フィボナッチ数列の周期性を題材としたRLA

フィボナッチ数列の周期性を題材としたRLA

伊禮三之*，龍田智恵美**，青木慎恵***

Fibonacci sequence's Cycle themed RLA

Mitsuyuki IREI[1], Tiemi TATSUTA[2], Norie AOKI[3]

要　約

高校数学の授業は，数学の内容（知識）の伝達に重点が置かれがちであり，数学における「活用・探究」の学習経験をもつ生徒はきわめて少ない。数学学習における能動的な探究活動を促し，数学的活動の楽しさに触れる学習活動の事例として Researcher-Like Activity（RLA）に着目した。RLA とは，研究者のような活動という意味であり，「研究者の縮図的活動」を基本的なコンセプトとする。RLA では，生徒たちが自ら設定した課題を追及し，その発表や相互批評を通して，意欲的な学習にアプローチする。

本稿では，フィボナッチ数列の周期性を背景とした「17 段目の不思議」を基本問題とし，その条件変更等の問題づくりを通した解の協同探究活動と，ポスターセッションによる発表会（模擬学会）の授業実践の概要を報告し，主体的・能動的で意欲的な学習活動を促す RLA の意義を考察した。

1　はじめに

市川伸一（1996）の提唱する Researcher-Like Activity（RLA）とは，「研究者の活動の縮図的活動を学習の基本形態とする」学習活動のことであり，実際の研究者が行っている活動を，学習者それぞれのレベルに合わせて模擬し（縮図的活動），そうした活動を通して，学習者の意欲を引き出す教育実践である。RLA を中学校の数学教育へ適用した狩俣智（1996）の実践では，数学の研究者の活動を，「問題の発見→解決→論文等作品化→発表→相互評価→知識の共有」と捉え，これを模した形で，学習活動を構想している。

この活動の中で難しいのが「問題の発見」である。狩俣の実践では，「問題の発見」を「基本となる問題からの条件の変更による問題作り」に置き換えることで，授業を構想している。最初の「問題の発見」を，「問題の条件変更」に置き換えることで，数学者の活動を次のような学習者の活動に対応させている。

問題の発見→解決→作品化（ポスター）
→ポスターセッション（模擬学会）
→相互評価・自己評価→共有化

本研究では，高校数学での RLA の実践を検討するにあたり「基本となる問題（元問題）」として「17 段目の不思議」を取り上げる。この問題は，フィボナッチ数列の周期性を利用したもので，中学校２年生の文字式の導入で取り上げられることが多い。狩俣の実践に倣い，「問題の発見」を「基本となる問題（元問題）からの条件の変更による問題作り」に置き換え，そのことを原理にしつつ，高校生にふさわしい数学の「体系的な理解」を指向した「法則（定理）の発見」とその協同探究活動及び数学的コミュニケーション活動の充実を目指した RLA の授業を紹介する。

---

*　琉球大学教育学部附属教育実践総合センター
**　福井県立福井農林高等学校
***　福井県立武生高等学校

2 「17段目の不思議」とフィボナッチ数列

「17段目の不思議」や「不思議な計算」として知られる有名な教材は次のような計算からスタートする。

①1段目に好きな1桁の数を書く。
②2段目の数を5とする。
③1段目と2段目の数の和を求めて，その1の位の数を3段目に書く。
④2段目と3段目の数の和を求めて，その1の位の数を4段目に書く。
⑤この手順と同様に，17段目までくり返し計算する。

③～⑤の操作は，繰り上げることはせず1の位のみを考えているが，フィボナッチ数列の作られ方そのものである。

フィボナッチ数列とは，具体的に記述すると

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

となり，漸化式

$$\begin{cases} f_1 = 1,\ f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

によって作られる。つまり，初期値を1，1とし，各項は前の2項をたして作られる数列である。フィボナッチ数列は，ひまわりの花や松ぼっくりの中のうず巻きの数など，自然界の様々なところに現れる重要な数列である。

第1項，第2項の初期条件を除いて

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

だけを満たしている数列を，一般フィボナッチ数列と呼ぶことにすると，「17段目の不思議」は，一般フィボナッチ数列において，次の項を作る際に繰り上げることをせず，1の位だけを対象にしているわけで，これは，各フィボナッチ数を10で割った余りを考えていることと同じである。つまり，合同式を利用して表現すれば，10を法として

$$f_{n+2} \equiv f_{n+1} + f_n \pmod{10}$$

となる漸化式によって作られる数列が，「17段目の不思議」であり，その性質の発見と証明を内容とするのがこれまでの実践であった。

さて，フィボナッチ数列はその作られ方から明らかなように単調に増加しているため，周期的なものをみることができない。しかし，この数列をある整数で割った余りの世界で眺めるとその周期が現れてくる。例えば，法mが2，3，4の場合は，

m＝2；
$\underline{1,\ 1,\ 0}$，1，1，0，1，1，0，…
m＝3；
$\underline{1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0}$，1，1，…
m＝4；
$\underline{1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0}$，1，1，2，3，…

となって，その周期は一目瞭然である。10を法とした場合は，

1，1，2，3，5，8，3，1，4，5，9，4，
3，7，0，7，7，4，1，5，6，1，…

となって，周期が60と長いために，なかなかその周期性に気づきにくい。ただ，10を法としていても初期値を$f_1 = 1$，$f_2 = 3$と変更するだけで，

$\underline{1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 1,\ 8,\ 9,\ 7,\ 6,\ 3,\ 9,\ 2}$，
1，3，4，7，1，8，9，…

となり，12周期が現れる。

本研究では，「17段目の不思議」をさらに発展させて，法mでのフィボナッチ数列の周期性も視野に入れながら，RLAにつながるような授業を構成したい。

3 研究の内容

福井県立武生高等学校2年生39名（男子23名，女子16名）を対象に，『数学B』「数列」の単元の後半において，「17段目の不思議」（フィボナッ

チ数列の周期性）を基本問題とした２部構成全４時間のRLAの授業を行い，授業前後のアンケートや生徒の自由記述による感想から，RLAの効果を検討した。

RLAによる学習過程のデザインは次のように構成した（表１）。

表１　RLAの学習過程

ファーストステージ（基本問題の性質の発見）

第１時（2014年11月25日）：

基本問題として「17段目の不思議」を提示し，オープンアプローチの手法でさまざまな性質を発見させる。

第２時（2014年11月26日）：

発見した諸性質を，文字式を利用して証明しながらこれらについて解説する。

セカンドステージ（解の協同探究と発表会）

第３時（2014年12月10日）：

RLAのオリエンテーションと基本問題及び「条件変更等による問題作り」を解説し，各班で発展問題について考える。その解決にむけて，各班での解の協同探究活動を行う。教師はその活動を損なわない範囲で助言する。

第４時（2014年12月22日）：

10班を３つにグルーピングし，10分３サイクルのポスターセッションによる発表会（模擬学会）を行う。発表班以外は聞き役となる。質疑の時間もとり，生徒や教員からの質問，コメント等を行う。

なお，授業はTTで行った。T_1を龍田が，T_2を伊禮が担当し，授業外での探究活動，発表用ポスターの作成等の指導を教科担当教員（HR担任）である青木が担当した。

4　授業の概要

（1）　17段目の不思議（第１・２時）

ワークシートを配布し，まず，次のような計算をしてもらう。

①１段目に各位数値の違う５桁の数を書く。

②２段目に５５５５５と書く。

③１段目と２段目の数をたして，その結果を３段目に書く。ただし，各桁とも互いに独立していて，次の位に繰り上げることはしない。

④③と同じ要領で，２段目の数と３段目の数をたして４段目に書く。

⑤以下，次々と連続する２つの段の数をたしていく操作を17段目まで続ける。

２回目も，１段目の数は１回目と違うものを選んでもらい，同様な計算をしてもらう（表２）。

表２　「17段目の不思議」の計算例

1段目	1	9	4	2	3
2段目	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
3段目	6	4	9	7	8
4段目	1	9	4	2	3
5段目	7	3	3	9	1
6段目	8	2	7	1	4
7段目	5	5	0	0	5
8段目	3	7	7	1	9
9段目	8	2	7	1	4
10段目	1	9	4	2	3
11段目	9	1	1	3	7
12段目	0	0	5	5	0
13段目	9	1	6	8	7
14段目	9	1	1	3	7
15段目	8	2	7	1	4
16段目	7	3	8	4	1
17段目	5	5	5	5	5

２回の計算結果の表を見ながら，個人での気づきをワークシートに記録し，その後，グループになり，気づいたことの交流を行った（表３）。

表３　ある班の気づきの交流の様子

$S_{6\text{-}1}$：７段目と12段目が逆になる（０と５が入れ替わるという意味）。

$S_{6\text{-}2}$：（自分の計算結果を見て）あっ，ほんとや！

$S_{6\text{-}2}$：11段目と14段目が一緒。

$S_{6\text{-}3}$：ほんとや！

個人の探究を通じて発見した性質が，他者との交流でそれらの知識が関連づけられていく様子がわかる（表3）。その後，それらの性質を分類整理し，1枚の紙（A4）に1つの性質を書いて，黒板にマグネットで添付してもらう。

さらに，数列の記号― n 段目の数を a_n と表記―を用いて，それらを全員で確認しながら分類整理した（表4）。

短縮授業のためここで第1時終了。

表4　生徒が発見した性質の一部

① $a_2 = a_{17} = 5$
② $a_1 = a_4 = a_{10}$
③ $a_6 = a_9 = a_{15}$
④ $a_{11} = a_{14}$
⑤ a_1 ＝奇数⇒ $a_7 = 5$，$a_{12} = 0$
　a_1 ＝偶数⇒ $a_7 = 0$，$a_{12} = 5$
⑥ a_1 ＝奇数
　⇒ a_1 ＝奇数，a_2 ＝奇数，a_3 ＝偶数
（連続する3段の数は，奇数2個，偶数1個）

プリントに整理した生徒の発見した11個の性質について，どうやって示すか（証明してはじめて定理となる）グループで考えてもらった。出てきた意見は，

ア　0～9の10個全ての数について，しらみつぶしに調べる。
イ　文字を利用する。

ここでは，スマートな証明を考えようということで，1段目を文字に置き換えることとした。$a_1 = x$ とおいて計算する。その際，既習の10を法とする合同式の記号を用いることで簡潔に表現できることも合わせて確認した（表5）。

表5　合同式を用いた文字による計算①

$a_1 = x$，$a_2 = 5$ として，計算する。

$a_1 = x$
$a_2 = 5$
$a_3 = x + 5$
$a_4 = x + 10 \equiv x$　(mod 10，以下略)
$a_5 = 2x + 5$
$a_6 = 3x + 5$
$a_7 = 5x + 10 \equiv 5x$
$a_8 = 8x + 5$
$a_9 = 13x + 5 \equiv 3x + 5$
$a_{10} = 11x + 10 \equiv x$
$a_{11} = 4x + 5$
$a_{12} = 5x + 5$
$a_{13} = 9x + 10 \equiv 9x$
$a_{14} = 14x + 5 \equiv 4x + 5$
$a_{15} = 13x + 5 \equiv 3x + 5$
$a_{16} = 7x + 10 \equiv 7x$
$a_{17} = 10x + 5 \equiv 5$
$\therefore\ a_{17} = 5$

この計算をもとに，生徒が発見した表4の性質を見ていくと，①の「$a_2 = a_{17} = 5$」が正しいことは明らか。②の「$a_1 = a_4 = a_{10}$」も，

$$a_1 = a_4 = a_{10} = x$$

となっているので正しいし，③と④も，

$$a_6 = a_9 = a_{15} = 3x + 5,$$
$$a_{11} = a_{14} = 4x + 5$$

となって正しいことがわかる。

⑤は，$a_1 = x = 2n + 1$（n は自然数）とすると，

$$a_7 = 5x = 5(2n + 1) = 10n + 5 \equiv 5$$
$$a_{12} = 5x + 5 = 5(2n + 1) + 5$$
$$= 10n + 10 \equiv 0$$

となって正しい。

「a_1 ＝偶数⇒ $a_7 = 0$，$a_{12} = 5$」も同様に示すことができる。⑥以降は，生徒にまかせることにした。

続いて，2段目が5以外の場合を検討してみる。2段目が5のとき17段目も5になった。この場合の類推から，2段目が2なら17段目も2になると思いがちだが，実際に計算してみると，ぞろ目とはなるが違う数値となった（表6）。

各自の計算結果を持ち寄り，2段目と17段目

の関係に注目しながら，そこから気づくことを各班で話し合ってもらった。

表6　2段目を変化させた場合の計算例

1段目	1	9	5	4	2	3	0	7	6	8
2段目	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
3段目	2	1	8	8	7	9	7	5	5	8
4段目	3	3	1	2	2	5	4	3	4	8
5段目	5	4	9	0	9	4	1	8	9	6
6段目	8	7	0	2	1	9	5	1	3	4
7段目	3	1	9	2	0	3	6	9	2	0
8段目	1	8	9	4	1	2	1	0	5	4
9段目	4	9	8	6	1	5	7	9	7	4
10段目	5	7	7	0	2	7	8	9	2	8
11段目	9	6	5	6	3	2	5	8	9	2
12段目	4	3	2	6	5	9	3	7	1	0
13段目	3	9	7	2	8	1	8	5	0	2
14段目	7	2	9	8	3	0	1	2	1	2
15段目	0	1	6	0	1	1	9	7	1	4
16段目	7	3	5	8	4	1	0	9	2	6
17段目	7	4	1	8	5	2	9	6	3	0

以下は，ある班の話し合いの様子の一部である（表7）。

表7　ある班の話し合いの様子

S_1：a_2とa_{17}を並べていって，1項目から3項目まで3ずつ減っていて，4項目から6項目まで3ずつ減っていて，7項目から9項目まで3ずつ減っている。

（a_2）1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

（a_{17}）7 4 1 8 5 2 9 6 3 0

S_2：この上側の数字は？

S_1：これはa_2の値の数字を並べたもの。

S_2：あーなるほど。

S_1：それで，a_2が1増えるとa_{17}が3ずつ減る。

S_2：あっ，分かった！

3項目の1から4項目の8への変化も，実は，$1 \equiv 11 \pmod{10}$で，$11-8=3$と3ずつ減っていることに気づいたグループがいくつかあった。

別のグループは，対応表を縦に見て，a_2を7倍した1の位がa_{17}ということを発見した。

$$a_{17} \equiv 7a_2 \pmod{10}$$

つまり，1を7倍して7。2を7倍して14で，10を捨てるから4。3を7倍して21，10の位を捨てるから1…。3ずつ減ることと7ずつ増えることを合同式で見れば，$-3 \equiv 7 \pmod{10}$となっているわけである。

「この式を証明してほしい。どうしようか？」と問うと，「1段目をxとおいて，2段目をyとおく。」とすぐに証明の方針が出てきたので，各自に取り組んでもらい，最後に，確認もかねて文字式の活用と合同式の意義について，簡単なまとめを行った（表8）。

表8　合同式を用いた文字による計算②

$a_1=x$，$a_2=y$とおいて，この数列を計算する。

$a_1=x$

$a_2=y$

$a_3=x+y$

$a_4=x+2y$

$a_5=2x+3y$

$a_6=3x+5y$

$a_7=5x+8y$

$a_8=8x+13y \equiv 8x+3y$ (mod 10, 以下略)

$a_9=13x+11y \equiv 3x+y$

$a_{10}=11x+4y \equiv x+4y$

$a_{11}=4x+5y$

$a_{12}=5x+9y$

$a_{13}=9x+14y \equiv 9x+4y$

$a_{14}=14x+13y \equiv 4x+3y$

$a_{15}=13x+7y \equiv 3x+7y$

$a_{16}=7x+10y \equiv 7x$

$a_{17}=10x+7y \equiv 7y$

$\therefore\ a_{17} \equiv 7a_2$

実は，あるグループの一人がこの定理から導かれるもう一つの性質を発見していたが，時間との関係で取り上げなかったが，その内容は班員で共

有され，ポスター発表に盛り込まれていた（後述の図２下)。

次時の予告として，第３時以降から取り組むRLAについての簡単な説明を，教科担当（HR担任）の青木が行って，第２時は終了した。

（２） 問題作りとポスターセッション（第３・４時)

問題作りの前に，導入として「不思議な計算」の背景にあるフィボナッチ数列について説明を行った。

$$\begin{cases} a_1=1, \ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1, \ 2, \ \cdots) \end{cases}$$

という漸化式で表される数列をフィボナッチ数列といい，具体的に書き出してみると，

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

となって，前２項をたしたものが次々と連なっていく数列であること，また，a_1とa_2の初期条件を外した数列（$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$）を一般フィボナッチ数列ということ，そして，「不思議な計算」は，この一般フィボナッチ数列の性質を考えていることなどを説明した。続いて，数学者の活動とそれを模擬する生徒の活動を対比しながらRLAの説明を行った（表９)。

表９　数学者の活動と生徒の活動

数学者の活動
問題を構成する活動 解を構成する活動 成果を論文などに表現する活動 相互評価や批判的検討による共有活動

生徒の活動
条件変更等による問題づくり 解の探究 レポートやポスターづくり 論文集や模擬学会による相互評価・吟味

これまで学習してきた「17段目の不思議（フィボナッチ数列)」に関連した内容で，その問題をアレンジして，その探究過程をポスターセッションによる発表会を行うことを伝えて，活動に入っていった。

なお，次のような問題の作り方の具体例を紹介した。

① 条件変更を行う

ア　mod 10 → mod 3（割る数の変更）

イ　$a_1=1$，$a_2=1 \rightarrow a_1=1$，$a_2=2$
（初期値の変更）

② 問題を発展させる

ウ　17段目以降も同じ計算を続けると…

エ　京都大学の入試問題（ある数列の周期性を扱った問題）

以下は，４班のm＝７での探究の様子の一部である（表10)。

表10　生徒の活動の様子

S_1：何か規則性ないかな…。(数列を書き出して)
m＝７；1，1，2，3，5，1，6，0，6，6，
5，4，2，6，1，0，1，1，2，3，
5，1，6，0，6，6，5，4，2，6，
1，0，1，1，2，3，5，1，6，0，
…

S_2：$a_n=a_{n+16}$で，17段目から繰り返す。
４班全員：あ，ほんとだ！

他の班も，どのように問題を設定し，設定された問題からどのような性質や法則（規則）が見つけられるのか，さらにそれをどのように示していくのか活発な活動が展開されていた。その際，適宜生徒の相談にのりながら，設定問題の解決に向けて，生徒の協同探究に配慮しながらアドバイスを行っていった。

頃合いを見計らって，ポスターづくりのための模造紙とマジックを配布した。ポスターづくりの作業に入っていく班と探究を続ける班があったが，次の時間の発表までに探究を終えて，さらにポスターの完成までをお願いし，第３時を終了した。

第４時は，10班を３つのグループに分けて，

10分×3で発表会を行った。以下の表は，各班の発表内容である（表11）。

表11　各班の発表内容

班	発表内容
1	$a_1=3$, $a_2=7$（mod 13）の条件変更
2	mod m の周期の求め方
3	$a_1=6$, $a_2=2$（mod 5）の条件変更
4	mod 10 におけるフィボナッチ数列の巡回性と mod 7 の条件変更
5	$a_2=3$ と固定，mod 4 で調べる
6	$a_2=3$ と固定，mod 8 で調べる
7	$a_1=1$，$a_2=2$（mod 7）の条件変更
8	$a_1=1$，$a_2=3$（mod 5）の条件変更
9	$a_1=3$，$a_2=2$（mod 8）の条件変更
10	$a_1=1$，$a_2=2$ と $a_1=3$, $a_2=4$（mod 13）の条件変更

以下は，ポスターセッションにおけるある班の発表の質疑応答でのやりとりである（表12）。

表12　発表時の質疑応答の様子

9班の発表を聞いていたある生徒（S_1）が，ポスターに書かれた数列を示しながら…（図1）

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}$

3，2，5，7，4，3，7，2，1，3，

S_1：a_7 が a_1 の5倍で，a_8 が a_2 の5倍，このあとも5倍，5倍，5倍，…。

（$a_7=5\times a_1=5\times 3=15\equiv 7$，mod 8）

（$a_8=5\times a_2=5\times 2=10\equiv 2$，mod 8）

発表班全員：あーほんとだ！　見つけてくれてありがとう。てことは，

$$a_{n+6}\equiv 5a_n \pmod 8$$

って表せるね。

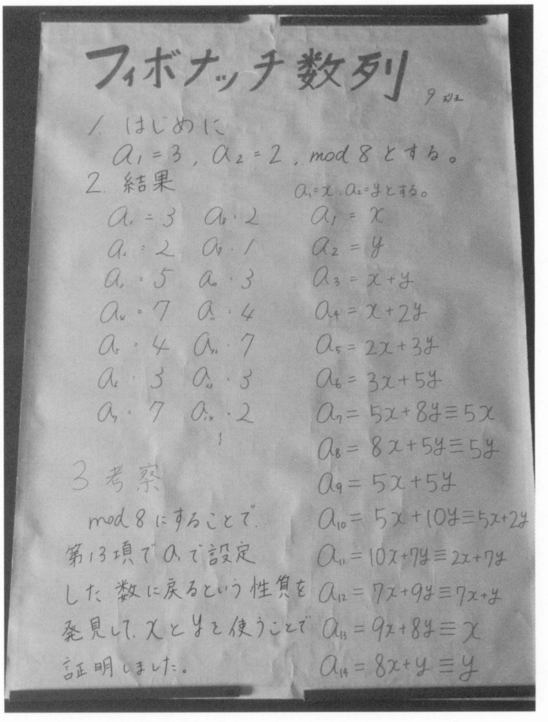
他の聴衆生徒：おっ，すごい！

ここでの質疑応答では，発表を聞いていた側が

$$a_{n+6}\equiv 5a_n \pmod 8$$

という規則性を発見していた。発表を聞いていて気づいたことを発表班のメンバーに伝え，発表班も新たな発見に感激している様子だった。

図1　9班のポスター



4班のある班員は，17段目以降もこの計算を続けていくとどうなるのかを考えて，班員の計算した表をつなぎ合わせることを思いついて，この数列が60周期だということに気づき，第2時に証明した「$a_{17}\equiv 7a_2$」をもとに，まず，

$$a_{n+15}\equiv 7a_n \pmod{10}$$

が一般的に成り立つことを推測，文字式を活用して証明し（図2上），さらに，周期60であることを次のように表現し，

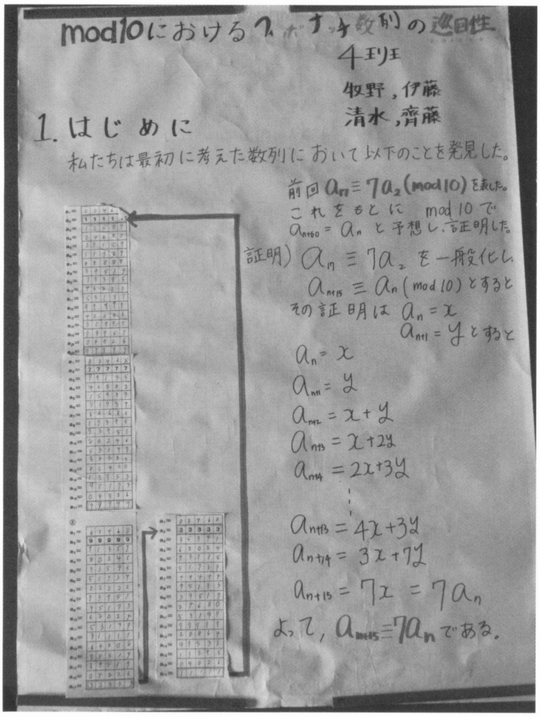
$$a_{n+60}\equiv a_n \pmod{10}$$

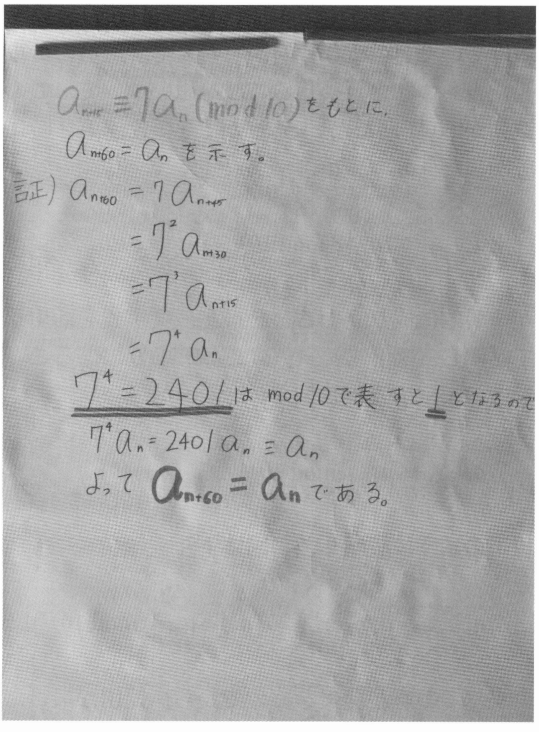
以下のように証明した（図2下）。

$$a_{n+60}=a_{n+15\times 4}\equiv 7^4a_n\equiv a_n \pmod{10}$$

すべての班が発表を終えてから，龍田が最後に発表会についてのコメントをし，全4時間の授業を終えた。

図2　4班のポスター





5　授業実践の分析

（1）　第１・２校時の授業後の感想の分析

第１時と第２時終了時に，生徒に感想を書いてもらった。このステージは，問題作りのための元問題における学習指導の部分であり，最初から，協同探究活動及び数学的コミュニケーション活動の充実を目指してグループ（班）活動を積極的に取り入れていた。

まず，こうした授業の形態についての意見が多く書かれていた。「グループで考えるということが今まであまりなかったので新鮮だった。このような機会がもっとあるといいと思う。」「先生の話を聞くだけではなく，自分たちで考えさせていたところがよかった。」「いつもの授業とは違った雰囲気で楽しかった。」といった感想があった。教師主体ではなく生徒主体のグループでの協同探究を促すことで，グループ内での話し合いが充実し，授業が楽しいと感じたようだ。授業者自身も授業をしていた時に手ごたえを感じていた部分であった。

また，「K君のいい意見が聞けて，そんな見方があったのか，なるほどと思うようになり，楽しく思えました。」「自分では気付かなかったことがグループ活動を通して分かったのでよかった。」といったグループ内での数学的コミュニケーションを通して生徒たちが発見した様々な知識（性質）を関連づけることの有効性について書いている生徒もいた。普段の授業形態では，個人で考えることがほとんどであり，自分では解決ができない問題があると，自分の力ではどうしようもなくなる。しかし，グループによる探究活動を取り入れたことで，他の生徒の意見を聞くことによって問題を解決しやすくなったり，自分とは違った視点に気づいたりすることが可能となったのである。

さらに，「自分たちで考えて答えを導き出すことが面白いと改めて感じた。」「自分たちで見つけた規則性を自分たちで証明していくという体験はなかなかできないし，また，様々な考え方を見つけ出せる力が付いていくと思うのでよかった。」「みんなで規則性を探して証明していくのも楽しかった。」という感想も多くあった。通常の授業

では，おそらく自分でじっくり考える時間はほとんどないように感じているのであろう。そのため，主体的・能動的に考えつつ協同での探究によって結果が出せた時の達成感や充実感，成就感を得ることができたと感じる生徒がいたのだと考える。

感想の中には，これからの数学の授業に対して，積極的に取り組んでいきたいと書いている生徒もおり，グループでの協同探究活動を取り入れた授業を適宜扱っていくことが必要であると感じた。

（2） 全授業後のアンケートから

4回の授業の終了後，生徒にアンケートに答えてもらった。アンケートは選択肢が11項目と自由記述の2種類から構成されている（表13）。

○ 選択肢の考察

生徒には，以下のアンケート項目を4段階で評価してもらった（4…よくあてはまる　3…あてはまる　2…あてはまらない　1…全くあてはまらない）。

まず，第1時と第2時の「不思議な数の授業」については，（1）と（2）の問いに対して，ほとんどの生徒が「よくあてはまる・あてはまる」と回答しており，普段の授業とは違った授業に楽しさを感じていたようだ。また，性質を多く見つけようとする生徒が多く，扱った題材も有効的であったと考える。しかし，（3）の問いでは，平均値2.5を超えているものの，「あてはまらない・全くあてはまらない」と回答する生徒が（1）と（2）に比べて多い。証明の方針として文字式の活用には比較的早く気づいていたが，じっくりと証明に取り組む時間がなかったために，このような結果になったのだろう。

次に，第3時の「探究活動」についてだが，（1）と（2）の問いに対して，ほとんどの生徒が「よくあてはまる・あてはまる」と回答している。普段の授業ではあまり行われないグループの探究活動に積極的に参加し，自分の意見を話したり，他の生徒の意見を聞いたりする生徒が多かった。（3）の問いを見てみると，平均値が3.10と高いものの「よくあてはまる」が（1）（2）に比して低い。つまり，ある程度満足のいく探究活動ではあったが，深い水準にまでは達していなかった

表13　全授業後のアンケート集計結果

アンケート項目	回答結果（人）				平均値（点）
	4	3	2	1	
【不思議な数の授業について（11/25，11/26）】					
(1) 不思議な数の授業はおもしろかった。	19	18	2	0	3.44
(2) 不思議な数の性質をできるだけ多く見つけようとした。	22	16	1	0	3.54
(3) 不思議な数の性質を自ら発見し証明することができた。	9	17	10	3	2.82
【探究活動について（12/10）】					
(1) グループでの探究活動に積極的に参加した。	18	17	4	0	3.36
(2) 気づいたことや疑問点を友達に聞いたり話し合ったりした。	18	17	4	0	3.36
(3) 満足のできる探究活動であった。	9	25	5	0	3.10
【ポスター作り，発表会について（12/10，12/22）】					
(1) 発表のための十分な準備ができた。	6	21	9	3	2.77
(2) 自分のグループのポスターの構成は適切にできた。	9	23	7	0	3.05
(3) グループで協力して分かりやすい発表ができた。	11	25	2	1	3.18
(4) 発表の時間配分は適切であった。	6	20	11	2	2.77
(5) ほかのグループの発表を聞いてさらに理解が深まった。	18	19	1	1	3.38

のかもしれない。これには，探究活動の時間が短かったこともあげられるだろうが，グループ活動に積極的に参加し，話し合いもしっかり行われていたが，どうすれば満足のできる探究活動になるのかは，今後の課題としたい。

最後に，「ポスター作り，発表会」についてだが，発表の準備段階や発表の配分時間の（1）と（4）の問いでは，「よくあてはまる・あてはまる」と回答した生徒が多いが，「あてはまらない・全くあてはまらない」と回答している生徒も12人・13人と全体の約3分の1を占めている。これは，授業時間が少なく，授業時間外でポスター作成を行ってもらったためであると推察される。また，発表会では，発表後の質疑応答で発表者と聴衆のやりとりが多く見られ，途中で時間切れになってしまう場面が多かった。さらに，生徒たちも発表会に慣れておらず，時間配分への配慮まで手が回らなかったのであろう。一部発表者側と聞き手の側で活発な数学的コミュニケーションも見られたので，ポスター発表時におけるコミュニケーションスキルといったものも今後の課題であろう。

（2）（3）の問いに対して，「よくあてはまる・あてはまる」と回答する生徒が多く，ポスターの構成やグループのメンバーと協力しながら発表できたと感じているようだ。授業者の観察でも，グループで役割分担しながら発表する姿が多く見られた。（5）の問いでは，ほとんどの生徒が他のグループの発表を聞いてさらに理解が深まったと感じており，各個人が自分の設定した問いについて協同探究を通して深く考えていたことが，他のグループの発表を聞くことで，さらに自分の思考を精緻化し深化させたのだろうと考えられる。ポスターセッションを通して，数学的な考えを説明したり読み取ったりする数学的コミュニケーション能力の育成にも有効であることを感じることができた。

○　自由記述の分析

自由記述では，4回の授業全体の感想を尋ねた。生徒から得られた感想は大きく分けると3つあげられる。

1つ目は，「グループ活動」についてである。これは第1時・第2時の授業後の感想でも多くの生徒が書いていたことである。高校の授業ではほとんどグループ活動は行われない。そのこともあってか，「班の人と協力して研究していくのは1人よりも理解が深まってよかった。」「自分たちで数を決めたり，自分たちで性質を見つけ証明したりとほとんど自分たちだけでやったので楽しかったし，まとめ終わった後に達成感を味わうことができた。」という感想が多かった。RLAにおける能動的な数学の協同探究活動を通して，自分たちで課題を設定し解決する楽しさを経験するとともに意欲的に取り組んだことがうかがえる。このような授業を行うことは，主体的な学習能力の育成にも資する可能性があると考える。

2つ目は，「発表会を聴いていて感じたこと」である。「自分の班以外の班の発表を聞いて，まだ証明していなかったことや，思いつかなかったことについて調べていて，おもしろかった。」「他の班の発表を聞いて，新しい発見できて，よりフィボナッチ数列の性質について理解が深まった。」といったような，他の班の発表を聞いてさらに興味が増したり，理解が深まった感想が多かった。また，「あまり性質を発見できなかったので，自分でまだ誰も発見していない性質を見つけたいと思った。」というように，他の班の発表を聞いて，さらに探究したいという感想や，「もっといろいろ工夫して発表していて，すごく参考になった。」というように発表の仕方を評価する生徒もいた。

3つ目は，「発表者として感じたこと」である。「自分の言いたいことをしっかりとプレゼンテーションする力を付けなければならないと思った。」「数学のことについてみんなの前で発表したという経験をこれから生かしていけるといいなと思いました。」という感想があった。高校の数学の授業では，プレゼンテーションをする機会はおろか，発表をしたり説明をしたりする機会はほとんどないように思う。その経験不足を生徒たちは痛感したようで，「説明する力を身に付けたい」と感じた生徒が多かった。

6　まとめと今後の課題

本授業実践は，全体を通してグループによる協同探究活動による学習指導を展開した。その際，生徒の思考が誘発されやすいよう，また協同探究

が促されやすいようオープンな問いを意識した。そのことによって，生徒の主体性が発揮され，教師はほぼファシリテーターの役割を担えばよかった。生徒たちはまず個人で性質を見つけ出し，班での話し合いでお互いが発見した性質を発表したり聞いたりした。班での話し合いの中で，生徒たちは理解をさらに深めたり，新たな発見をしたりしていた。これは協同探究活動の機会を設定しなければ実感することができないことなので，こうした学習活動の展開の有効性が示唆される。

「17段目の不思議」の条件変更等による問題設定及びその協同探究のプロセスから「フィボナッチ数列の周期性」については，単なる個別の知識の獲得ではなくある程度まとまった「体系的な理解」に近い実感を促せたのではないかと感じている。4班の「$a_{17} \equiv 7a_{2}$」の性質をもとに，「$a_{n+15} \equiv 7a_n \pmod{10}$」と一般化し，さらに，「$a_{n+60} \equiv a_n \pmod{10}$」（周期60）を証明するのに，この性質を補助定理として利用していた発表が，そのことを例示している。しかし，まだまだ課題は多い。他日を期したい。

ポスターセッションにおいては，他の班の発表を聞くことで，自分の班では考えていなかった新たな発見があり，さらに探究してみたいと感じる生徒が多かった。また，他の班の発表を聞いて，質疑応答の中で新たな性質を見つけ出している場面も見られた。また，発表することを経験して，自分のプレゼンテーション能力が欠けていることを実感した生徒もおり，これから説明する力，発表する力を身に付けたいという感想を述べていた。

また，ここまで紹介しなかった感想の中には，数学教育の課題となるような感想もあったので，ここで紹介しておく。「1つのことをじっくり考える時間はなかなかないので，楽しく思った。」。これは，普段行われている数学の授業では，生徒たちが考える時間はほとんどないということの裏返しであろう。授業者（龍田）自身も高校の数学の授業では，「教科書の例題を先生が説明し，練習問題を解く」，この繰り返しであった。“考える”ことにこそ数学という学問の本質があるのに，現状はそうなっていないということである。生徒たちが自分で考えるような時間を少しでも設ける必要があると感じている。

次に，「数学には，その性質を発見するだけではなく，それを理解したり証明したりするところにもおもしろさがあることに気付けた。この感覚を忘れずに，これからの授業でそのおもしろさを引き出せるような学力や向上心を身に付けたいと思った。」という感想もあった。これも，数学を学ぶうえでは本質的である。先ほども述べたように，数学の授業で自分で考える時間がほとんどないため，今回実践したような授業で証明を含めた法則（定理なり性質）の深い理解（体系的な）とそのおもしろさに気づけたのである。数学のおもしろさや楽しさを実感させるには，知識伝達型のようなこれまでの授業形態では不可能に近いと感じている。

さらに，「自分で積極的にアウトプットする経験を身に付けていかないと発表する力がつかないと痛感したので，もっと話し合えることに貪欲になりたい。」「うまく説明できなかった部分もあったので，機会があったときはそれを直せるようにしたい。」という感想だが，数学も自然言語の一部であれば，数学の言葉を内省的に用いるだけでなく，数学の言葉で発表したり説明したりする時間も必要であろう。しかし，これも現状の授業ではほとんど取り扱われることはない。今回の授業を経験した生徒たちが，説明する力，プレゼンテーションする力が不足していると感じたことも首肯できる。学習指導要領においても言語活動の充実が謳われている。数学の授業においても説明したり発表したりする機会を教師が積極的に取り入れていく必要があるだろう。

本研究は次のように分担した。研究の企画は，伊禮，龍田が行った。授業実践はTTで行い，T_1を龍田，T_2を伊禮が担当し，授業外での探究活動の支援及び発表用ポスター作成の指導，発表会の運営を青木が担当した。授業実践後の諸データの整理・分析を龍田と伊禮が行い，これにもとづき第1稿を龍田が執筆し，伊禮が加筆修正を行い第2稿とした。さらに，第2稿に青木・龍田が修正を加え，それに伊禮が最終修正を施し本論文とした。

本論文の内容は，数学教育協議会第63回全国

研究大会「みちのく仙台大会」(2015) 及び日本数学教育学会第97回全国算数･数学教育研究（北海道）大会（2015）で発表した。

なお，本研究は，科学研究費補助金基盤研究（C）課題番号26381138「探究的な学びを促すResearcher-Like Activityによる事例研究」の一環として取り組まれたものである。

引用・参考文献

市川伸一（1996），学びの理論と学校教育実践 ―Researcher-Like Activityを取り入れた授業づくり―，学習評価研究No26，pp42-51

市川伸一（1998），開かれた学びへの出発―21世紀の学校の役割，金子書房

市川伸一（2004），学ぶ意欲とスキルを育てる―いま求められる学力向上策，小学館

伊禮三之（2008），Researcher-Like Activityによる授業の試み―「ハノイの塔」の条件変更による問題づくりを通して―，日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会，pp93–98

狩俣　智（1996），Researcher-Like Activityによる授業の工夫―RLAの中学校の数学教育への適用，琉球大学教育学部教育実践研究指導センター紀要第4号，琉球大学教育学部，pp1-9

川島義孝・北陸地区数学教育協議会（2007），不思議な計算〈中学校授業研究〉，数学教室№.671，国土社，pp5-28

『数学科指導事例集』編集委員会（2000），数学科指導事例集―数学に興味を持たせる教材，沖縄県教育委員会，pp1-4，pp135-138

中村　滋（2002），［改訂版］フィボナッチ数の小宇宙―フィボナッチ数，リュカ数，黄金分割，日本評論社

増島高敬（2001），不思議な数列―「17番目の不思議」その後，数学バンザイ！，ふきのとう書房，pp151-159

松田　修＋津山工業高等専門学校　数学クラブ（2008），11からはじまる数学―*k*-パスカル　三角形，*k*-フィボナッチ数列，超黄金数，東京図書