文集，No.432/I-16，pp.137-144，1991.
- 5.42) <https://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
- 5.43) <http://wias-berlin.de/software/tetgen/>
- 5.44) Kuwano, J., Ishihara, K., Haya, H., and Izu, F.: Analysis on permanent deformation of embankments caused by earthquakes, *Soils and Foundations*, Vol.31, No.3, pp.97-110, 1991.
- 5.45) Philippon, M., Veslud, C.L.C.D, Gueydan, F., Brun, J.P. and Caumon, G.: 3D geometrical modelling of post-foliation deformations in metamorphic terrains (Syros, Cyclades, Greece), *Journal of Structural Geology*, Vol.78, pp.134-148, 2015.
- 5.46) Calin, M., Damian, G. Popescu, T., Manea, R., Erghelegiu, B. and Salagean, T.: 3D Modeling for Digital Preservation of Romanian Heritage Monuments, *Agriculture and Agricultural Science Procedia*, Vo.6, pp.421-428, 2015.
- 5.47) Vollgger, S.A., Crudena, A.R., Ailleresa, L. and Cowanb, E.J.: Regional dome evolution and its control on ore-grade distribution: Insights from 3D implicit modelling of the Navachab gold deposit, Namibia, *Ore Geology Reviews*, Vol.69, pp.268-284, 2015.
- 5.48) Leitner, C., Hofmann, P. and Marschallinger, R.: 3D-modeling of deformed halite hopper crystals by Object Based Image Analysis, *Computers & Geosciences*, Vol.73, pp.61-70, 2014.

第 6 章 結論

Conclusion

6.1 研究のまとめと今後の課題

本研究では、地盤・岩盤における大変形、流動化、崩壊、破壊挙動等の極めて複雑かつ不確実な挙動を精度よく評価できる手法を開発した。以下に本研究で得られた知見について述べる。

まず第1章において、研究背景を述べると共に国内外における地盤・岩盤の崩壊、崩落事例を列挙し、それらの現象により多くの人的被害が生じている現状を把握した。また将来、異常気象に伴い豪雨件数の増加を示唆し、斜面安定の評価手法ならびに崩壊挙動の解明の重要性を述べた。斜面安定性の評価手法には、物理的モデル、統計的モデルなど多くのモデルがあり、地盤・岩盤分野においては、すべり面を仮定し、すべり面に沿う永久変位量が算出できるニューマーク法が一般的に多く用いられてきているが、地盤・岩盤の変形挙動が複雑化すると精度良く評価できないことから、高精度に解析できるモデルの開発を示唆した。数値計算手法を用いた斜面評価手法には、有限要素法（FEM）や有限差分法（FDM）を用いた格子法や個別要素法（DEM）、不連続変形法（DDA）等の亀裂などによる不連続面を直接モデルにて表現可能な手法が用いられてきたことを示し、その問題点を呈した。具体的には、格子法において、斜面崩壊等の大変形を生じる場合、要素形状が大きく歪むため精度が極端に低下してしまい、また不連続面を直接モデルで表現手法においてはブロックの内部の応力、ひずみの評価ができず、対象とする地盤および岩盤が複数のブロックまたは無数の亀裂を有している場合、計算処理が煩雑するなどの問題を抱えている。さらには、凹凸面を有する多面体ブロックの接触判定が極めて困難であり、現在も種々の研究が行われていることを示した。その他の斜面評価手法としてメッシュフリー法および粒子法の存在を示唆し、境界付近での解の不安定性、境界条件の設定が困難であり、これらの挙動を精度よく評価できる手法が確立されていないことを示した。そして地盤・岩盤における変形、崩壊挙動を精度よく評価でき手法開発の重要性を呈した。

第2章では、亀裂性岩盤を対象とし弾性状態から崩壊に至る過程をロバストに解析できる手法の提案を行った。具体的には、2次元高精度メッシュジェネレータである“Triangle”および亀裂ネットワークモデル（DFN model）を用いて、亀裂を直接要素辺にて表現し、弾性領域においては回転自由度有する一般化有限要素法を用い、亀裂を有する箇所に移動最小自乗（MLSM）を用いることで不連続面を考慮できる手法の開発を行った。始めに回転自由度を有する一般化有限要素法の定式化を示し、亀裂を有する変位場における剛性マトリックスの導出を述べた。そして精度検証として、まず弾性状態において一般化有限要素法の精度検証を行い、定ひずみ三角形要素有する有限要素法より精度が良いことを示した。次に、パッチテストにおいて、一般化有限要素法と移動最小自乗法が混在する一定ひずみ場の精度検証を行った。その結果、要素サイズを小さくすることで一定ひずみ条件を満足できることが確認された。亀裂進展解析例として、まず中央切欠きを有する梁の3点曲げ問題を対象とし、Gálvez *et al.*の実験結果と比較検証を行い、亀裂パターンが実験結果と比較的類似した結果を呈することを示した。円孔を有する一軸圧縮試験を対象解

析では、定性的ではあるが Tagn *et al.*の結果と類似し、応力が集中するような問題に対しても有効性を示した。貫通切欠きを有する試験体の圧縮問題においても Zhu and Tang の結果と類似し、脆性固体における複雑な亀裂パターンを精度よく再現できることを確認した。最後に、応用解析例として不連続性岩盤モデルを対象とし亀裂進展解析を行った。上述したように、亀裂形状は亀裂ネットワークモデルを用いて決定し、その亀裂を Triangle を用いて要素辺にて直接表現している。亀裂進展解析の結果、得られる亀裂パターンは亀裂ネットワークに極めて依存した形で現れ、ある特定の箇所に集中化し、大規模な破壊面を形成することが確認された。今後の課題として、弾塑性モデル等の非線形モデルの導入、亀裂面（要素辺）にすべりを考慮したモデルの導入が挙げられ、大規模計算への応用展開も課題として挙げた。

第3章では、砕屑性の堆積岩を対象とし、粒子を多角形で近似し、岩石自体の亀裂は各粒子の界面にて発生することを仮定とした節点ベースの離散亀裂進展解析法の提案を行った。具体的には、弾性問題において高精度な解を得ることのできる EFMM (Enriched Free Mesh Method) と、任意の位置で高精度な近似関数を得ることのできる付帯条件付き多次元移動最小自乗法 (C-MultiMLSM : Multi-dimensional Moving Least Squares Method with Constraint condition) を併用することで、固体の弾性状態から破壊に至る過程をロバストに解析できる新たな解析手法を提案することを目的とした。EFMM の定式化ならびに積分領域が示され、そして亀裂を有する変位場におおける剛性マトリックスの定式化を述べた。この時、付帯条件付き多次元型移動最小自乗法 (C-MultiMLSM) の概念および変位場の導出を示した。精度検証として、弾性問題において変位誤差ノルムならびにエネルギー誤差ノルムを用いて EFMM の精度検証が行われた。結果として、定ひずみ三角形要素を用いた有限要素法より極めて高い精度であることを示した。次に、積分領域を変形させた場合における解の精度を検証し、積分領域の変形が解析精度に及ぼす影響は少ないことが確認された。亀裂進展解析においては、第2章同様に、中央切欠きを有する梁の曲げ試験 (Gálvez *et al.*の実験結果) ならびに円孔を有する試験体の一軸圧縮試験 (Tagn *et al.*の結果) を対処とし検証を行った。両解析結果とも既往の研究と類似した結果が得られ、本手法の妥当性が検証された。先在亀裂を有する試験体を対象とした問題では、先在亀裂の分布特性を考慮した亀裂進展解析がロバストに行うことができ、亀裂進展パターンが先在亀裂に極めて依存している結果が得られた。実問題に適用するためには、3次元問題への拡張や大規模解析への展開が必要となり今後の課題とした。

第4章では、地盤の大変形、崩壊現象を精度よく評価できる手法の開発を目的とした。本章では、近年、様々な分野で研究が盛んに行われている、メッシュフリー法、粒子法に着目した。粒子法は要素-節点コネクティビティーを必要としないため、地盤の大変形を伴うような問題に対しても、少ない労力で安定した計算を行うことができる。そこで、その粒子法の一つである MPM (Material Point Method) を用いて研究を行った。そして MPM において、弾性状態が継続する場合、時間増加とともに弾性エネルギーが変動するといった問題が指摘されていることから、MPM の弾性エネルギー変動に対する抑制手法の提案を行った。本章では、まず MPM な

らびに MPM の高精度化手法である GIMP (Generalized Interpolation Material Point Method) の定式化を行い、弾塑性状態 (対象とする物体が崩壊することを過程し、弾性状態が継続しない状態) における MPM の有効性を示すために、2006 年沖縄県中頭郡中城村北上原で発生した斜面崩壊 (北上原斜面崩壊) を対象とした地盤の崩壊挙動解析を行った。弾塑性構成則には Drucker-Prager の降伏関数を用いた。その結果、Tokashiki and Aydan の解析結果と非常に近い値が得られ、弾塑性状態における MPM の有効性を示唆した。次に弾性状態が継続する場合を考慮し、エネルギー変動に対する抑制手法の提案を行った。具体的には、MPM のアルゴリズム上算出されるひずみ増分値を移動最小自乗法 (MLSM) を用いて補間することで、エネルギー変動の抑制を行った。そして理論解が既知である問題を対象とし、理論解と解析解との比較検証を行った。まず準静的問題を対象とした場合、低い体積重量においては MPM および GIMP とともに理論解と同程度の値を呈するが、体積重量が高くなるにつれ、MPM では隣り合う粒子の応力が急激に変化する個所が確認され、GIMP で応力の微小な振動が確認された。抑制手法を導入すると、急激に変化する個所が少なくなり、振動も抑えられることが可能となった。動的問題を対象とした場合、MPM および GIMP とともに境界付近で理論解より高い応力波が確認され、またその応力波はかなり角張ったものとなった。抑制手法導入後、応力波の減衰も見られ、境界付近での高い値を呈した応力波もほぼ理論解と同程度となり、応力波も極めて滑らかとなった。最後に、物体の平行移動問題では、MPM および GIMP とともに時間増加に伴いひずみエネルギーが増加しエネルギー保存則が成立しなくなった。抑制手法導入した場合、そのひずみエネルギーの増加傾向も抑えられ、エネルギー保存則が満たす結果を呈した。したがって、本章ではエネルギー変動の抑制手法を用いることで、ひずみ増分値が補間され応力値が高く評価されることを抑え、安定した値を得られることを示唆した。地盤の大変形、崩壊挙動への適用を今後の課題とした。

これまで第 2~4 章では地盤・岩盤の変形、崩壊挙動を対処とし、それらの挙動を精度よく評価できる高精度解析手法の開発を行ってきた。今後の展開として、これらの手法を用いて複雑形状を対象とした場合、3 次元問題への拡張を行った場合、任意構造および任意形状をモデリングできる技術が必要であると考えた。そこで第 5 章では、多面体形状を有するブロックの幾何モデリングシステムの開発を目的とした。本章では、2 次元、3 次元におけるオープンソースの高精度メッシュジェネレータを用いており、具体的には、2 次元においては高精度な要素分割が可能な “Triangle” を用いて任意形状を三角形要素にて要素分割し、3 次元においては “TetGen” を用いて四面体要素にて要素分割している。そして要素化された任意形状を以下の方法でブロックモデリングしている。まず三角形要素において、頂点、辺の midpoint、要素内の内接円の中心点を用いたブロックシステムを提案した。すなわちこの点で囲まれる領域を 1 ブロックとしてモデリングした。また複雑形状を表現する場合、内接円内の中心点を内接円内で任意に移動させることで多種多様な形状をモデリングした。四面体要素においては、ブロックの面は四面体要素の頂点、各辺の midpoint、各面の重心、要素の重心を用いて形成することを提案した。この方法で

はブロックは要素サイズに依存するため、大小様々なブロックを有するモデルを作成する場合、TetGenにおいて要素サイズをランダムに作成することで、大小様々なブロックを有するモデルの作成を行うものとした。また、表面パッチを用いることで対象とする物体を1ブロックで表現可能とし、その結果、一般的に斜面崩壊モデルで用いられる、移動層（複数のブロックから構成される崩壊挙動を呈する領域）と不動域（斜面崩壊において基盤層、1ブロックから構成される非崩壊または非移動領域）のモデリングが可能となった。さらに、10万ブロックを有する地形モデルの作成を行い、ブロックのサイズが同程度のブロックから成る地形モデルと大小様々なブロックサイズから成る地形モデルをモデリングした。すなわち、本手法を用いることで多種多様な地形モデルを作成できることを示唆した。

以上のように本研究では、地盤・岩盤における変形、崩壊挙動を精度よく評価できる手法を開発し、任意多面体ブロックの幾何形状モデリングシステムも同時に開発した。回転自由度を有する一般化有限要素法と移動最小自乗法の亀裂進展解析およびEFMMと多次元型移動最小自乗法を用いた亀裂進展解析においては、定性的な比較検証を行っており定量的な比較検証が不十分であるため、実験値などと定量的な比較を行い、本手法の有効性を検証し、3次元問題への展開が望まれる。また第4章においては、本研究で提案したエネルギー変動に対する抑制手法を導入したMPMを弾塑性状態問題に適用していない。そのため弾性状態から塑性状態へ変化する問題に対する本手法の有効性は不確定である。今後は弾塑性状態における本手法を導入したMPMと従来のMPMを比較検証し、実地盤・岩盤を対象とする場合、3次元問題への拡張が必須である。そして、これらの手法が3次元問題ならびに複雑形状を有する問題を対象とした時、第5章で述べたブロックモデリングシステムが必須となり、それらの問題へスムーズに展開することが可能であると思われる。今後、本手法を用いて、多くの実地盤・岩盤における大変形、流動化、崩壊、破壊挙動等の極めて複雑かつ不確実な挙動、現象の解明が望まれる。

付録
Appendix

付録 A 変位仮定型有限要素法の剛性方程式

ここでは、有限要素法における剛性方程式（剛性マトリックス）の導出について簡単に述べる。有限要素法における剛性方程式の導出に関して、一般的に、変位仮定型による剛性方程式、ハイブリッド型変分原理に基づく剛性方程式、Hu-Washizuの一般化変分原理による剛性方程式¹⁾があるが、ここでは変位仮定型に基づく剛性方程式の導出法について述べる。

A.1 変位仮定型有限要素法の剛性方程式

(a) 仮想仕事の原理

力学における重要な原理の一つである仮想仕事の原理（principle of virtual work）は、次のように述べられる。

「一つの質点が、これに働く幾つかの力の作用のもとで釣り合う状態にあるとき、この質点に任意の微小な仮想変位（virtual displacement）を与えても、質点に働いているすべて力がこの仮想変位によってなす仕事の総和は 0 である。」

上記のことを式で表すと、

$$\int_S \{\delta^*\}^T \{P\} dS + \int_\Omega \{\delta^*\}^T \{F\} d\Omega - \int_\Omega \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} d\Omega = 0 \quad (\text{A.1 a})$$

ここで、 $\{P\}$ は単位面積当たりの表面力、 $\{F\}$ は単位体積当たりの体積力、 $\{\delta^*\}$ は仮想変位、 $\{\varepsilon^*\}$ は仮想変位に対するひずみ成分である。

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1 b})$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1 c})$$

$$\{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1 d})$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1 e})$$

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{yz} \\ \delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1 f})$$

また，仮想仕事の原理は，次のような物理的な意味を有する。

- 1) 物体が安定なつり合い状態にある場合には，物体の位置エネルギーは最小になる。
- 2) つり合い状態にある物体内部の応力分布あるいはひずみ分布は，その物体の位置エネルギー（ひずみエネルギー）を最小とするような分布となる。

(b) アイソパラメトリック要素

任意形状の要素の節点数を n ，節点 i ($=1, 2, \dots, n$) の全体座標系 (x, y, z) における節点座標を (x_i, y_i, z_i) とし，要素の座標関数 x, y, z を局所座標系 (ξ, η, ζ) で表わされる形状関数 $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ を用いて，一義的に次式のように表される。

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ただし，

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (\text{A.3})$$

である。ここで，要素の形状関数 $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ は節点 j に対して，次のような式が成り立つ。

$$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.4})$$

ここで， δ_{ij} は Kronecker のデルタ ($i=j$ のとき 1， $i \neq j$ のとき 0) である。

要素の節点変位成分を u_i, v_i, w_i ($i=1, 2, \dots, n$) とし，要素の未知関数である

変位関数 u, v, w を，アイソパラメトリック要素では，要素幾何的経常を表す座標関数式(A.3)の形状関数 N_i と同一の形状関数 $N(\xi, \eta, \zeta)$ を用いて，次のように表す。

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) u_i \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) v_i \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) w_i \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

(c) 三角形要素における剛性マトリックス

いま，体積力を考えないとすると，式(A.1)は

$$\int_S \{\delta^*\}^T \{P\} dS = \int_{\Omega} \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} d\Omega \quad (\text{A.6})$$

となる。式(A.6)における右辺第一項は物体表面に作用する力であり，すなわち境界における節点に作用する節点力 $\{f\}$ である。次に，微小変形理論より等方弾性体におけるひずみ－変位の関係は次式のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

となり，2次元問題 ($w=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$) において式(A.5)を考慮すると要素内部のひずみおよび節点変位は，以下の式で関連付けられる。

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \\
\{\varepsilon\} &= [B]\{u\}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

さらに、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とすると応力-ひずみの関係は

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \\
\{\varepsilon\} &= [C]\{\sigma\}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} &= [C]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & 1-2\nu & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \\
\{\sigma\} &= [D]\{\varepsilon\}
\end{aligned} \tag{A.10a}$$

平面応力状態 (plane stress condition: $\sigma_z=0$) の場合、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10b})$$

また平面ひずみ状態 (plane strain condition: $\varepsilon_z=0$) の場合,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10c})$$

となる。よって、式(A.8)および式(A.10)を式(A.6)に代入すると、

$$\int_S \{\delta^*\}^T \{P\} dS = \int_{\Omega} \{\delta^*\}^T [B]^T [D][B] \{\delta\} d\Omega \quad (\text{A.11})$$

したがって、剛性マトリックス $[K]$ は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} [K] \{\delta\} &= \{F\} \\ [K] &\equiv \int_{\Omega} [B]^T [D][B] d\Omega \\ \{F\} &\equiv \int_S \{P\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

(d) 三辺形および四面体要素

三辺形要素では形状関数の座標系として、面積座標 (L_1, L_2, L_3) を用いているのでは、この導関数の求め方を示す。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13a})$$

すなわち

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13b})$$

ここで、 $L_1+L_2+L_3=1$ および式(A.2)を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial L_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial L_1} x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_3} x_i \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_2} x_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_3} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial L_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_1} y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_3} y_i \\ \frac{\partial y}{\partial L_2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_2} y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial L_3} y_i \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

であるから、Jacobi のマトリックス $[J]$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \\ &\equiv [T][\Psi][\mathbf{x}_n \quad \mathbf{y}_n] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ひずみ式に必要な変位関数の導関数は式(A.5)を用いて、次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} &= [J]^{-1} [T] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & v_n \end{bmatrix} \\
&\equiv [J]^{-1} [T] [\Psi] [u_n \quad v_n]
\end{aligned} \tag{A.16}$$

ここに,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2}{\partial L_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2}{\partial L_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial L_3} & \frac{\partial N_2}{\partial L_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial L_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

である。三角形要素では面積座標 (L_1, L_2, L_3) を用いるので, $d\Omega$ を要素の厚さ t を用いて次のように返還できる。

$$d\Omega = t dS = t dx dy = t \det[J] dL_1 dL_2 \tag{A.18}$$

付録 B 移動最小自乗法に基づく変位場の導出

ここでは、移動最小自法（MLSM: Moving Least Squares Method）²⁾に基づく変位場の導出を行う。移動最小自乗法は一次元の誤差空間にて定義されており、この時の評価関数は次式となる。

$$J = \sum_i^n w(r_i, h) \{f(x_i, y_i) - f_i\}^2 \quad (\text{B.1})$$

ここで、 J は残差の自乗和、 n は影響領域の内部にある近傍粒子数、 $w(r_i, h)$ は重み関数、 r_i は着目粒子と近傍粒子の距離、 h は影響領域の半径である。なお、重み関数 $w(r_i, h)$ に関しては、影響半径の内部で4次のスプライン関数を仮定した。具体的には次式にて表すことができる。

$$w(r_i, h) = \begin{cases} \frac{5}{\pi h^2} \left[1 - 6 \left(\frac{r_i}{h} \right)^2 + 8 \left(\frac{r_i}{h} \right)^3 - 3 \left(\frac{r_i}{h} \right)^4 \right] & (0 \leq r_i \leq h) \\ 0 & (h < r_i) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

デカルト（Descartes）の直交座標系 (x, y) 上の座標 (x_i, y_i) に位置する粒子 i に着目する。着目粒子 i の並進方向変位のうち、 x 方向変位である u のみに着目し、 u を以下のように任意の多項式で定義する（ここでは、完全一次多項式を用いる）。

$$u = a + bx + cy \quad (\text{B.3a})$$

上式をマトリックス表記すると、

$$\begin{aligned} u &= [a \ b \ c]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{p}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{B.3b})$$

となる。次に、未定係数 \mathbf{a} を決定するために、移動最小自法を適用する。すなわち式 (B.1) に代入すると、

$$\begin{aligned} J &= \sum_j^n w(r_j) (a + bx_j + cy_j - u_j)^2 \\ &= \sum_j^n w(r_j) (\mathbf{a}^T \mathbf{p}(x_j, y_j) - u_j)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となる。したがって、式(B.4)が最小となるための未定乗数は次式により得られる。

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (\text{B.5a})$$

すなわち、

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial c} = 0 \quad (\text{B.5b})$$

である。これらの式を整理すると次のマトリックス方程式が得られる。

$$\mathbf{A}^u \mathbf{a} = \mathbf{b}^u$$

$$\begin{bmatrix} \sum_j^n w(r_j) & \sum_j^n w(r_j)x_j & \sum_j^n w(r_j)y_j \\ \sum_j^n w(r_j)x_j & \sum_j^n w(r_j)x_j^2 & \sum_j^n w(r_j)x_j y_j \\ \sum_j^n w(r_j)y_j & \sum_j^n w(r_j)x_j y_j & \sum_j^n w(r_j)y_j^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_j^n w(r_j)u_j \\ \sum_j^n w(r_j)x_j u_j \\ \sum_j^n w(r_j)y_j u_j \end{Bmatrix} \quad (\text{B.6a})$$

マトリックス \mathbf{A}^u に関してマトリックス表記すると,

$$\mathbf{A}^u = \sum_j^n w(r_j) \mathbf{p}(x_j, y_j) \mathbf{p}^T(x_j, y_j) \quad (\text{B.6b})$$

となり, マトリックス \mathbf{b}^u についてマトリックス展開を行うと以下の式を得る.

$$\mathbf{b}^u = \begin{Bmatrix} \sum_j^n w(r_j)u_j \\ \sum_j^n w(r_j)x_j u_j \\ \sum_j^n w(r_j)y_j u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} w(r_1) & w(r_2) & \cdots & w(r_n) \\ w(r_1)x_1 & w(r_2)x_2 & \cdots & w(r_n)x_n \\ w(r_1)y_1 & w(r_2)y_2 & \cdots & w(r_n)y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^u \mathbf{u}_j \quad (\text{B.7})$$

式(B.3)および式(B.6), 式(B.7)より, 局所パッチにおける変位場は以下の式にて表わされる.

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}(x, y) (\mathbf{A}^u)^{-1} \mathbf{C}^u \mathbf{u}_j \equiv \mathbf{N} \mathbf{u}_j \quad (\text{B.8})$$

ここで, N : 形状関数である. なお, 形状関数の微分は次式にて得られる.

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{p}(x, y)}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^u)^{-1} \mathbf{C}^u + \mathbf{p}(x, y) \frac{\partial \mathbf{A}^{u^{-1}}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}^u + \mathbf{p}(x, y) (\mathbf{A}^u)^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}^u}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{B.9})$$

なお, $(\mathbf{A}^u) (\mathbf{A}^u)^{-1} = \mathbf{I}$ を考慮すると,

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{u^{-1}}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^u \frac{\partial \mathbf{A}^u}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^u)^{-1} \quad (\text{B.10})$$

である. また, 着目粒子 i の他方向の変位である y 方向変位 v も u と同様にして求められる.

付録 C 付帯条件付き多次元型移動最小自乗法に基づく変位場の導出

ここでは、付帯条件付き多次元移動最小自乗法（C-MultiMLSM：Multi-dimensional Moving Least Squares Method with Constraint condition）³⁾に基づく変位場の導出を行う^{4)・6)}。着目粒子 i にて影響領域（任意の粒子に影響を及ぼす一定の領域）内に存在する n 個の近傍粒子の物理量を補間する問題を考える。ここで、デカルトの直交座標系 (x, y) にて定義された、 l 個の物理量 $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_l(x, y)$ が m 個のパラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を介して関連付けられているものとする。このとき、粒子 i の関数値と計算値との間に生じる重み付き残差の平方和は

$$\begin{aligned} J_i &= \sum_j^n w(r_{ij}, h) \left[\left\{ f_1^h(x_j, y_j) - f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right\}^2 + \left\{ f_2^h(x_j, y_j) - f_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left\{ f_l^h(x_j, y_j) - f_l(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right\}^2 \right] \\ &= \sum_j^n w(r_{ij}, h) \sum_i^l \left\{ f_i^h(x_j, y_j) - f_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \right\}^2 \end{aligned} \quad (C.1)$$

ここで、 n は近傍粒子数である。なお重み関数に関して、本研究では、付録 B 同様、4次スプライン関数を用いた。粒子 i 点の並進方向変位に関して、2次の項まで Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} u &= u_i + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i \tilde{x}_i + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i \tilde{y}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_i \tilde{y}_i^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i \\ v &= v_i + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i \tilde{x}_i + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_i \tilde{y}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_i \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_i \tilde{y}_i^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big|_i \tilde{x}_i \tilde{y}_i \end{aligned} \quad (C.2)$$

となる。ここで、

$$\tilde{x}_i = x - x_i \quad \tilde{y}_i = y - y_i \quad (C.3)$$

ひずみと回転の定義より、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ix} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i & \varepsilon_{ix,x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i & \varepsilon_{ix,y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_i \\ \varepsilon_{iy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_i & \varepsilon_{iy,x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big|_i & \varepsilon_{iy,y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_i \\ \gamma_{ixy} &= \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i & \gamma_{ixy,x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_i & \gamma_{ixy,y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \Big|_i + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_i \\ \theta_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_i - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i \right) \end{aligned} \quad (C.4)$$

であるので、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_i &= \frac{1}{2}\gamma_{ixy} - \theta_i & \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_i &= \frac{1}{2}\gamma_{ixy} + \theta_i \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_i &= \gamma_{ixy,y} - \varepsilon_{iy,x} & \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_i &= \gamma_{ixy,x} - \varepsilon_{ix,y}\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

となる。よって、式(C.2)は

$$\begin{aligned}u &= u_i + \varepsilon_{ix}\tilde{x}_i + \left(\frac{1}{2}\gamma_{ixy} - \theta_i\right)\tilde{y}_i + \frac{1}{2}\varepsilon_{ix,x}\tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{ixy,y} - \varepsilon_{iy,x})\tilde{y}_i^2 + \varepsilon_{ix,y}\tilde{x}_i\tilde{y}_i \\ v &= v_i + \left(\frac{1}{2}\gamma_{ixy} + \theta_i\right)\tilde{x}_i + \varepsilon_{iy}\tilde{y}_i + \frac{1}{2}(\gamma_{ixy,x} - \varepsilon_{ix,y})\tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{iy,y}\tilde{y}_i^2 + \varepsilon_{iy,x}\tilde{x}_i\tilde{y}_i\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

と表記する。式(C.6)をマトリックス表記すると次式のようにになる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \mathbf{F}^u(x, y)\mathbf{D}^u \quad (\text{C.7})$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^u(x, y) &= \begin{bmatrix} -\tilde{y}_i & \tilde{x}_i & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 & \tilde{x}_i\tilde{y}_i & -\frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 \\ \tilde{x}_i & 0 & \tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i & 0 & -\frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 & \tilde{x}_i\tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{y}_i^2 & \frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}^u &= (\theta_i \quad \varepsilon_{ix} \quad \varepsilon_{iy} \quad \gamma_{ixy} \quad \varepsilon_{ix,x} \quad \varepsilon_{ix,y} \quad \varepsilon_{iy,x} \quad \varepsilon_{iy,y} \quad \gamma_{ixy,x} \quad \gamma_{ixy,y})^T\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

である。なお、一次近似の場合には次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^u(x, y) &= \begin{bmatrix} -\tilde{y}_i & \tilde{x}_i & 0 & \frac{1}{2}\tilde{y}_i \\ \tilde{x}_i & 0 & \tilde{y}_i & \frac{1}{2}\tilde{x}_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}^u &= (\theta_i \quad \varepsilon_{ix} \quad \varepsilon_{iy} \quad \gamma_{ixy})^T\end{aligned}\quad (\text{C.9})$$

次に、未定乗数 \mathbf{D}^u を粒子 i 周りの粒子群 j から最小自乗近似することを考える。すなわち、式 (C.7) 式 (C.1) に代入すると、C-MultiMLS 法の評価関数は次式となる。

$$\begin{aligned}J &= \sum_j w(r_j) \left[\left(\tilde{u}_{ji} + \tilde{y}_{ji}\theta_i - \tilde{x}_{ji}\varepsilon_{ix} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}\gamma_{ixy} - \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}^2\varepsilon_{ix,x} - \tilde{x}_{ji}\tilde{y}_{ji}\varepsilon_{ix,y} + \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}^2\varepsilon_{iy,x} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}^2\gamma_{ixy,y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{v}_{ji} - \tilde{x}_{ji}\theta_i - \tilde{y}_{ji}\varepsilon_{iy} - \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}\gamma_{ixy} + \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}^2\varepsilon_{ix,y} - \tilde{x}_{ji}\tilde{y}_{ji}\varepsilon_{iy,x} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{ji}^2\varepsilon_{iy,y} - \frac{1}{2}\tilde{x}_{ji}^2\gamma_{ixy,x} \right)^2 \right] \\ &\leftrightarrow J = \sum_j w(r_j) (J_u^2 + J_v^2)\end{aligned}\quad (\text{C.10})$$

ここで、 $\tilde{u}_{ji} = u_j - u_i$, $\tilde{u}_{ji,x} = u_{j,x} - u_{i,x}$, $\tilde{u}_{ji,y} = u_{j,y} - u_{i,y}$, $\tilde{x}_{ji} = x_j - x_i$, $\tilde{y}_{ji} = y_j - y_i$ である。し

たがって，式(C.10)が最小となるための未定乗数は次式により得られる。

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{D}^u} = 0 \quad (\text{C.11 a})$$

すなわち，並進方向変位を2次の項まで Taylor 展開した場合，

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta_i} &= \sum_j w(r_j) (\tilde{y}_{ji} J_u - \tilde{x}_{ji} J_v) = 0 & \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{ix}} &= \sum_j w(r_j) (-\tilde{x}_{ji} J_u) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{iy}} &= \sum_j w(r_j) (-\tilde{y}_{ji} J_v) = 0 & \frac{\partial J}{\partial \gamma_{ixy}} &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji} J_u - \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} J_v \right) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{ix,x}} &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 J_u \right) = 0 & \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{ix,y}} &= \sum_j w(r_j) \left(-\tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} J_u + \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 J_v \right) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{iy,x}} &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 J_u - \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} J_v \right) = 0 & \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{iy,y}} &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 J_v \right) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \gamma_{ixy,x}} &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 J_v \right) = 0 & \frac{\partial J}{\partial \gamma_{ixy,y}} &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 J_u \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.11 b})$$

である。よって，これらの式を整理すると次のマトリックス方程式が得られる。

$$\mathbf{A}^u(x, y) \mathbf{D}^u = \mathbf{b}^u$$

$$\mathbf{A}^u(x, y) \left\{ \begin{array}{c} \theta_i \\ \varepsilon_{ix} \\ \varepsilon_{iy} \\ \gamma_{ixy} \\ \varepsilon_{icx} \\ \varepsilon_{ic,y} \\ \varepsilon_{iy,x} \\ \varepsilon_{iy,x} \\ \gamma_{ixy,x} \\ \gamma_{ixy,y} \end{array} \right\} = \mathbf{b}^u \quad (\text{C.12})$$

したがって，式(C.7)および式(C.12)より，着目粒子の並進方向変位は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \mathbf{F}^u(x, y) (\mathbf{A}^u(x, y))^{-1} \mathbf{b}^u \\ &= \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \mathbf{F}^u(x, y) (\mathbf{A}^u(x, y))^{-1} \mathbf{C}^u \mathbf{u}_i \\ &\equiv \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} + \mathbf{N} \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

ここで， \mathbf{N} は形状関数である。

マトリックス $\mathbf{A}^u(x, y)$, \mathbf{b}^u の具体的な展開は以下に示す。

$$\begin{aligned}
A_{1,1}^u &= \sum_j w(r_j) (\tilde{x}_{ji}^2 + \tilde{y}_{ji}^2) & A_{1,2}^u &= \sum_j w(r_j) (-\tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}) \\
A_{1,3}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} & A_{1,4}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 - \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 \right) \\
A_{1,5}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) & A_{1,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 - \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \right) \\
A_{1,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} + \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^3 \right) & A_{1,8}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \\
A_{1,9}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 & A_{1,10}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,1}^u &= \sum_j w(r_j) (-\tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}) & A_{2,2}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji}^2 \\
A_{2,3}^u &= 0 & A_{2,4}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} \\
A_{2,5}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 & A_{2,6}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \\
A_{2,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \right) & A_{2,8}^u &= 0 \\
A_{2,9}^u &= 0 & A_{2,10}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{3,1}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} & A_{3,2}^u &= 0 \\
A_{3,3}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{y}_{ji}^2 & A_{3,4}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} \\
A_{3,5}^u &= 0 & A_{3,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) \\
A_{3,7}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 & A_{3,8}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^3 \\
A_{3,9}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} & A_{3,10}^u &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{4,1}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 + \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \right) & A_{4,2}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} \\
A_{4,3}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} & A_{4,4}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^2 + \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \right) \\
A_{4,5}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} & A_{4,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 - \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^3 \right) \\
A_{4,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^3 + \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) & A_{4,8}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \\
A_{4,9}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^3 & A_{4,10}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{5,1}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) & A_{5,2}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \\
A_{5,3}^u &= 0 & A_{5,4}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \\
A_{5,5}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^4 & A_{5,6}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \tilde{y}_{ji} \\
A_{5,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 \right) & A_{5,8}^u &= 0 \\
A_{5,9}^u &= 0 & A_{5,10}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{6,1}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 - \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \right) & A_{6,2}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \\
A_{6,3}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) & A_{6,4}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 - \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^3 \right) \\
A_{6,5}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \tilde{y}_{ji} & A_{6,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 + \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^4 \right) \\
A_{6,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^3 - \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \tilde{y}_{ji} \right) & A_{6,8}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 \right) \\
A_{6,9}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^4 \right) & A_{6,10}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{7,1}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^3 + \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) & A_{7,2}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \right) \\
A_{7,3}^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 & A_{7,4}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^3 + \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} \right) \\
A_{7,5}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 \right) & A_{7,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^3 - \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \tilde{y}_{ji} \right) \\
A_{7,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^4 + \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 \right) & A_{7,8}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^3 \\
A_{7,9}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \tilde{y}_{ji} & A_{7,10}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{8,1}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 & A_{8,2}^u &= 0 \\
A_{8,3}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^3 & A_{8,4}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \\
A_{8,5}^u &= 0 & A_{8,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 \right) \\
A_{8,7}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^3 & A_{8,8}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^4 \\
A_{8,9}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 & A_{8,10}^u &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{9,1}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 & A_{9,2}^u &= 0 \\
A_{9,3}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji} & A_{9,4}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^3 \\
A_{9,5}^u &= 0 & A_{9,6}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^4 \right) \\
A_{9,7}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^3 \tilde{y}_{ji} & A_{9,8}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 \\
A_{9,9}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^4 & A_{9,10}^u &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{10,1}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^3 \right) & A_{10,2}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^2 \\
A_{10,3}^u &= 0 & A_{10,4}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^3 \\
A_{10,5}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{y}_{ji}^2 & A_{10,6}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji}^3 \\
A_{10,7}^u &= \sum_j w(r_j) \left(-\frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^4 \right) & A_{10,8}^u &= 0 \\
A_{10,9}^u &= 0 & A_{10,10}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{4} \tilde{y}_{ji}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1^u &= \sum_j w(r_j) (\tilde{x}_{ji} \tilde{v}_{ji} - \tilde{y}_{ji} \tilde{u}_{ji}) \\
b_2^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{u}_{ji} \\
b_3^u &= \sum_j w(r_j) \tilde{y}_{ji} \tilde{v}_{ji} \\
b_4^u &= \sum_j w(r_j) \left(\frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} \tilde{v}_{ji} + \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji} \tilde{u}_{ji} \right) \\
b_5^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{u}_{ji} \\
b_6^u &= \sum_j w(r_j) \left(\tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} \tilde{u}_{ji} - \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{v}_{ji} \right) \\
b_7^u &= \sum_j w(r_j) \left(\tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} \tilde{v}_{ji} - \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 \tilde{u}_{ji} \right) \\
b_8^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 \tilde{v}_{ji} \\
b_9^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 \tilde{v}_{ji} \\
b_{10}^u &= \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 \tilde{u}_{ji}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^u &= \mathbf{C}^u \mathbf{u}_i \\
&= \begin{bmatrix}
\sum_j w(r_j) \tilde{y}_{ji} & -\sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} & -w(r_1) \tilde{y}_{1i} & w(r_1) \tilde{x}_{1i} & \cdots & -w(r_n) \tilde{y}_{ni} & w(r_n) \tilde{x}_{ni} \\
-\sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} & 0 & w(r_1) \tilde{x}_{1i} & 0 & \cdots & w(r_n) \tilde{x}_{ni} & 0 \\
0 & -\sum_j w(r_j) \tilde{y}_{ji} & 0 & w(r_1) \tilde{y}_{1i} & \cdots & 0 & w(r_n) \tilde{y}_{ni} \\
-\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji} & -\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji} & w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{y}_{1i} & w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{x}_{1i} & \cdots & w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ni} & w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ni} \\
-\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 & 0 & w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{x}_{1i}^2 & 0 & \cdots & w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ni}^2 & 0 \\
-\sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} & \sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 & w(r_1) \tilde{x}_{1i} \tilde{y}_{1i} & -w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{x}_{1i}^2 & \cdots & w(r_n) \tilde{x}_{ni} \tilde{y}_{ni} & -w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ni}^2 \\
\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 & -\sum_j w(r_j) \tilde{x}_{ji} \tilde{y}_{ji} & -w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{y}_{1i}^2 & w(r_1) \tilde{x}_{1i} \tilde{y}_{1i} & \cdots & -w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ni}^2 & w(r_n) \tilde{x}_{ni} \tilde{y}_{ni} \\
0 & -\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 & 0 & w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{y}_{1i}^2 & \cdots & 0 & w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ni}^2 \\
0 & -\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ji}^2 & 0 & w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{x}_{1i}^2 & \cdots & 0 & w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{x}_{ni}^2 \\
-\sum_j w(r_j) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ji}^2 & 0 & w(r_1) \frac{1}{2} \tilde{y}_{1i}^2 & 0 & \cdots & w(r_n) \frac{1}{2} \tilde{y}_{ni}^2 & 0
\end{bmatrix} \begin{cases} u_i \\ v_i \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{cases}
\end{aligned}$$

付録 D MPM のアルゴリズム

Material Point Method (MPM) のアルゴリズムに関して、大別して MUSL (Modified Update Stress Last)⁷⁾, USL (Update Stress Last)⁸⁾, USAVG (Update Stress Averaged)⁹⁾ の 3 つのアルゴリズムが存在する。MUSL は Sulsky *et al.* により提案された手法である。1994 年に Sulsky *et al.* が MPM を提案した際に用いたアルゴリズムである USL (Update Stress Last)¹⁰⁾ がエネルギー保存を満たさないことがわかり、USL を改良したアルゴリズムである。MUSL では、運動量保存則に従い格子点速度を求めることで、粒子速度を滑らかにし、数値誤差により発散した速度を平滑化し、エネルギー保存則に関する精度を向上できるアルゴリズムとなっている。本論文第 4 章における MPM のアルゴリズムは MUSL となっている。以下に、MUSL, USF および USAVG のアルゴリズムを記す。

D.1 MUSL (Modified Update Stress Last)

MUSL は上述したように、Sulsky *et al.*⁷⁾ により提案された USL¹⁰⁾ を改良したアルゴリズムである。初めに粒子 p の座標を用いて、内挿関数 (ϕ_i) および内挿関数の空間勾配 ($d\phi_i$) を求める。なお、内挿関数および内挿関数の空間勾配の詳細は第 4 章を参照されたい。そして、粒子の質量 m_p を用いて、各節点の質量 m_i を求める。

$$m_i^k = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.1})$$

ここで、 N_p は格子点 i が存在する格子中に含まれる粒子の総数であり、 k はステップ数を表わす。粒子の応力 $\boldsymbol{\sigma}_p$, 体積力 \mathbf{b}_p を用いて、節点の外力および内力を求め、節点の加速度 \mathbf{a}_i を求める。

$$\mathbf{a}_i^k = \frac{\mathbf{f}_i^{\text{int},k} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k}}{m_i^k} \quad (\text{D.2})$$

節点加速度を用いて、節点の速度を更新する。

$$\mathbf{v}_i^L = \mathbf{v}_i^k + \mathbf{a}_i^k \Delta t \quad (\text{D.3})$$

そして、節点速度を用いて、粒子の速度ならびに座標を更新する。

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i^k \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i^L \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.5})$$

このとき、運動量保存則より、 $k+1$ ステップにおける節点速度を求める。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{v}_p^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{m_i^k} \quad (\text{D.6})$$

そして、 $k+1$ ステップにおける節点速度を用いて、粒子のひずみ増分値を求める。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} + \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} \right)^T \right\} \quad (\text{D.7})$$

そして、ひずみ増分値を用いて粒子の応力と密度を更新する。

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} \quad (\text{D.8})$$

$$\rho_p^{k+1} = \frac{\rho_p^k}{1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1})} \quad (\text{D.9})$$

ここで、 \mathbf{D} は応力-ひずみマトリックスである。

D.2 USF (Update Stress Last)

USFはBardenhagen⁸⁾により提案されたアルゴリズムである。USFではMUSLと逆に粒子の応力、ひずみをアルゴリズムの前半部分で求め、その後、節点速度等を求めている。USFにおいても、MUSL同様に、初めに粒子 p の座標を用いて、内挿関数 (ϕ_i) および内挿関数の空間勾配 $(d\phi_i)$ を求め、粒子の質量 m_p を用いて、各節点の質量 m_i を求める。さらに、各節点の運動量を求め、次式より節点速度を求める。

$$\mathbf{v}_i^k = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{v}_p^k \phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{m_i^k} \quad (\text{D.10})$$

そして、節点速度を用いて、粒子のひずみ増分値を求め、応力と密度を更新する。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^k + \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^k \right)^T \right\} \quad (\text{D.11})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} \quad (\text{D.12})$$

$$\rho_p^{k+1} = \frac{\rho_p^k}{1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1})} \quad (\text{D.13})$$

次に、 $k+1$ ステップにおける粒子の応力 $\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1}$ を用いて、節点外力、内力を求め、節点加速度を算出する。

$$\mathbf{a}_i^{k+1} = \frac{\mathbf{f}_i^{\text{int},k+1} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k+1}}{m_i^k} \quad (\text{D.14})$$

この時、 $k+1$ ステップにおける節点加速度を用いて、節点速度は次式にて表される。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \mathbf{a}_i^{k+1} \Delta t \quad (\text{D.15})$$

そして、節点速度を用いて、粒子の速度ならびに座標を更新する。

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.17})$$

D.3 USAVG (Update Stress Averaged)

USAVG は Nairn⁹⁾により提案されたアルゴリズムであり、USF と MUSL を併用したアルゴリズムである。アルゴリズム前半部分で USF を行い、後半部分で MUSL を行う。USF ならびに MUSL においては、通常、運動量保存則は節点速度を算出する時に、アルゴリズムの前半部分あるいは後半部分で 1 度だけ考慮されるが、USAVG では、アルゴリズムの前半部分と後半部分とで考慮することにより数値誤差の低減を可能としている。USAVG においても、MUSL 同様に、初めに粒子 p の座標を用いて、内挿関数 (ϕ_i) および内挿関数の空間勾配 ($d\phi_i$) を求め、粒子の質量 m_p を用いて、各節点の質量 m_i を求める。さらに、各節点の運動量を求め、次式より節点速度を求める。

$$\mathbf{v}_i^k = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{v}_p^k \phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{m_i^k} \quad (\text{D.18})$$

そして、節点速度を用いて、粒子のひずみ増分値を求め、応力ならびに密度を更新する。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k'} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^k + \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^k \right)^T \right\} \quad (\text{D.19})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k'} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{k'} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k'} \quad (\text{D.20})$$

$$\rho_p^{k'} = \frac{\rho_p^k}{1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k'})} \quad (\text{D.21})$$

次に、 k' ステップにおける粒子の応力 $\boldsymbol{\sigma}_p^{k'}$ を用いて、節点外力、内力を求め、節点加速度を算出する。

$$\mathbf{a}_i^{k+1} = \frac{\mathbf{f}_i^{\text{int},k'} + \mathbf{f}_i^{\text{ext},k'}}{m_i^k} \quad (\text{D.22})$$

この時、 $k+1$ ステップにおける節点加速度を用いて、節点速度は次式にて表される。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \mathbf{v}_i^k + \mathbf{a}_i^{k+1} \Delta t \quad (\text{D.23})$$

そして、節点速度を用いて、粒子の速度ならびに座標を更新する。

$$\mathbf{v}_p^{k+1} = \mathbf{v}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{a}_i^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.24})$$

$$\mathbf{x}_p^{k+1} = \mathbf{x}_p^k + \Delta t \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{v}_i^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k) \quad (\text{D.25})$$

運動量保存則より、節点速度の修正を行う。

$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \frac{\sum_{p=1}^{N_p} m_p \mathbf{v}_p^{k+1} \phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{m_i^k} \quad (\text{D.26})$$

運動量を考慮し算出した節点速度を用いて、粒子のひずみ増分値を求め、応力、密度を更新する。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} + \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p^k)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i^{k+1} \right)^T \right\} \quad (\text{D.27})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^k + \mathbf{D} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} \quad (\text{D.28})$$

$$\rho_p^{k+1} = \frac{\rho_p^k}{1 + \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1})} \quad (\text{D.29})$$

Fig.D.1～D.3 に各アルゴリズムのフローチャートを示す。また、斜面崩壊等の大変形解析を行う場合、剛体回転の影響を考慮する必要がある^{11), 12)}。この影響を考慮するために、Jaumann 応力速度による剛体回転成分の補正を行う。

$$\sigma_{ij_p} = \sigma_{ij_p} + \Delta t \left(\sigma_{im_p} \omega_{mj_p} - \omega_{im_p} \sigma_{mj_p} \right) + \Delta \sigma_{ij_p} \quad (\text{D.30})$$

ここで、 ω_{ij} はスピンテンソルであり、次式で表わされる。

$$\Delta \boldsymbol{\omega}_p = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_n} \left\{ \frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i - \left(\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_p)}{d\mathbf{x}} \mathbf{v}_i \right)^T \right\} \quad (\text{D.31})$$

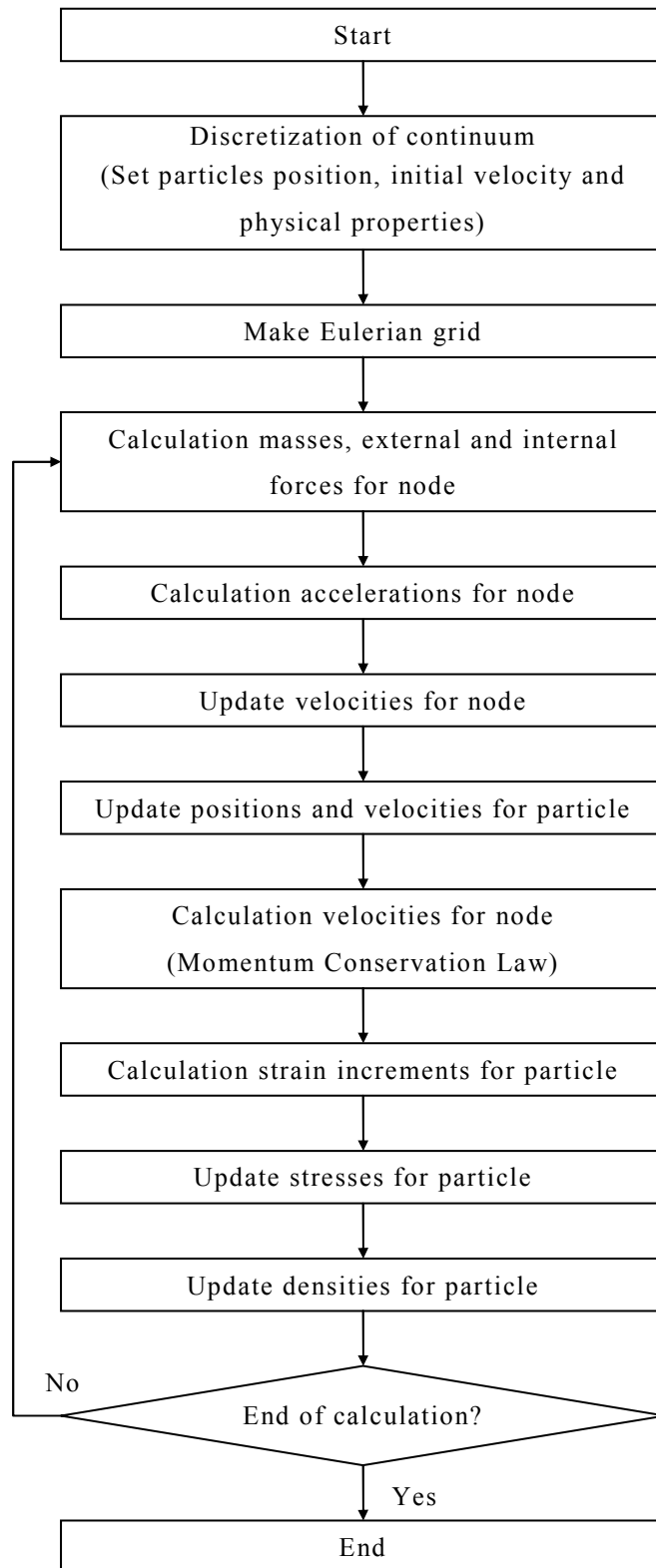


Fig.D.1 Flowchart for MUSL

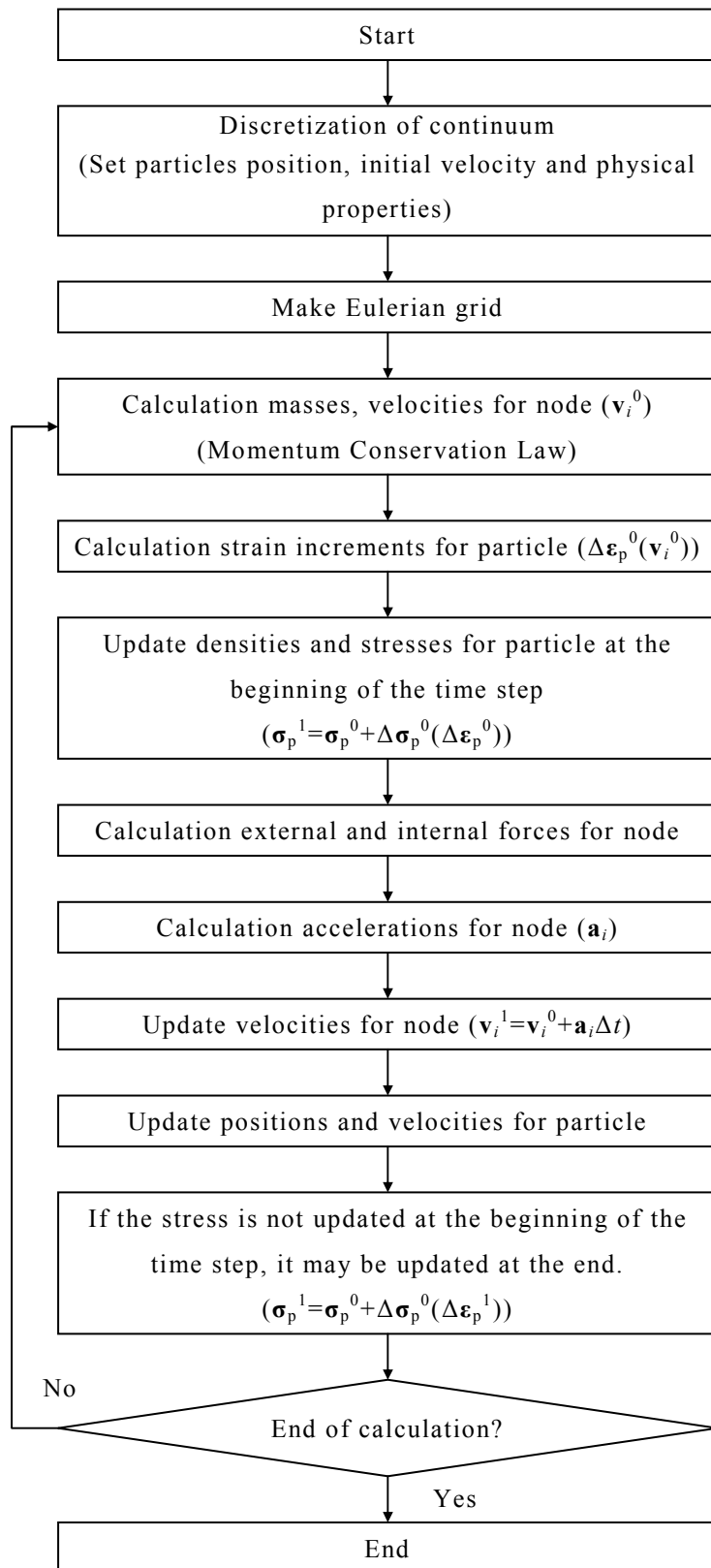


Fig.D.2 Flowchart for USF

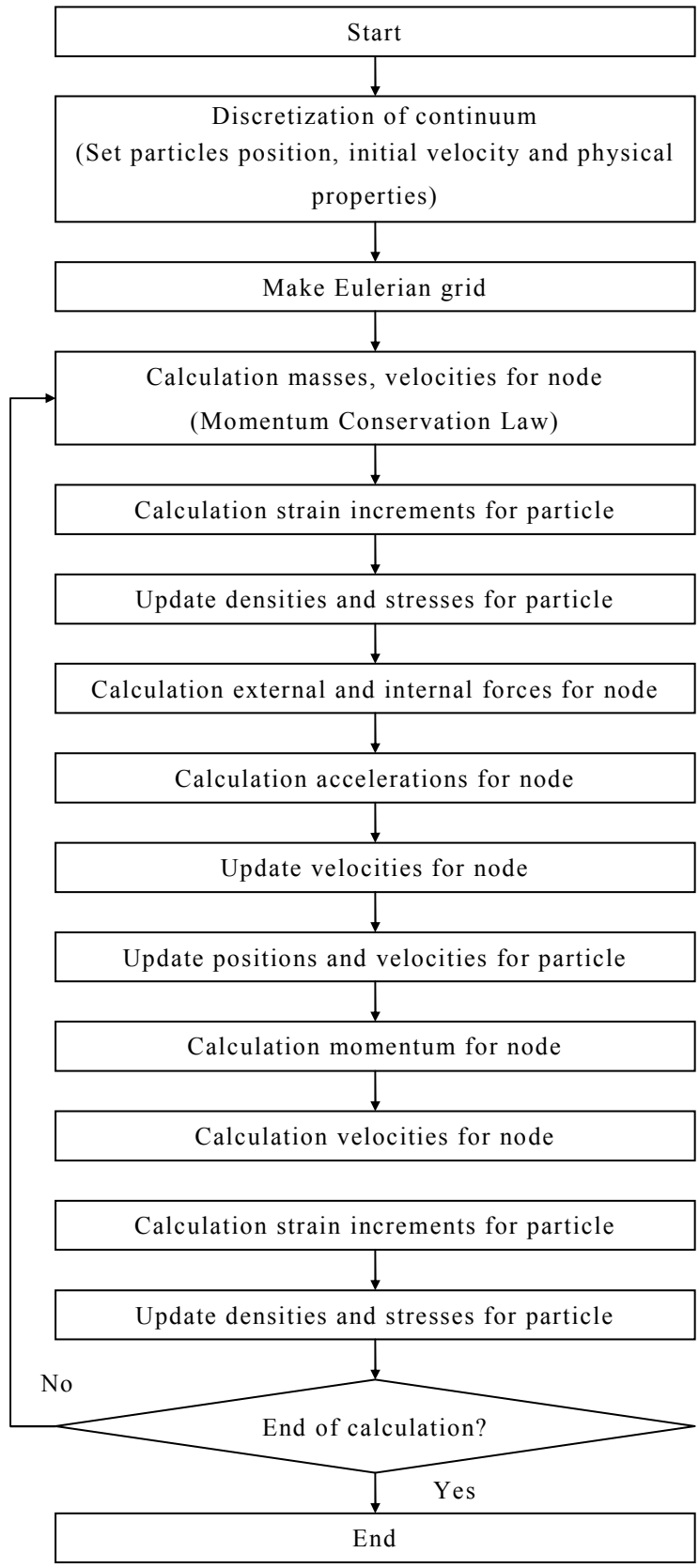


Fig.D.3 Flowchart for USAVG

参考文献

- 1) 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック I (基礎編), 培風館.
- 2) Lancaster, P. and Salkauskas, K.: Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol.37, No.155, pp.141-158, 1981.
- 3) 松原仁, 入部綱清, 伊良波繁雄: 粒子法の微分精度に関する一考察および物理自由度を有する移動最小自乗法, 土木学会論文集 A, Vol.66, No.4, pp.723-736, 2010.
- 4) 崎原 康平, 松原仁, 江戸孝昭, 原久夫, 矢川元基: 弾性固体問題における付帯条件付き多次元型移動最小自乗法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.78, No.786, pp.142-151, 2012.
- 5) Sakihara, K., Matsubara, H., Edo, T. and Yagawa, G.: Multi-dimensional moving least squares method applied to 3D elasticity problems, *Engineering Structures*, Vol.47, pp.45-53, 2013.
- 6) 崎原康平, 松原仁, 江戸孝昭, 矢川元基: 付帯条件付き多次元型移動最小自乗法とエレメントフリーガラキン法における境界条件の精度, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.79, No.797, pp.100-104, 2013.
- 7) Sulsky, D., Zhou, S. J. and Schreyer, H. L.: Application of a particle-in-cell method to solid mechanics, *Computer Physics Communications*, Vol.87, pp.236-252, 1995.
- 8) Bardenhagen, S. G., Energy Conservation Error in the Material Point Method for Solid Mechanics, *Journal of Computational Physics*, Vol.180, pp.383-403, 2002.
- 9) Nairn, J. A.: Material Point Method Calculations with Explicit Cracks, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.4, No.6, pp.649-663, 2003.
- 10) Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H. L.: A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.118, pp.179-196, 1994.
- 11) 桐山貴俊: GIMPM を用いた三軸圧縮試験の破壊シミュレーション, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.69, No.2, pp.I_321-I_332, 2013.
- 12) Wang, B., Vardon, P. J., Hicks, M. A. and Chen, Z.: Development of an implicit material point method for geotechnical applications, *Computers and Geotechnics*, Vol.71, pp.159-167, 2016.

謝 辞

本研究を行うにあたり、指導教官であります琉球大学工学環境建設工学科、松原仁先生には常に有益な御助言や適切な御指導を頂きました。数値計算力学に関して基礎的な技術、高精度、最先端な解析技術を懇切丁寧に指導して下さい、心より感謝致します。

本論文を審査するにあたり、副査として審査頂きました琉球大学工学部環境建設工学科、藍檀オメル教授、琉球大学農学部地域農業工学科、中村真也教授、琉球大学工学部環境建設工学科、富山潤准教授には、ご多忙にも関わらず貴重なお時間を割いて頂き、非常に貴重な御助言と御指導を頂きました。心から感謝申し上げます。

学部、修士課程において、指導教官をして頂きました琉球大学工学部環境建設工学科原久夫先生には、基礎的な数学、数式の意味、研究の面白さ等、その当時、無知だった著者に対して懇切丁寧にご指導頂き、時には失礼な態度とっていた著者に対して、常に誠実かつ紳士的な態度で接して頂きました。著者が研究に対して興味関心を持つきっかけを作って頂き、心より感謝申し上げます。また、私生活の面においても数多くの助言、御指導を賜り、公私にわたり大変お世話になりました。原先生の御家族の方にも大変お世話になりました。心より感謝申し上げます。

また、伊良波繁雄名誉教授、有住康則教授、仲座栄三教授、矢川元基東京大学名誉教授をはじめ、数多くの先生方にお世話になりました。ここに記して感謝申し上げます。

地盤工学研究室の広瀬孝三郎君、山路伸悟君、崎山将君とは共に研究に励み、お互いを認め合う有益な時間を共有することができ、大学院生活を共に送ることができたことに感謝し、深く御礼致します。

その他、ご指導を頂いた諸先生方、日頃の生活などでお世話になった大学の職員、研究室の方々、両親、全ての方に心から感謝申し上げます。

平成 28 年 2 月
江戸 孝昭