

琉球大学学術リポジトリ

ゲル材料の簡易応力：
ひずみシミュレーション法の開発

メタデータ	言語: 出版者: 琉球大学 公開日: 2017-04-19 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 石川, 清貴, Ishikawa, Kiyotaka メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/36488

博士(工学)学位論文
Doctoral Dissertation of Engineering

ゲル材料の簡易応力-ひずみシミュレーション法の開発

Development of the Simple Stress-Strain Simulation

Method for Gels

2017年3月
March 2017

石川 清貴
Kiyotaka Ishikawa

琉球大学
大学院理工学研究科
生産エネルギー工学専攻

Material, Structural and Energy Engineering Course
Graduate School of Engineering and Science
University of the Ryukyus

博士(工学)学位論文
Doctoral Dissertation of Engineering

ゲル材料の簡易応力-ひずみシミュレーション法の開発

Development of the Simple Stress-Strain Simulation

Method for Gels

2017年3月
March 2017

石川 清貴
Kiyotaka Ishikawa


琉球大学
大学院理工学研究科
生産エネルギー工学専攻

Material, Structural and Energy Engineering Course
Graduate School of Engineering and Science
University of the Ryukyus


指導教員：教授 眞壁 朝敏
Supervisor: Prof. Chobin Makabe

本論文は、博士(工学)の学位論文として適切であると認める。


論 文 審 査 会

真壁 朝敏 

(主 査) 真壁 朝敏

宮崎 達二郎 

(副 査) 宮崎 達二郎

松原 仁 

(副 査) 松原 仁

概要

ゲル材料は人工関節やスポーツ用具の衝撃吸収材料として使用されている。このことから、それらの製品の開発や設計に向けた性能や強度の評価と予測は重要であり、力学的シミュレーションによる検討が望まれている。また、衝撃吸収材として使用される柔軟なゲル材料は、1,000%以上のひずみが発生するような大変形が可能であり、負荷後の状態が中途の負荷速度や負荷履歴の影響を受け、その応力状態が変動する粘弾性挙動を示す。そして、一般にその力学挙動の把握は複雑である。このような背景から、ゲル材料の力学特性を把握するための様々な研究が報告されているが、クリープ挙動のような長時間使用環境下の粘弾性挙動を実用的な方法でシミュレーションしている例は少ない。本研究では、ゲル材料の力学挙動の計測および力学的特性の把握、そして実験結果に基づいた簡易応力-ひずみシミュレーション法の開発を目的とする。

ゲルの粘弾性挙動を調査する目的で、異なる4種類の負荷応力による大変形クリープ試験を行った。その結果、ゲル材料のクリープひずみ挙動は負荷応力に依存しないことがわかった。そこで、この結果に基づきゲル材料の材料モデルとして Yeoh の超弾性モデルと Simo の粘弾性モデルを組み合わせたモデルを提案した。そして、実用性を考慮した材料定数同定法を提案し、その再現性や汎用性を評価した。その結果、いくつかの例題により提案したモデルが実験結果と定性的に良く一致することを確認した。

より高い予測精度をシミュレーションに求める場合には、材料試験の結果に合わせた材料モデルの解析プログラムへの実装が必要である。しかし、大変形シミュレーションでは一般に複雑なテンソル演算が必要となる事が避けられず、材料毎に行うことは現実的でない。そこで、本研究では、高精度な高階数値微分が可能な HDSD (Hyper-Dual Step Derivative) に注目し、簡易に実装可能な新しい大変形有限要素解析スキームを提案した。本法では、ひずみエネルギーを計算するプログラムを準備すれば、大変形有限要素解析に必要な内力ベクトル・要素剛性マトリクスを自動的に算出できるものであり、材料毎のカスタマイズが容易になる手法である。

そして、前述の成果を基にして、実用的かつ汎用性の高いゲル材料の数値シミュレーション法を開発した。まず HDSD 法を応用して、汎用的な超弾性構成則の実装スキームを作成し、ゲル材料の実験結果に合わせた新しい材料モデルを開発・実装した。次に、大変形クリープ挙動を再現できる Simo の粘弾性モデルの材料定数を同定した。最後に例題を通して本法の性能評価を行った結果、優れた再現性や予測性能、高い汎用性が確認できた。

Abstract

Since material “gels” have a high damping capacity, they are widely used in products such as articular cartilage implants, sports equipment and so on. For the development and design of the application of such gels, their strength and performance should be evaluated through numerical mechanical simulations and experiments. However, gels exhibit unique and complex characteristics. They are viscoelastic and ultrasoft. The viscoelastic property results in characteristics of loading history and loading velocity-dependent behaviors, while the ultrasoft property results in large deformations. Thus, several studies have been performed on simulation methods to characterize the mechanical behavior of gels. However, few studies have focused on a practical numerical simulation method that can predict the creep behavior of gels. In this study, the mechanical characteristics of ultrasoft gels were evaluated. Also, a simple stress–strain simulation method based on the experimental results was developed.

To evaluate the viscoelastic behavior of gels, large strain creep tests were performed under various loading conditions. These testing results showed that the creep strain behaviors are independent of the applied stress. Considering the experimental results, a material model was proposed that combines the viscoelastic model proposed by Simo and the Yeoh hyperelastic model. Furthermore, a practical identification method of material constants was proposed. The experimental and numerical calculation results of the present model showed reasonable agreement.

When higher predicative performance is required, formulation and implementation of a new material model based on the experimental results is required. To implement a material model for geometric nonlinear problems, complex derivative calculations are required. Thus, in this study, based on a highly accurate 1st- and 2nd-order differentiation scheme HDSD (Hyper-Dual Step Derivative), a simple scheme to implement a geometric nonlinear finite element method was developed. This method can automatically compute the exact internal force vectors and element stiffness matrices by numerically differentiating a strain energy function at each element/integral point.

Based on the results, a practical and versatile numerical simulation method for gels was proposed. First, with the HDSD, a versatile implementation scheme for hyperelastic models was developed. A novel hyperelastic material model based on the experimental results was developed and implemented. Second, an identification method for constants of the viscoelastic model proposed by Simo, which can reproduce the creep behaviors, was developed. Finally, the numerical calculation and experimental results indicate that the proposed simulation method has good reproducibility, predictive performance, and versatility.

研究関連論文業績

【学術論文（査読有り）】

1. Kiyotaka ISHIKAWA, Masaki FUJIKAWA, Chobin MAKABE and Kou TANAKA, Creep Characterization of Gels and Nonlinear Viscoelastic Material model, *Modan Physics Letters B*, Vol. 30, No. 18 (2016), p1650225-1 – 1650225-12.
2. 藤川正毅, 石川清貴, 真壁朝敏, 田中真人, 笹川崇, 表竜二, Hyper-Dual Numbersを用いた高精度一階・二階数値微分法に基づく幾何学非線形有限要素法の定式化, *日本機械学会論文集*, Vol. 82, No. 834 (2016), p15-00454, DOI: 10.1299/transjsme.15-00454.

【講演論文（国際学会）】

1. Kiyotaka ISHIKAWA, Masaki FUJIKAWA and Chobin MAKABE, Mechanical Characterization of Gels and Formulation of Nonlinear Visco-Hyperelastic Material Model, *The 6th International conference on Manufacturing, Machine Design and Tribology*, pp. 396-397(2015).

【講演論文（国内）】

1. 石川清貴, 田中興, 藤川正毅, 真壁朝敏, ゲルの粘弾性試験とその粘弾性構成則の検討, 第21回計算工学講演会(2016).
2. 石川清貴, 田中興, 藤川正毅, 真壁朝敏, ゲル材料の粘弾性モデルの検討, 2016年度日本機械学会年次大会(2016).

目次

1. 序論.....	3
参考文献.....	5
2. 大変形クリープ試験による粘弾性挙動の調査と粘弾性モデルの開発	6
2.1 はじめに	6
2.2 大変形クリープ試験	6
2.2.1 試験片と試験方法	6
2.2.2 試験結果	7
2.3 材料モデルの決定と材料定数の同定	8
2.3.1 超弾性モデルの選定と材料定数の同定	8
2.3.2 粘弾性モデルの選定と材料定数の同定	10
2.4 3次元デジタル画像相関法による変位とひずみの測定方法	13
2.4.1 デジタル画像相関法の計測原理	13
2.4.2 ステレオ法の原理	17
2.4.3 計測手順	19
2.5 材料モデルの性能評価	20
2.5.1 大変形クリープ試験	20
2.5.2 有孔平板のクリープ試験	21
2.6 まとめ	26
参考文献.....	27
3. 非線形有限要素法への材料構成則の実装方法の開発	29
3.1 はじめに	29
3.2 ひずみエネルギーに基づく幾何学非線形有限要素法の定式化	30
3.2.1 幾何学非線形有限要素法の定式化	30
3.2.2 HDSDによる高精度な数値1階・2階微分.....	33
3.2.3 数値微分法による非線形有限要素法の定式化	35
3.3 本法の性能評価	41
3.3.1 単軸引張り解析 (3次元4節点四面体要素)	41
3.3.2 せん断変形解析 (3次元8節点六面体要素)	45
3.3.3 片持ち梁の解析 (3次元20節点六面体要素)	48
3.4 まとめ	51
参考文献.....	52

4. ゲル材料の簡易応力-ひずみシミュレーション法の開発	53
4.1 はじめに	53
4.2 材料モデルの再検討	54
4.2.1 クリープ試験の再現性の改善	54
4.2.2 超弾性モデルの再検討	57
4.3 汎用 FEM への実装	59
4.4 例題による性能評価	59
4.4.1 大変形クリープ試験	60
4.4.2 有孔平板のクリープ試験	61
4.5 まとめ	65
参考文献	66
5. 結論	67
謝辞	68

1. 序論

ゲル材料は高い衝撃吸収性能を有しており、過酷な環境下でも安定した特性を示す材料である (伏見, 1993). また, これらの性質を利用して人工関節や靴底の衝撃吸収材などに使用されている (伏見, 1993 ; Hoffman, 2002; Dinato et al, 2015; Haussener et al, 2015). このことから, これらの製品の開発・設計のための性能や強度の評価は重要である. また, 靴底や人工関節に使用されるゲル材料は様々な負荷が加えられた状態においても, 非常に長い使用期間で耐える場合もある. その場合, 長時間使用環境下での性能・強度評価が重要となる. しかしながら, 製品毎に材料試験を行うのは多くの時間と手間がかかる. そのため, 製品の性能・強度評価に関わる数値シミュレーション法の確立が望まれている. ただし, ゲル材料は, 1000%のひずみを超える大変形, 負荷履歴や負荷速度が計測時の応力状態に影響する粘弾性挙動などの複雑な力学特性を有する (Almdal et al, 1993; Faghihi et al, 2014). したがって, 弾性体や超弾性体の取扱いによる評価では不十分である. そのため近年では, ゲル材料の粘弾性特性の評価やその力学挙動を再現するための数値シミュレーション法がいくつか提案されている. 例えば, 石花らと古屋ら (石花ら, 2011; 古屋ら, 2011) は様々な材料試験を用いてゲル材料の力学特性や材料物性の評価を行っている. Lin ら (Liu et al, 2009) は, 0 ~ 20[s] の粘弾性挙動を対象として, nanoindentation creep test と inverse finite element method を用いたゲル材料の材料定数の同定法を提案している. Fukunaga ら (Fukunaga et al, 2009) は非整数階微分型粘弾性モデルをゲル材料に適用し, 0 ~ 1.5×10^2 [s] の時間域の衝撃試験とその数値シミュレーションを行っている. しかし, 上記に挙げた例では対象としている時間域が短いため, 長期使用環境下での粘弾性挙動を再現することは難しい. さらに, クリープ挙動のような長時間域の粘弾性挙動を数値シミュレーションで再現している例は少ない. また, 解析手法や材料モデルが複雑で実用的でないものもある. したがって, 実用的かつ再現性と汎用性の高いシミュレーション法の開発が必要である.

特に, 高い再現性や正確な予測性能が要求され, 既存の材料モデルやシミュレーション法では再現が難しい場合, 材料試験に基づいた新しい手法を実装する必要がある. 有限要素法 (FEM) の場合, ユーザーが独自の要素や材料モデルを実装しなければならない. 例えば変位法に基づいた一般的な幾何学非線形 FEM の定式化では, 変形勾配テンソルから応力とその整合接線剛性マトリクスを計算し, 同時に変位—ひずみマトリクス (B マトリクス) を計算しなければならない. またそれだけではなく, これらの変数から内力ベクトルと要素剛性マトリクスを計算して返すプログラムを作成しなければならない (Abaqus 6.14 User's Guide, 2014; Marc 2015 Documentation, 2015). そして, これらの導出過程にはテンソルによる微分計算が求められ, その計算は非常に煩雑かつ複雑である (Holzapfel, 2000; 久田ら, 1995). この作業を材料毎に行うのは多くの時間と手間がかかる. したがって, 開発した材料モデルを効率良く実装する手法についても検討する必要がある.

そこで本研究では、柔軟なゲル材料を対象として、長時間使用環境下の粘弾性挙動を再現できる実用的かつ汎用性の高い応力-ひずみシミュレーション法の開発を目的とする。材料試験によりゲル材料の力学挙動を計測し、その粘弾性特性を調査した。そして、その材料試験に基づいた材料モデルとその材料定数の簡易同定法について検討した。また、開発したシミュレーション法を有限要素法に実装するための簡易実装スキームを開発した。さらに、例題を通して本法の再現性や予測性能、汎用性の評価を行った。

本論文の構成は以下のようになる。

第1章では研究の背景と目的を述べている。

第2章では、まずゲル材料の粘弾性挙動の調査を目的として、4つの負荷条件下でクリープ試験を行い、粘弾性挙動の調査を行った結果を示している。そして、試験結果をもとに材料モデルを選定し、その材料定数の簡易同定法を提案している。次に、いくつかの例題を通して再現性や汎用性の評価を行った結果を示し、有効性を明らかにしている。

第3章では、非線形有限要素法を対象として、Hyper-dual step derivative (HDS D 法) (Clifford, 1873; Fike, 2013) を用いた要素の簡易実装スキームの開発を行っている。HDS D 法は解析解と同等の精度をもつ数値微分近似法である。この数値微分法を要素の実装における微分計算に適用することで、複雑な微分計算を解析的に行うことなく、内力ベクトルや要素剛性マトリクスを自動的に計算できる簡易実装スキームを提案している。次に、いくつかの例題を通して性能評価を行い、本法の有効性を示している。

第4章では以上の成果に基づいて、実用的かつ再現性が高い数値シミュレーションを提案している。まず、2章の提案手法よりも再現性の高い材料モデルを提案している。また、3章の成果を応用し、材料モデルを実装するための簡易実装スキームを開発し、効率的に新しい材料モデルを実装している。次に、いくつかの例題を通して性能評価を行い、有効性を明らかにしている。

5章では2章から4章で得られた結果をまとめている。

参考文献

- 1) Abaqus6.14 User's Guide, Dassault Systemes SIMULIA (2014).
- 2) Almdal, K., Dyre, J., Hvidt, S. and Kramer, O., Towards a Phenomenological definition of the term 'gel', Polymer Gels and Networks, Vo. 1, Issue 1 (1993), pp. 5-17.
- 3) Clifford, W.K., Preliminary sketch of biquaternions, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 4 (1873), pp. 381–395.
- 4) Dinato, R.C., Ribeiro, A.P., Butugan, M.K., Pereira, I.L.R., Onodera, A.N. and Sacco, I.C.N., Biomechanical variables and perception of comfort in running shoes with different cushioning technologies, Journal of Science and Medicine in Sport, Vol. 18, Issue 1 (2015), pp. 93–97.
- 5) Faghihi, S., Karimi, A., Jamiadi, M., Imani, R. and Salarian, R., Graphene oxide/poly(acrylic acid)/gelatin nanocomposite hydrogel: Experimental and numerical validation of hyperelastic model, Materials Science and Engineering C, Vol. 38 (2014), pp. 299-305.
- 6) Fike, J.A., Multi-objective optimization using hyper-dual numbers (Ph.D. Thesis), Stanford university (2013).
- 7) Fukunaga, M., Shimizu, N. and Nasuno, H., A nonlinear fractional derivative model of impulse motion for viscoelastic materials, Physica Scripta, Vol. 2009, T136 (2009), pp. 014010 1-6.
- 8) 伏見隆夫, ゲルの応用, SEN-I GAKKAISHI (繊維と工業), Vol. 49, No.3 (1993), pp. 32-41.
- 9) 古屋治, 合田研吾, 石花健太, ウレタンゲル材料を用いた制振材料の研究開発 その2 力学特性評価, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (2011).
- 10) Haussener, M., Caihol, S., Trajin, B., Vidal, P.E. and Carrillo, F., Thermomechanical modeling and simulation of a silicone gel for power electronic devices, Microelectronics Reliability, Vol. 55, Issues 9–10 (2015), pp. 2015–2049.
- 11) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善 (1995).
- 12) Hoffman, A.S., Hydrogels for biomedical applications, Advanced Drug Delivery Reviews, Vol. 54, Issue 1 (2002), pp. 3–12.
- 13) Holzapfel, G.A., Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering, Wiley (2000).
- 14) 石花健太, 合田研吾, 古屋治, ウレタンゲル材料を用いた制振材料の研究開発 その1 材料物性評価, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (2011).
- 15) Liu, K., VanLandingham, M.R. and Ovaert, T.C., Mechanical characterization of soft viscoelastic gels via indentation and optimization-based inverse finite element analysis, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, Vol. 2, Issue 4 (2009), pp. 355–363.
- 16) Marc 2015 Documentation, MSC software (2015).

2. 大変形クリープ試験による粘弾性挙動の調査と粘弾性モデルの開発

2.1 はじめに

ゲル材料は極めて柔らかく、高い衝撃吸収性能、人体に無害、環境に左右されにくい、など他の材料にはない特異な性質をもつ（伏見，1993；Zhang et al, 2009；Almdal et al, 1993）．これらの性質を利用して衝撃吸収材，人工関節など様々な製品に利用されている（Suciu et al, 2004；Kobayashi et al, 2005；Dinato et al, 2015；Ogawa et al, 2012）．また，ゲル材料は衝撃荷重のような短時間域からクリープのような長時間域の力学挙動まで評価しなければならない．例えば，人工関節に用いられるゲル材料は飛び跳ねた際の衝撃だけでなく，常に圧縮の負荷も掛けられる（Lee et al, 2006）．そして，長時間使用環境下での力学特性を材料試験により評価する場合，長時間かけて実験を行う必要がある．そして，材料や製品毎に何度も実験を行うことは多くの時間と手間がかかる．このことから，効果的に設計・開発するための数値シミュレーション法の確立が望まれている．

近年ではゲル材料のための粘弾性理論に基づいた数値シミュレーション法がいくつか報告されている（例えば，Liu et al, 2009；Fukunaga et al, 2009）．ただし，既報の報告では，長時間域の粘弾性特性（クリープ特性）を評価し，その粘弾性挙動を数値シミュレーションで再現している例は少ない．また，シミュレーション法や材料モデルが複雑で実用的でないものもある．

そこで本研究ではゲル材料の簡易数値シミュレーション法を開発した．まず，大変形クリープ試験を行い，長時間域の粘弾性特性を調査した．次に，クリープ試験の結果を考慮して，材料モデルを選定した．そして，単軸方向の材料試験の結果から材料定数を簡易的に同定する方法について検討した．さらに，選定した材料モデルと同定した材料定数の再現性と予測性能を調査し，有効性を明らかにした．

2.2 大変形クリープ試験

本節ではゲル材料の粘弾性挙動を調査するために実施した大変形クリープ試験の結果を示す．まず，2.2.1 項で試験片と試験方法の概要について述べる．次に 2.2.2 項で試験結果を示す．

2.2.1 試験片と試験方法

本試験では株式会社タナック社製の非粘着クリスタルゲル（CGR-N3002）を使用した．図 2.1 のような短冊形試験片を 4 つ使い，それぞれの試験片の中央に 2 つの標点を記した．初期の標点間距離は $l_0 = 30$ [mm] とした．実験ではそれぞれの試験片の長手方向に公称応力 $P_{\text{exp}} = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ [MPa] を負荷し， 4.7×10^5 [s]（約 5 日）保持した．ここで P_{exp} は負荷荷重/初期の試験片断面積より求めた．そして，負荷後時刻 t [s] 経過時の標点間距離 $l(t)$ [mm] から次式を用いて公称ひずみ $\varepsilon(t)$ を算出した．

$$\varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0} \quad (2.1)$$

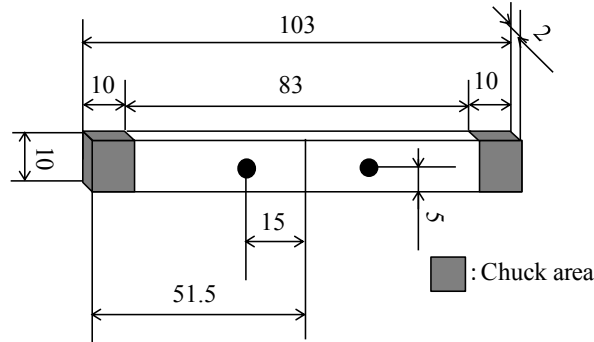


Fig. 2.1 Geometry of creep test specimen [mm]

2.2.2 試験結果

クリープ試験での $\varepsilon(t)$ の時間変化を図 2.2a に示す. 図 2.2a より負荷後に 40 ~ 300 [%] の公称ひずみが発生していることがわかる. その後, $\varepsilon(t)$ は 2×10^5 [s]まで単調増加し, その後ほぼ一定となった. そこで, 最終計測時刻 (4.7×10^5 [s]) の公称ひずみ ε_∞ を定常状態 (長期) の公称ひずみと仮定した. そして, それぞれの負荷応力下の $\varepsilon(t)$ を ε_∞ で割り, 4.7×10^5 [s]経過時に 1 となるように正規化した. 得られた正規化公称ひずみ $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$ を図 2.2b に示す. 図 2.2b では, 全ての試験片で計算した $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$ は概ね一致した. このことから, $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$ は負荷応力に依存しないことがわかった.

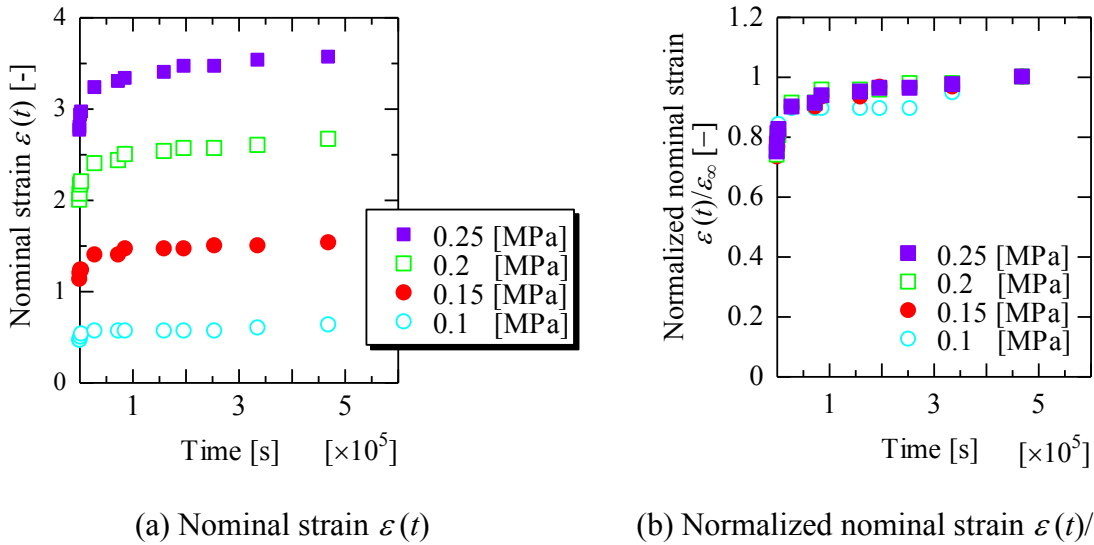


Fig. 2.2 Experimental creep test results for (a) nominal strain $\varepsilon(t)$ and (b) normalized nominal strain $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$.

2.3 材料モデルの決定と材料定数の同定

本節では前節の実験結果に基づいて、粘弾性を考慮した材料モデルを選定し、その材料定数の同定方法について検討した結果を示している。2.2節のクリープ試験では、負荷の初期において荷重の増加とともに大きなひずみが生じた。その後、一定の荷重下で定常的に増加するクリープ挙動を示した。この結果を受けて、ここでは大変形やクリープ挙動を再現するために、超弾性-粘弾性モデルを採用した。また図 2.2a より、クリープ試験で計測された $\varepsilon(t)$ は負荷後 2×10^5 [s] 経過以降ほぼ一定となった。これより、長期の公称ひずみ ε_∞ と試験片に負荷した公称応力 P_{exp} を長期の公称応力-公称ひずみ関係と仮定した。長期の公称応力-公称ひずみ関係を図 2.3 に示す。材料定数の同定では、初めに図 2.3 に示す長期の公称応力-公称ひずみ関係から超弾性モデルの材料定数を同定した後、クリープ試験の結果を用いて粘弾性モデルの材料定数を同定した。なおゲル材料を非圧縮と仮定して、本章で行われる計算は全て非圧縮条件のもとで行った。

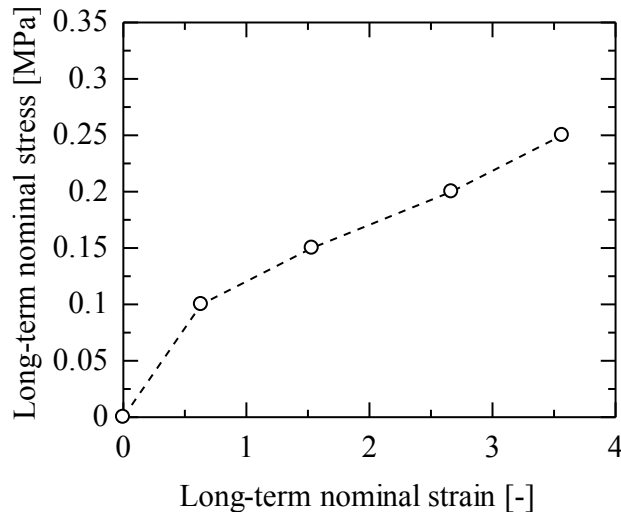


Fig. 2.3 Long-term nominal stress vs strain relationship; results of the creep test.

2.3.1 超弾性モデルの選定と材料定数の同定

図 2.3 より、長期の公称ひずみが 50 [%] を超えたところでひずみ量に対する応力の増加率（傾き）が減少している。また、今回のように単軸方向の応力-ひずみ関係を考慮する場合、右 Cauchy-Green ひずみテンソル $\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ の第 1 不変量 I_1 を変数とするエネルギー密度 W が用いられる (Koprowski-Theiss et al, 2011; Johlitz et al, 2011)。ここで、 \mathbf{F} は変形勾配テンソル、上付き添え字の T は転置テンソルを表す。以上より、図 2.3 のような挙動を再現するために、本研究では超弾性モデルとして Yeoh モデル (Yeoh, 1993) を採用した。このモデルは多項式で定義されており、非線形の応力-ひずみ関係を再現しやすい。また、いくつかの論文 (Koprowski-Theiss et al, 2011; Johlitz et al, 2011) で有効性が確認されている。Yeoh モデルの W を以下に示す。

$$W = c_{10} (I_1 - 3) + c_{20} (I_1 - 3)^2 + c_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (2.2)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.3)$$

ここで、 c_{10} , c_{20} , c_{30} は材料定数である。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は伸長比，下付き添え字の 1, 2, 3 は主方向を表している。

次に材料定数 c_{10} , c_{20} , c_{30} の同定方法について検討した。 まず，単軸引張 $\lambda_1 = \lambda$ を想定して， W から単軸引張の公称応力 P_{cal}^∞ を求めた。 ここでは主方向 1 を引張方向とする。 すると非圧縮の仮定より，体積変化率は $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ となるので，引張方向に垂直な方向の伸長比は $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ となる。 これらと式(2.2)，式(2.3)から P_{cal}^∞ が得られる (Holzapfel, 2000)。

$$P_{\text{cal}}^\infty(\lambda) = 2 \left(c_{10} + 2c_{20}(I_1 - 3) + 3c_{30}(I_1 - 3)^2 \right) \cdot (\lambda - \lambda^{-2}) \quad (2.4)$$

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \quad (2.5)$$

材料定数 c_{10} , c_{20} , c_{30} は式(2.4)より得られる P_{cal}^∞ と図 2.3 に示す長期の公称応力 P_{exp} の相対誤差が最小となるように準 Newton 法により同定した。 準 Newton 法の計算は以下に示す残差 r が $r < 0.005$ となるまで繰り返し行った。

$$r = \sum_a \left[\frac{(P_{\text{cal}}^\infty)_a - (P_{\text{exp}})_a}{(P_{\text{exp}})_a} \right]^2 \quad (2.6)$$

ここで，式(2.6)中の a ($a = 1, 2, 3, 4$) は図 2.3 のデータ点数を示す。 その結果，材料定数は $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$, $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa] となった。 実験結果と式(2.4)から算出される P_{cal}^∞ を図 2.4 に示す。 図 2.4 より，実験結果と計算結果がよく一致していることが確認できる。

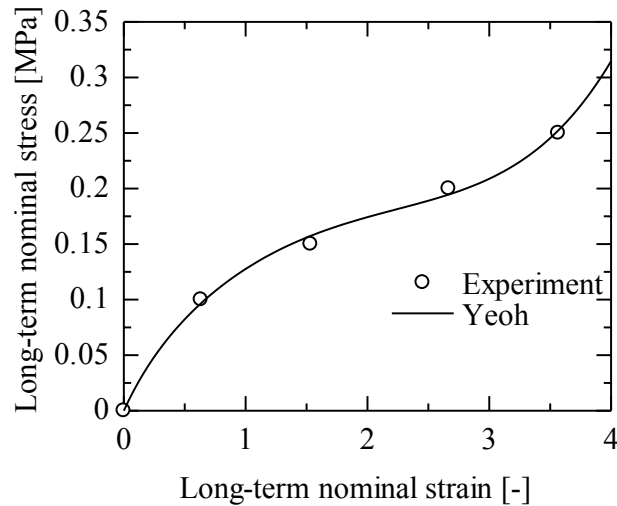


Fig. 2.4 Experimentally and numerically obtained long-term nominal stress vs nominal strain relationships. The material constants of the Yeoh model are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$, and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa].

2.3.2 粘弾性モデルの選定と材料定数の同定

2.2 節より、クリープ試験を行った結果、正規化公称ひずみ $\varepsilon(t)/\varepsilon_0$ は負荷応力の大きさに依存しないことがわかった。この結果から、本研究ではゲル材料の粘弾性挙動は負荷応力の大きさに依存しないと仮定し、Simo の提案した粘弾性モデル (Simo, 1987; Simo and Hughes, 1998) を採用した。Simo の粘弾性モデルは図 2.5 のように単独の非線形定常バネ要素と N 個の Maxwell 要素を並列に繋げた一般化 Maxwell モデルで構成されている。Maxwell 要素は非線形バネと線形ダッシュポットを直列に連結した要素である。また Simo の粘弾性モデルでは、粘弾性挙動を表す緩和時間 τ が定数として定義されているため応力・ひずみに非依存である。本項では、まず Simo の粘弾性モデルの概要を述べる。次に材料定数の同定方法について説明する。

(a) Simo の粘弾性モデル (Simo, 1987; Simo and Hughes, 1998)

まず、Simo の粘弾性モデルについて述べる。基準配置で考えると応力—ひずみ関係は次式で表される。

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_{SE}(t) + \sum_{i=1}^N [\mathbf{S}_i(t) - \mathbf{Q}_i(t)] \quad (2.7)$$

$$\mathbf{S}_{SE} = 2 \frac{\partial W_{SE}}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.8)$$

ここで、 N は Maxwell 要素の数、下付き添え字の SE と i はそれぞれ定常バネと i 番目の Maxwell 要素を表す。また、下付き添え字が付いてない変数は全要素を表す。 \mathbf{S} は第 2Piola-Kirchhoff 応力である。 \mathbf{Q}_i は基準配置の内部変数であり、次式の発展方程式を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{Q}}_i = 2 \frac{\gamma_i}{\tau_i} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

式(2.9)中の γ_i ($0 \leq \gamma_i \leq 1$)、 γ_{SE} ($0 \leq \gamma_{SE} < 1$) は各バネ要素の応力と全てのバネ要素の応力の合計値との比 (剛性比) で次式の条件を満たす材料定数である。

$$\gamma_{SE} = 1 - \sum_i^N \gamma_i \quad (2.10)$$

また、 $\mathbf{0}$ は 2 階の零テンソルである。このとき、 \mathbf{Q}_i は畳み込み積分の形で表される (Simo and Hughes, 1998)。

$$\mathbf{Q}_i(t) = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot \left[2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \right] ds \quad (2.11)$$

ここで、部分積分を用いて展開すると、

$$\mathbf{Q}_i(t) = \tau_i \cdot \left[2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \right]_t - \tau_i \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} \left[2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \right] ds \quad (2.12)$$

となる. このままでは数値計算ができないため, 時刻 t_n のときの変数が既知と仮定して, 時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ の $\mathbf{S}(t)$ を求める (Simo and Hughes, 1998). まず, 次式で表される新しい内部変数を定義する.

$$\mathbf{H}_i(t) := \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} \left[2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \right] ds \quad (2.13)$$

式(2.13)の時間積分の区間を次式のように2つに分ける.

$$\mathbf{H}_i(t_{n+1}) = \int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{(t_n + \Delta t) - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} [\mathbf{S}(s)] ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left(-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} [\mathbf{S}(s)] ds \quad (2.14)$$

そして, 式(2.14)の右辺の第1項を整理し, 第2項に数値積分の midpoint を適用すると (Simo and Hughes, 1998),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(t_{n+1}) &\approx \left(\frac{\Delta t}{\tau_i} \right) \int_{-\infty}^{t_n} \exp\left(-\frac{t_n - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} [\mathbf{S}(s)] ds \\ &\quad + \exp\left(-\frac{t_{n+1} - (t_{n+1} + t_n)/2}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} [\mathbf{S}(s)] \Big|_{s=\frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n)} \Delta t \\ &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) \mathbf{H}_i(t_n) + \gamma_i \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right) \cdot \Delta \mathbf{S}(t_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\Delta \mathbf{S}(t_{n+1}) = \mathbf{S}(t_{n+1}) - \mathbf{S}(t_n) \quad (2.16)$$

となる. 本法では定常バネの応力 \mathbf{S}_{SE} を用いて計算するため, γ_{SE} , γ_i を用いて \mathbf{S}_{SE} の形に変形する. 以上より, Simo の粘弾性モデルの応力—ひずみ関係 (式(2.7)) は以下のように表される.

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_{SE}(t) + \sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbf{H}_i(t) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{H}'_i(t) := \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) \mathbf{H}'_i(t_n) + \frac{\gamma_i}{\gamma_{SE}} \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right) \cdot \Delta \mathbf{S}_{SE}(t_{n+1}) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{S}_{SE} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.19)$$

ここで, \mathbf{H}' は初期値が $\mathbf{0}$ の内部変数である.

(b) Simo の粘弾性モデルの材料定数の同定

次に, 材料定数の同定方法について述べる. まず単軸引張 $\lambda_1 = \lambda$ を想定した時の公称応力 P_{cal} を求めた. 時刻 t_n のときの変数が既知の場合の時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ の P_{cal} は次式で表される (Simo and Hughes, 1998; Holzapfel, 2000).

$$P_{\text{cal}}(t_{t+n}) = (\lambda S_1 - \lambda^{-2} S_2) \quad (2.20)$$

ここで,

$$S_j = (S_{SE})_j + \sum_i^N (H'_i(t_{n+1}))_j \quad (2.21)$$

$$(H'_i(t_{n+1}))_j = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right) (H'_i(t_n))_j + \frac{\gamma_i}{\gamma_{SE}} \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right) \cdot \Delta S_{SE}(t_{n+1})_j \quad (2.22)$$

$$\Delta S_{SE}(t_{n+1})_j = S_{SE}(t_{n+1})_j - S_{SE}(t_n)_j \quad (2.23)$$

$$(S_{SE})_1 = \frac{4}{3} (c_{10} + 2c_{20}(I_1 - 3) + 3c_{30}(I_1 - 3)^2) \cdot (1 - \lambda_1^{-3}) \quad (2.24)$$

$$(S_{SE})_2 = \frac{2}{3} (c_{10} + 2c_{20}(I_1 - 3) + 3c_{30}(I_1 - 3)^2) \cdot (1 - \lambda_1^3) \quad (2.25)$$

$$(S_{SE})_3 = (S_{SE})_2 \quad (2.26)$$

ここで, S_j は第 2Piola-Kirchhoff 応力の主値, 下付き添え字 j は主方向を表している. 式(2.24)と式(2.25)中では超弾性モデルに Yeoh モデルが用いられており, 材料定数 c_{10} , c_{20} , c_{30} は前項で求めたものを使用した. これにより, 試験片に一定の荷重を負荷し十分に時間が経過した後, 定常状態になった時の P_{cal} は式(2.4)の P_{cal}° と一致する.

Maxwell 要素の材料定数(τ_i , γ_i)の同定の際は, 初めに Maxwell 要素の数を $N=3$ とし, 材料試験の計測時間 ($300 \sim 4.7 \times 10^5$ [s]) の桁数から $\tau_i = 10^3, 10^4, 10^5$ [s] と設定した. 次に, 実験で負荷した公称応力 P_{exp} と式(2.20)~式(2.26)より算出される P_{cal} の相対誤差が最小となる γ_i を準ニュートン法により求めた. 2.2 節のクリープ試験の結果より, クリープ挙動は負荷応力に依存しないことがわかっているため, ここでは負荷応力 0.25 [MPa] の試験結果のみを使用した. 準ニュートン法の残差 r は次式とした.

$$r = \sum_k \left[\frac{P_{\text{cal}}(t_k) - P_{\text{exp}}}{P_{\text{exp}}} \right]^2 \quad (2.27)$$

ここで, k は負荷応力 0.25 [MPa] のクリープ試験のデータ点数, t_k は計測時刻である. 準 Newton 法の計算は $r < 0.005$ となるまで行った. その結果, 材料定数は $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027), $(10^5$ [s], 0.144) となった. 材料定数の再現性の確認は 2.5 節で行う.

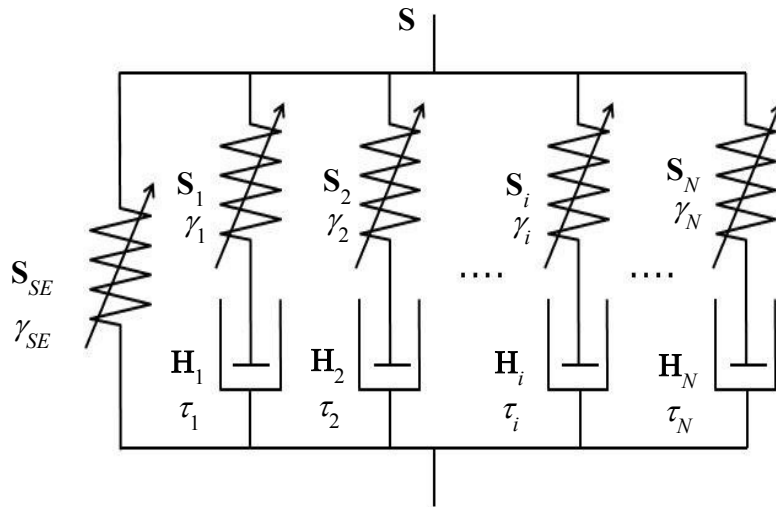


Fig. 2.5 Nonlinear viscoelastic model proposed by Simo.

2.4 3次元デジタル画像相関法による変位とひずみの測定方法

本研究では、2つの穴を有する短冊型試験片のクリープ試験を行った。解析結果と実験では対数ひずみ分布の測定を行った。その測定においては3次元デジタル画像相関法を使用した。デジタル画像相関法とは、物体表面の変位やひずみを非接触かつ高い精度で計測する手法である。1台のカメラを用いた場合には、平面物体の面内変位を測定することができる。複数のカメラを用いた場合、ステレオ法の原理により3次元表面の変位やひずみを測定することができる。また、複雑な光学系を必要としないため、測定が容易である。本節では2.4.1項でデジタル画像相関法の計測原理についてまとめる (Sutton et al, 2009; 米山, 2010; Correlated Solutions User Manual)。次に2.4.2項でステレオ法の原理についてまとめる (Sutton et al, 2009; 米山, 2010; Correlated Solutions User Manual)。そして2.4.3項では、本研究での計測手順について述べる (Correlated Solutions User Manual)。なお、2.5節および4.4節において、FEM解析の結果と実験による画像解析の結果を比較するために本手法を用いている。

2.4.1 デジタル画像相関法の計測原理

デジタル画像相関法は、物体表面の模様は物体表面と共に移動し、変形の前後でその特徴が保存されるという考えに基づいている。したがって、測定対象物表面の変形前後の画像を撮影する必要がある。変形前後の画像を比較し、変形前における物体表面の模様が変形後に移動した場所を探し出すことで、変位を求めることができる。その方法として、サブセットと呼ばれる複数の画素からなる計算領域を設け、その領域の変形後の位置を輝度値分布(光強度分布)の相関等を用いて変位を求める。この時、

相関を得やすくするため、測定対象表面は特徴的な模様が必要になる。特徴的な模様が
ない場合は、図 2.6 のように物体表面に人工的な模様を塗布する。

変形前後の画像の相関は次式によって計算することができる。

$$Err\left(x, y, u_x, u_y, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = 1 - \frac{\sum I_u(x, y) I_d(x^*, y^*)}{\sqrt{\sum I_u(x, y)^2 \sum I_d(x^*, y^*)^2}} \quad (2.28)$$

ここで、 $I_u(x, y)$ は変形前画像の座標 (x, y) における輝度値、 $I_d(x^*, y^*)$ は変形後画像の座標 (x^*, y^*) における輝度値である。また、総和記号 Σ は、任意の解析対象点を中心にした $n \times n$ のサブセット内の輝度値の総和を示す。

ここで、計測対象物が変形する場合、面内のサブセットは計測対象物と共に変形することも考慮する必要がある。そこで、サブセット内の変形が一定であると仮定して、図 2.7 のように任意のサブセットが移動・変形した場合を考える。図 2.7 中の点 O と点 O' はそれぞれ変形前後に撮影した画像内の任意のサブセットの中心点、 u_x 及び u_y はそれぞれ点 O から点 O' までの x 方向及び y 方向の変位、 Δx 及び Δy は変形前に撮影した画像のサブセット内の中心点 O から点 $P(x, y)$ までの距離である。サブセット内部において変形の勾配が一定であると仮定すると、輝度相関を調べる座標 $P(x, y)$ および変形前に座標 $P(x, y)$ にある画素が変形後に位置する座標 $P'(x^*, y^*)$ には次式の関係が成り立つ。

$$\begin{cases} x^* = x + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y \\ y^* = y + u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Delta y \end{cases} \quad (2.29)$$

また、デジタル画像から得られる輝度値データは不連続であるため、座標 $P'(x^*, y^*)$ は画素間となる。つまり、精度よく変位を計測するためには、座標 $P'(x^*, y^*)$ の位置を 1 画素以下の単位で検出する必要がある。したがって、補間関数を用いて画素間を滑らかな輝度値分布を計算する必要がある。一般にはランダムパターンを双 3 次関数等で補間する。この双 3 次補間の計算式は、変形画像の輝度分布 $G(x^*, y^*)$ として次式で表される。

$$\begin{aligned} G(x^*, y^*) = & a_{00} + a_{10}(x^*) + a_{20}(x^*)^2 + a_{30}(x^*)^3 \\ & + a_{01}(y^*) + a_{11}(x^*)(y^*) + a_{21}(x^*)^2(y^*) + a_{31}(x^*)^3(y^*) \\ & + a_{02}(y^*)^2 + a_{12}(x^*)(y^*)^2 + a_{22}(x^*)^2(y^*)^2 + a_{32}(x^*)^3(y^*)^2 \\ & + a_{03}(y^*)^3 + a_{13}(x^*)(y^*)^3 + a_{23}(x^*)^2(y^*)^3 + a_{33}(x^*)^3(y^*)^3 \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここで、各 a_{ij} は双 3 次補間関数の定数であり、変形後画像から一意に決定されるパラメータである。

以上の考え方を用いて、式(2.28)の Err を最小化する変位 u_x , u_y 及び変位勾配 $\partial u_x / \partial x$, $\partial u_x / \partial y$, $\partial u_y / \partial x$, $\partial u_y / \partial y$ の 6 つの変数を検索することにより対象点の変位を決定することができる。式(2.28)の Err を最小化する計算には、Newton-Raphson 法を用いた計

算が推奨されている．ここで，式(2.28)にある6つの未知パラメータの変位 u_x , u_y 及び変位勾配 $\partial u_x / \partial x$, $\partial u_x / \partial y$, $\partial u_y / \partial x$, $\partial u_y / \partial y$ をまとめて P_i とする．そして，繰り返し計算により P_i を更新するベクトルを ΔP_i とする．さらに，式(2.28)の関数 Err のヘッセ行列及びヤコビアンマトリクスをそれぞれ， $H(P_i)$ 及び $\nabla(P_i)$ とする．すると Newton-Raphson 法の各繰り返し計算は次式のように表すことができる．

$$\Delta P_i = -H^{-1}(P_i) \bullet \quad (2.31)$$

ここで， $H(P_i)$, P_i , $\nabla(P_i)$ は次式で表すことができる．

$$H(P_i) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial u_x \partial u_x} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_x \partial u_y} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_x \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_x \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_x \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_x \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial u_y \partial u_x} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_y \partial u_y} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_y \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_y \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_y \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial u_y \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \partial u_x} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \partial u_y} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \partial u_x} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \partial u_y} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \partial u_x} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \partial u_y} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \partial u_x} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \partial u_y} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} & \frac{\partial^2 S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$P_i^T = \left\{ u_x \quad u_y \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \right\} \quad (2.33)$$

$$\nabla(P_i)^T = \left\{ \frac{\partial S}{\partial x} \quad \frac{\partial S}{\partial y} \quad \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)} \quad \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} \quad \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)} \quad \frac{\partial S}{\partial \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)} \right\} \quad (2.34)$$

以上の計算方法を用いることによって，高速かつ空間分解能力 0.02 [pixel] 以下の精度で変位解析することができる．ひずみの値は Newton-Raphson 法の計算結果から得られる変位勾配より，それぞれのひずみテンソルの定義式から算出される．また，算出

されたひずみはローカルフィルタを用いて平滑化される．本実験ではフィルタサイズを5とした．詳細は参考文献（Sutton et al, 2010; Correlated Solutions User Manual）を参照されたい．

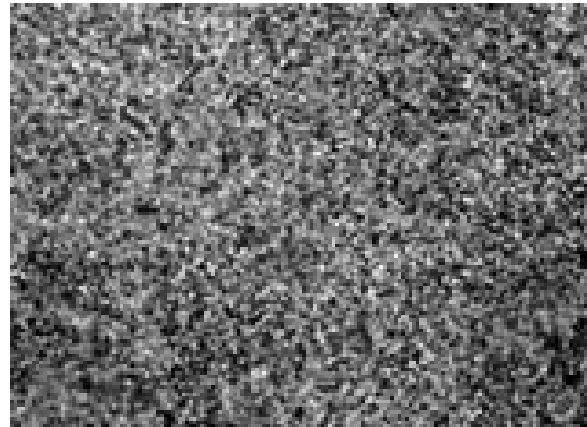


Fig. 2.6 Example image of random pattern

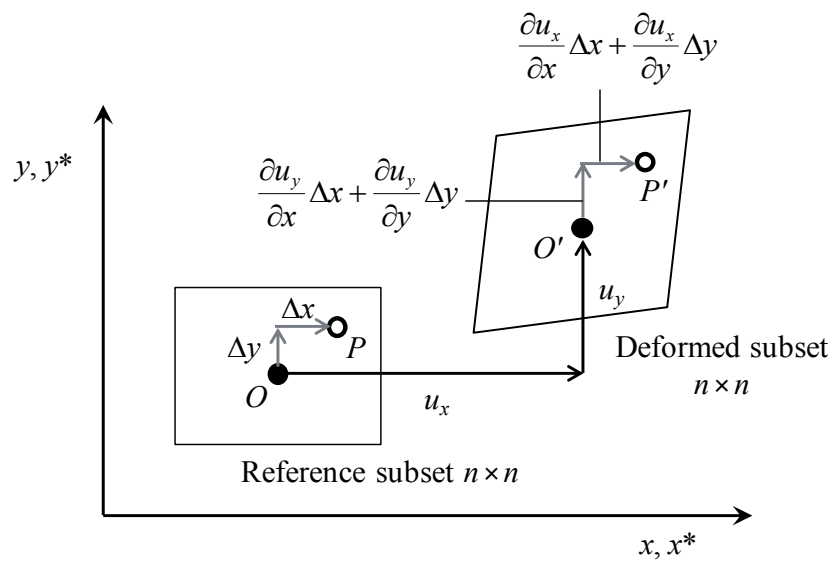


Fig. 2.7 Subset before and after deformation.

2.4.2 ステレオ法の原理

ステレオ法とは、2台のカメラを用いて、三角測量の原理で計測を行なう手法である。このステレオ法の原理により3次元表面の変位やひずみを測定することが可能である。図2.8は2台のカメラで同一の物体を撮影している状況を表している。対象物の空間座標系を (x, y, z) とし、仮想投影面すなわち画像内の座標系を (u, v) で表す。 $P(x, y, z)$ は測定対象物体上の点、 O_L および O_R は2台カメラでそれぞれ撮影した場所からの視点（投影中心）、 $P_L(u_L, v_L)$ および $P_R(u_R, v_R)$ はそれぞれ点 P が仮想投影面 L および R に投影された像である。この時、それぞれの視点と投影面に投影された点 P_L, P_R を結んだ直線 $O_L P_L, O_R P_R$ は点 P で交わる。つまり、 P と P_L および P と P_R は共役関係にあり、 $P(x, y, z)$ の位置にある点が結像する位置がそれぞれ $P_L(u_L, v_L)$ および $P_R(u_R, v_R)$ である。ピンホールカメラモデルを用いると、仮想投影面 (u, v) と対象空間座標 (x, y, z) の関係は次式のように表すことができる。

$$\begin{cases} u = \alpha \frac{r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z + t_u}{r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z + t_w} + \gamma \frac{r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z + t_v}{r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z + t_w} + u_0 \\ v = \beta \frac{r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z + t_v}{r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z + t_w} + v_0 \end{cases} \quad (2.35)$$

しかし、現実にはカメラのレンズの歪曲収差のため、像が歪んでしまう。そのため、実際にカメラで撮影する場合には、仮想投影面は歪んでしまい、点 (u, v) は本来の位置とは異なる場所の点 (u', v') として撮影されてしまう。点 (u', v') は次式のように表される。

$$\begin{cases} u' = u + k_1(u - u_0) \left\{ (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right\} \\ v' = v + k_1(v - v_0) \left\{ (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right\} \end{cases} \quad (2.36)$$

ここで、式(2.35)と式(2.36)の α, β, γ はスケールファクタ、 u_0, v_0 は仮想投影面における主点位置、 k_1 は収差係数であり、内部パラメータと呼ばれている。また、 $r_{11} \sim r_{33}$ と t_u, t_v, t_w はカメラの位置や姿勢を表している係数であり、外部パラメータと呼ばれている。これらの係数はキャリブレーションにより決定される。

キャリブレーションは、寸法のわかっている模様を描かれた板を撮影することにより行なう。図2.9は実際に本実験で使用したキャリブレーション板である。このキャリブレーション板には縦に9個、横に12個の合計108個の点があり、点の中心とその点に隣り合う点の中心までの間隔が12mmになるように配置されている。キャリブレーション板を動かすことによって点の位置を変化させながら複数枚撮影し、画像上で点の数と位置を検出することで、実際の物体の座標と画像の座標を関係付ける。また、このキャリブレーションは、2台のカメラに対して同一のキャリブレーション板を用いて同時に撮影する必要がある。

式(2.35)および式(2.36)により、2つのカメラの仮想投影面 (u_L, v_L) と (u_R, v_R) を求めることができる。仮想投影面上の位置 P_L と P_R がわかれば、点 P の座標は、それぞれの視点 O_L, O_R と投影面に投影された点 P_L, P_R とを結んだ直線 $O_L P_L, O_R P_R$ の延長線上の交点となる。つまり、3つの未知数 (x, y, z) に対して4つの式が得られるため、最小二乗法を用いて点 P の位置を求めることができる。

以上より、デジタル画像相関法の測定原理とステレオ法の原理を用いることで、3次元形状と変位を測定できるようになる。

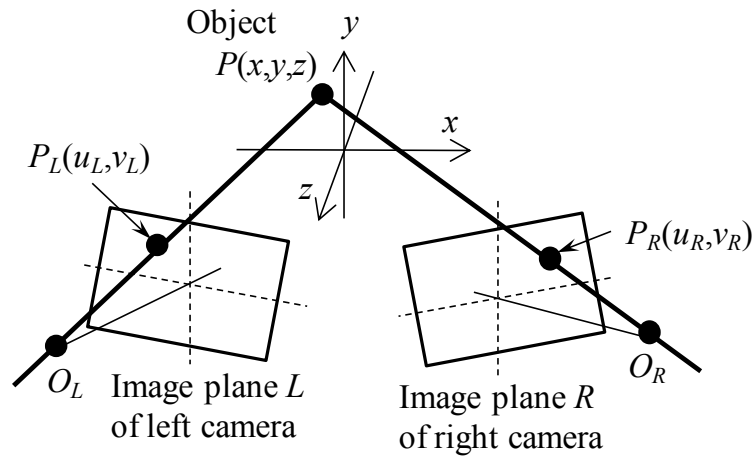


Fig. 2.8 Geometrically relationships between the image planes and measured object.

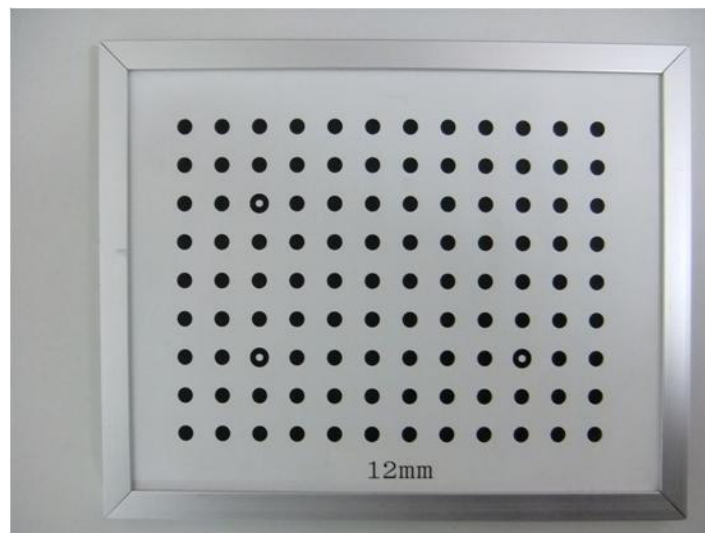


Fig. 2.9 Calibration plate.

2.4.3 計測手順

ここからは、本研究で行った 2 つの穴を有する短冊型試験片のクリープ試験における、3次元デジタル画像相関による対数ひずみ分布の計測手順について述べる。なお、3次元デジタル画像相関には汎用ソフト Vic-3D7 (Correlated Solutions User Manual) を利用した。画像の撮影には図 2.10 に示す富士フィルム株式会社製の 2 眼カメラ FINEPIX REAL 3D W2S を使用した。

実験では、初めにキャリブレーション板を使用し、2つのカメラの位置を特定した。キャリブレーション板を様々な角度に変化させながら複数枚撮影し、その情報から2つのカメラの位置、角度等を特定させた。本実験では、図 2.9 に示すキャリブレーション板の画像を左右セットで 32 枚、合計 64 枚使用した。

次に、本研究で用いた試験片は表面に特異な模様がないため、試験片にランダムパターンを描いた。デジタル画像相関では一般にスプレーを用いてランダムパターンを塗布するが、本試験片では変形した際に塗布した塗料が剥がれてしまった。そのため、試験片表面の模様は油性マジックで描いた。実験に使用した試験片の模様を図 2.11 に示す。

最後に、試験片の変形前後の画像を撮影し、Vic-3D7 を用いて変位を測定した。画像のイメージサイズは 2048×1536 とした。Vic-3D7 で画像相関を行う際は、変形前の画像上でサブセットの位置を定義し、解析対象領域を指定した。試験片 A, B でのサブセットサイズはそれぞれ 31, 39, 相関をとる間隔はそれぞれ 9, 4 とした。以上を準備として画像相関を行うことにより、計測原理に基づいて試験片表面全体の 3次元形状および変位 (ひずみ) 分布を測定した。



Fig. 2.10 2 lens Camera used in this paper.

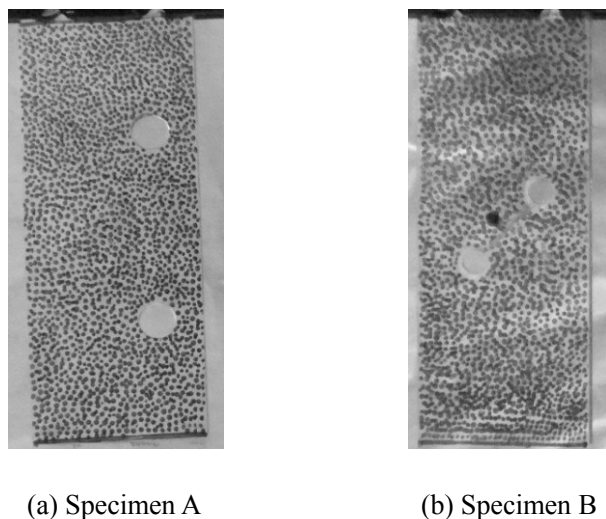


Fig. 2.11 Random patter of the (a) Specimen A and (b) B.

2.5 材料モデルの性能評価

2.3 節で選定した材料モデルと同定した材料定数の性能を評価するために、2 つの例題を検討した. この節では汎用 FEM ソフトの Abaqus/Standard (Abaqus 6.14 User's Guide, 2014) で解析を行った結果を示す.

2.5.1 大変形クリープ試験

ここでは材料モデルと材料定数の再現性や予測性能を評価するために 2.2 節のクリープ試験について解析を行った. また, ここでは材料モデルは Abaqus に搭載されている有限変形粘弾性モデル (Abaqus 6.14 User's Guide, 2014) を使用した. ゲル材料を非圧縮と仮定して, FEM 解析では Hybrid 要素 (Abaqus 6.14 User's Guide, 2014) を使用した.

FEM 解析と 2.2 節のクリープ試験から得られる公称ひずみの結果を図 2.12 に示す. 図 2.12 より, 負荷応力が 0.15, 0.2 [MPa]では実験結果と解析結果に多少差が見られたが, 0.1, 0.25 [MPa]では良く一致することがわかる. また, 計測したひずみ域全体では解析結果は実験結果を良く再現できている. したがって, 選定した材料モデルと同定した材料定数はクリープ試験の結果を定性的に再現することがわかる.

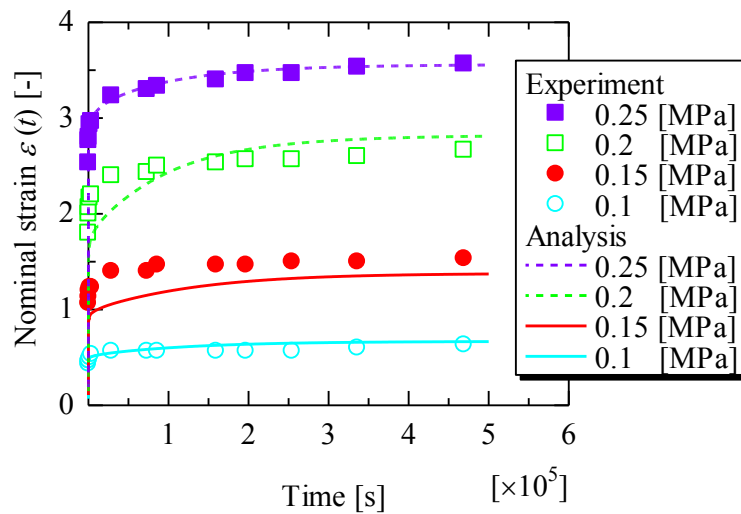


Fig. 2.12 Nominal strain results of tensile creep test and finite element method (FEM). The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$, $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027), and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2,$ and $3,$ respectively.

2.5.2 有孔平板のクリープ試験

選定した材料モデルと同定した材料定数の有効性を評価するために2つの穴を有する短冊形試験片のクリープ試験とそのFEM解析を行った結果を示す。

クリープ試験では図2.13の2種類の試験片で試験を行った。試験片Aは右側に2つの穴を有する。一方で試験片Bでは中央に互いに繋がった2つの穴を有する。両方の試験片に対してy方向に2.5 [N]の荷重を負荷した。そして、負荷後 3×10^2 [s] (5 [min]), 3.6×10^3 [s] (1 [h]), 8.64×10^4 [s] (1 [day]) 経過時の試験片表面の対数ひずみ分布を3次元デジタル画像相関法 (DIC) で計測した。

FEM解析では試験片の厚さが高さや幅に対して十分に薄いことを考慮して平面応力要素 (Abaqus 6.14 User's Guide, 2014) を使用した。図2.14はFEM解析で使用したメッシュである。試験片Aのメッシュは節点数3050, 要素数2901, 試験片Bのメッシュは節点数2614, 要素数2460である。材料定数は2.3節で求めたものを使用した。

材料試験とFEM解析より得られる対数ひずみ分布を図2.15～図2.20に示す。図2.15は試験片Aの対数ひずみ e_{yy} 分布を表しており、試験片全体で材料試験とFEM解析の結果は概ね一致した。チャックつかみ部付近では、クリップ締付けによる影響で差異が見られる。しかし、応力集中が生じる穴付近はひずみ分布の傾向やクリープ挙動を定性的に再現できている。図2.16は試験片Bの対数ひずみ e_{yy} 分布を表しており、ここでも材料試験とFEM解析の結果は概ね一致していることがわかる。さらに図2.17

と図 2.18 はそれぞれ試験片 A, B の対数ひずみ e_{xx} 分布, 図 2.19 と図 2.20 はそれぞれ試験片 A, B の対数ひずみ e_{xy} 分布を表しており, こちらでも e_{yy} 分布と同様に粘弾性挙動を再現できている.

以上より, 本提案法は応力集中が生じるような問題にも適用可能であることがわかる. また, 単軸方向のクリープ試験の結果を用いて e_{yy} , e_{xx} , e_{xy} 分布を定性的に再現できしており, 選定した材料モデルと同定した材料定数の有効性が確認できる.

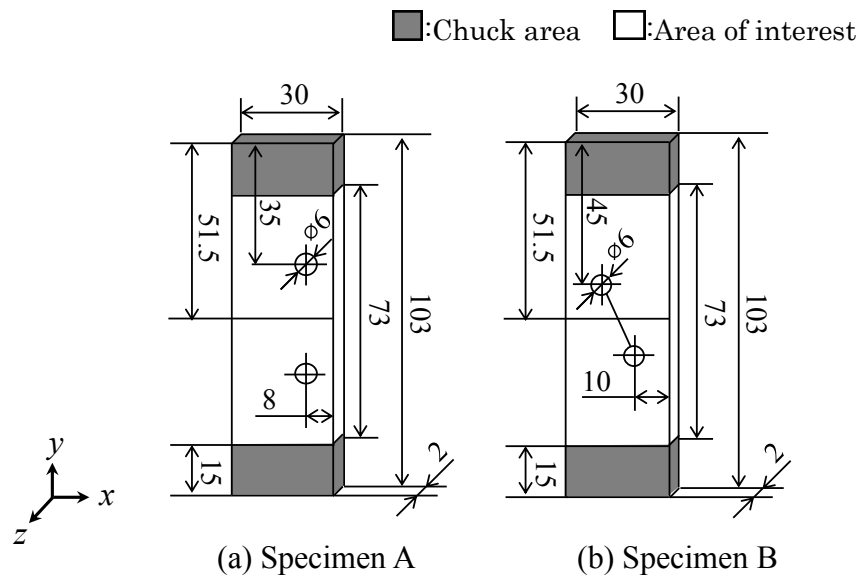


Fig. 2.13 Geometries of specimens (a) A and (b) B [mm].

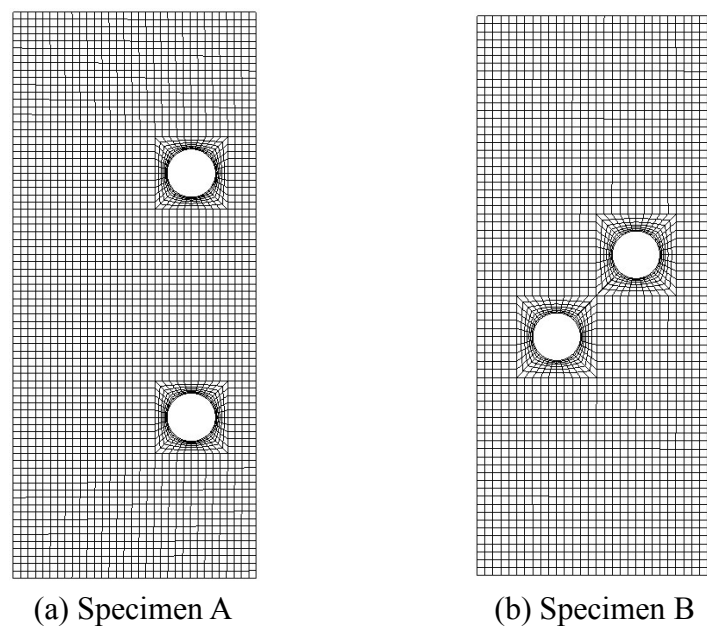


Fig. 2.14 Mesh geometries of specimens (a) A and (b) B.

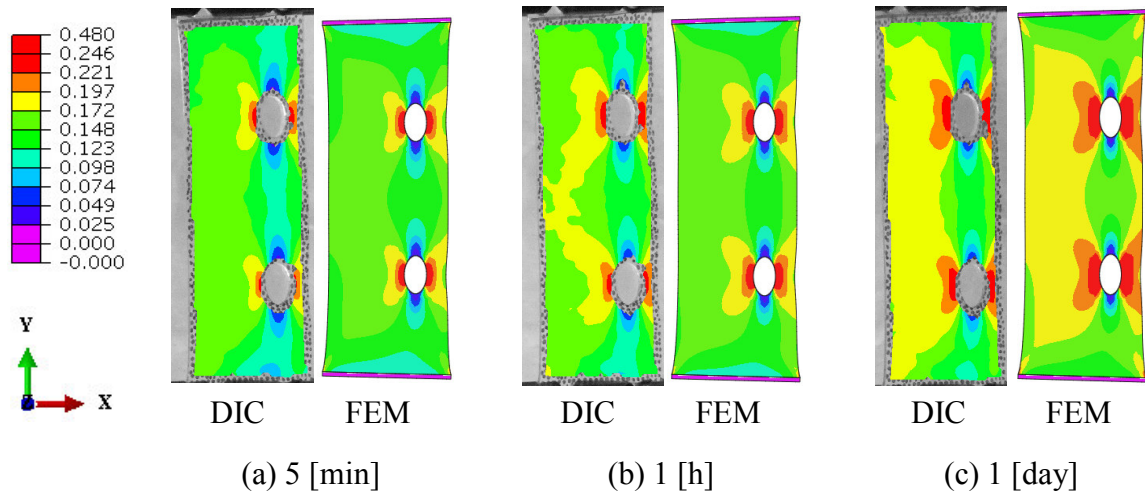


Fig. 2.15 Logarithmic strain e_{yy} of specimen A from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3, respectively.

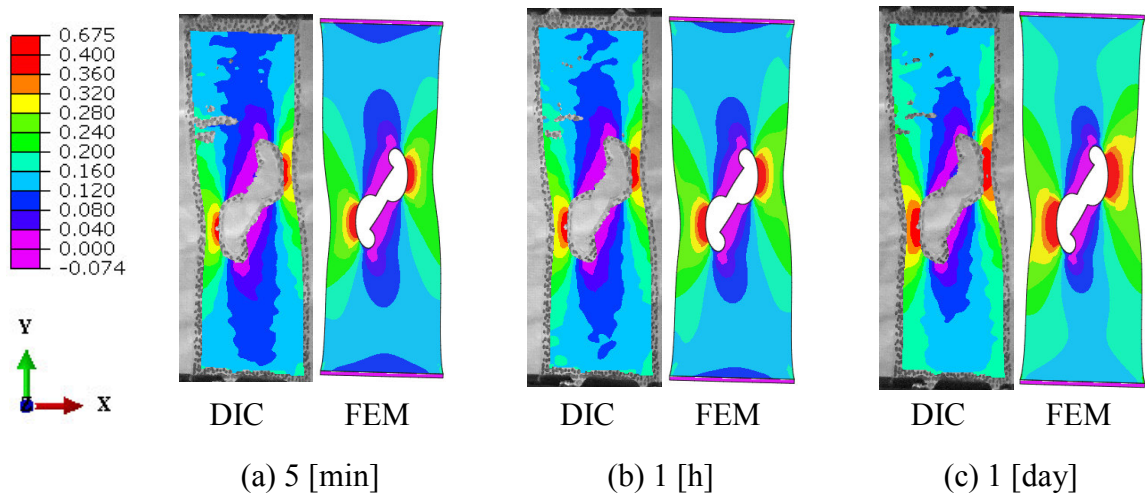


Fig. 2.16 Logarithmic strain e_{yy} of specimen B from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3, respectively.

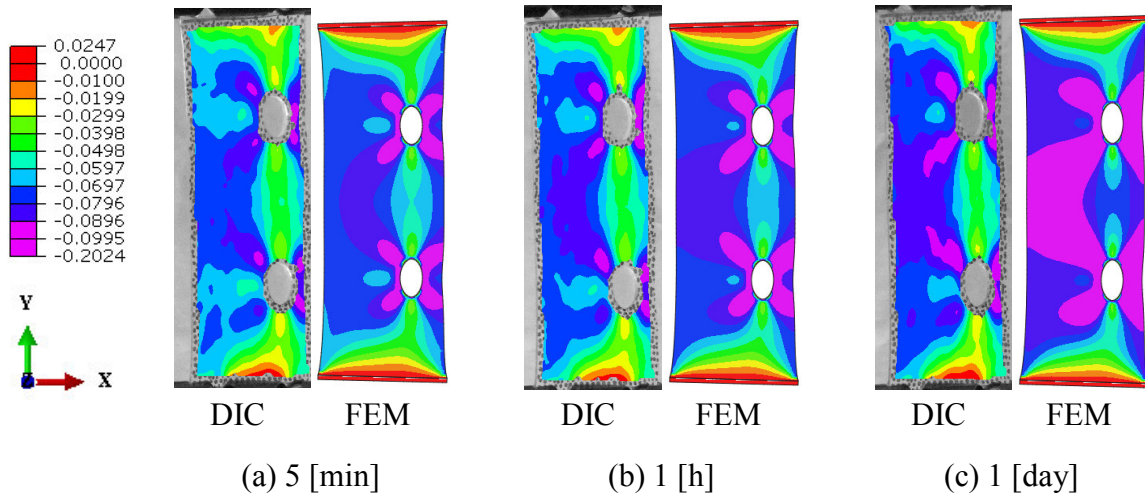


Fig. 2.17 Logarithmic strain e_{xx} of specimen A from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3, respectively.

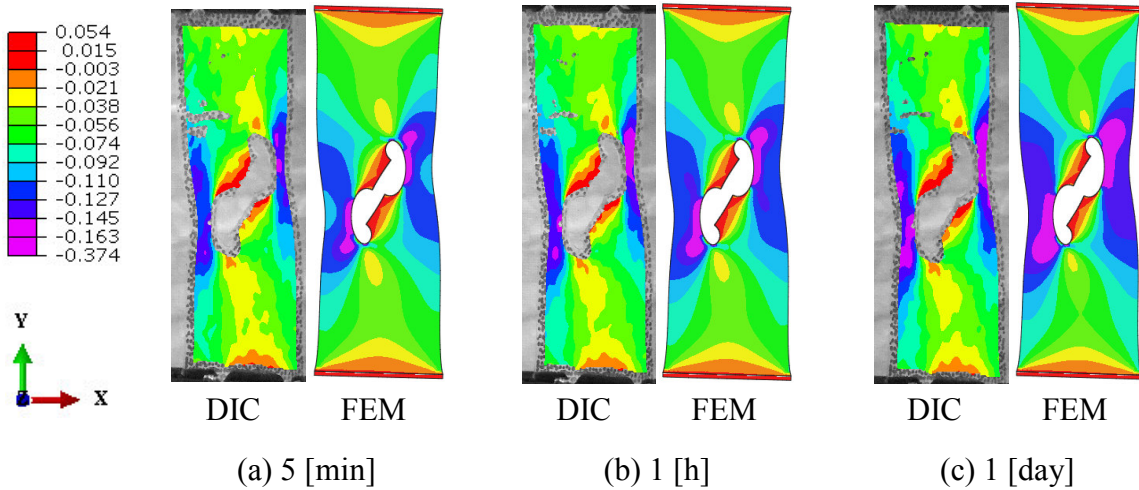


Fig. 2.18 Logarithmic strain e_{xx} of specimen B from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3, respectively.

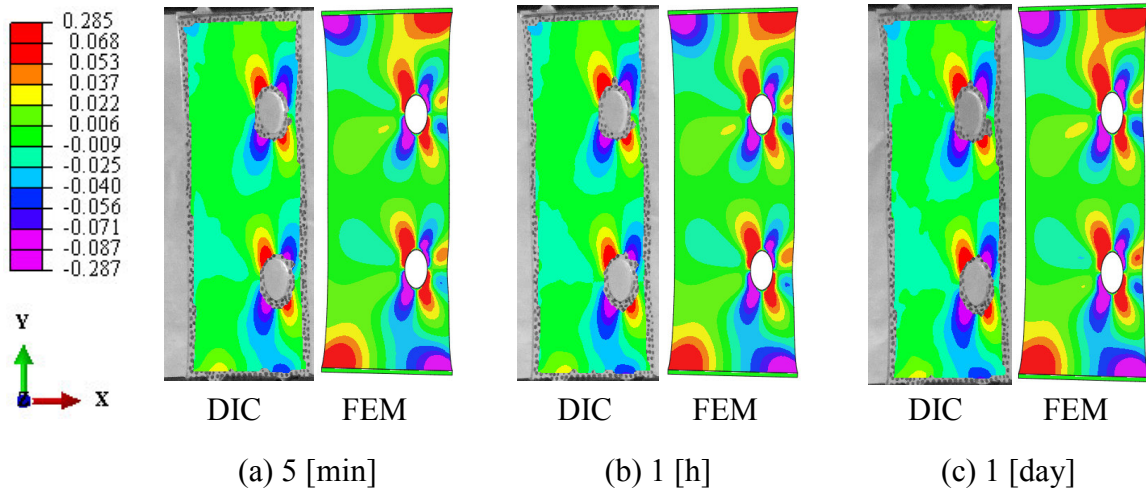


Fig. 2.19 Logarithmic strain e_{xy} of specimen A from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3, respectively.

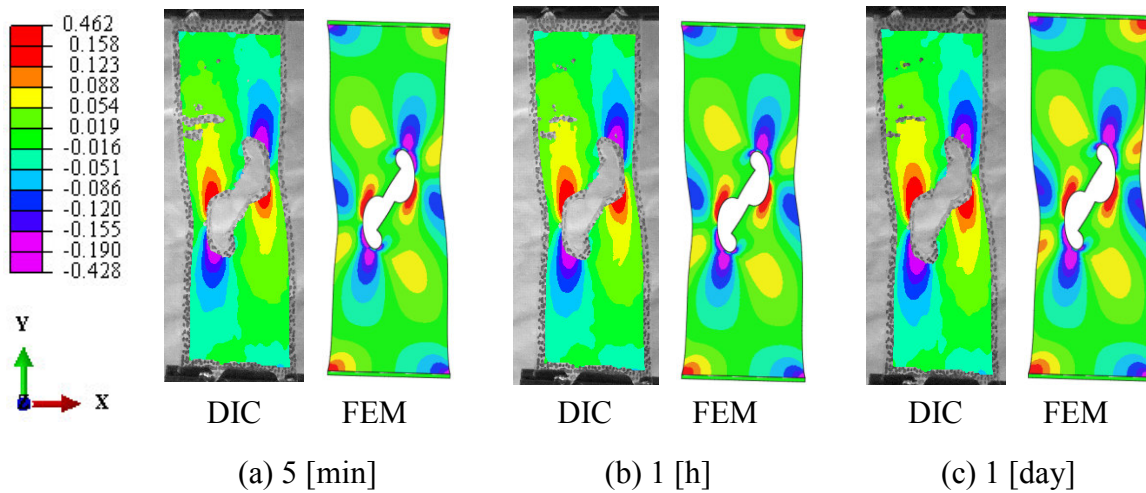


Fig. 2.20 Logarithmic strain e_{xy} of specimen B from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3, respectively.

2.6 まとめ

本章ではクリープ試験の結果を用いて簡易的にゲル材料の粘弾性挙動を再現できる力学数値シミュレーション法を開発した. 初めにゲル材料の粘弾性挙動を調査するために大変形クリープ試験を行った. そして, FEM 解析のための材料モデルの選定し, 材料定数の簡易同定方法を開発した. さらに, 2つの穴を有する短冊型試験片のクリープ試験等の例題を通して材料モデルの性能評価を行った. 得られた知見を以下に示す.

- (1) クリープ試験の結果から, $\alpha(t)/\varepsilon_\infty$ は負荷した荷重の大きさによらず, 全ての荷重下でほぼ一致することを確認した. これより, ゲル材料の粘弾性挙動は負荷応力の大きさに依存しないことがわかった.
- (2) クリープ試験の結果を考慮して, 材料モデルは Simo の粘弾性モデルと Yeoh の超弾性モデルを採用し, その材料定数を準 Newton 法で同定した. そして, クリープ試験のトレース解析を行った結果, 計測したひずみ領域で選定した材料モデルと同定した材料定数は実験結果と概ね一致した.
- (3) 2つの穴を有する短冊型試験片のクリープ試験とその FEM 解析を行い, 両者の結果を比較した. その結果, 選定した材料モデルと同定した材料定数は実験結果を定性的に再現できることを確認した. また, 本提案法は応力集中が生じするような問題にも適用可能であることがわかった.

以上より, 本章の提案手法は簡単な実験を用いてゲル材料の粘弾性挙動を定性的に予測することができるため, 製品の設計・開発を効率的に行えることが期待できる.

今後は, より再現性や予測性能を向上させることが求められるが, 選定した材料モデルでこの課題を解決するのは難しいため, 新しい材料モデルを開発し, 実装する必要がある. ただし, 新しい材料モデルを実装するには複雑なテンソル演算が必要となる. そして, 材料モデルを実装する度にこの作業を行うのは手間がかかる. したがって, 新しい材料モデルについて検討すると共に, 材料モデルの簡易実装スキームについても検討していく必要がある.

なお, 本章の内容は以下の論文に記載された内容が含まれている.

Creep characterization of Gels and Nonlinear Viscoelastic Material model, Kiyotaka ISHIKAWA, Masaki FUJIKAWA, Chobin MAKABE, Modan Physics Letters B, Vol. 30, No. 18 (2016), p1650225-1-12, Copyright@2016, World Scientific Publishing Co., Inc.

参考文献

- 1) Abaqus 6.14 User's Guide, Dassault Systemes Simulia (2014).
- 2) Almdal, K., Dyre, J., Hvidt, S. and Kramer, O., Towards a Phenomenological definition of the term 'gel', *Polymer Gels and Networks*, Vol. 1, Issue 1 (1993), pp. 5-17.
- 3) Correlated Solutions User Manual, Laser Measurement Co., Ltd.
- 4) Dinato, R.C., Ribeiro, A.P., Butugan, M.K., Pereira, I.L.R., Onodera, A.N. and Sacco, I.C.N., Biomechanical variables and perception of comfort in running shoes with different cushioning technologies, *Journal of Science and Medicine in Sport*, Vol. 18, Issue 1 (2015), pp. 93-97.
- 5) Fukunaga, M., Shimizu, N. and Nasuno, H., A nonlinear fractional derivative model of impulse motion for viscoelastic materials, *Physica Scripta*, Vol. 2009, T136 (2009), pp. 014010 1-6.
- 6) 伏見 隆夫, ゲルの応用, *SEN-I GAKKAISHI (繊維と工業)*, Vol. 49, No. 3 (1993), pp. 32-41.
- 7) Holzapfel, G.A., *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*, Wiley (2000).
- 8) Johlitz, M. and Diebels, S., Characterization of a polymer using biaxial tension tests. Part I: Hyperelasticity, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, Issue 10 (2011), pp. 1333-1349.
- 9) Kobayashi, M., Chyang, Y.-S. and Oka, M., A two year in vivo study of polyvinyl alcohol-hydrogel (PVA-H) artificial meniscus, *Biomaterials*, Vol. 26 (2005), pp. 3243-3248.
- 10) Koprowski-Theiss, N., Johlitz, M. and Diebels, S., Characterizing the time dependence of filled EPDM, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 84, No.2 (2011), pp. 147-165.
- 11) Lee, C., Grad, S., Wimmer, M. and Alini, M., The influence of mechanical stimuli on articular cartilage tissue engineering. In: Ashammakhi, N. and Reis, R.L. (eds), *Topics in Tissue Engineering*, Vol. 2, EXPERTISSUES e-book (2006), pp. 2-32.
- 12) Liu, K., VanLandingham, M.R. and Ovaert, T.C., Mechanical characterization of soft viscoelastic gels via indentation and optimization-based inverse finite element analysis, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Vol. 2, Issue 4 (2009), pp. 355-363.
- 13) Ogawa, M., Kitamura, N., Kurokawa, T., Arakaki, K., Tanaka, Y., Gong, J.P. and Yasuda, K., Poly (2-acrylamido-2-methylpropanesulfonic acid) gel induces articular cartilage regeneration in vivo: Comparisons of the induction ability between single- and double-network gels, *Journal of Biomedical Materials Research A*, Vol. 100A, Issue 9 (2012), pp. 2244-2251.
- 14) Simo, J.C., On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 60, Issue 2 (1987), pp. 153-173.

- 15) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R., Computational Inelasticity, Springer (1998).
- 16) Suci, A.N., Iwatsubo, T., Matsuda, M. and Nishino, T., A study upon durability of the artificial knee joint with PVA hydrogel cartilage, JSME International Journal, Series C, Vol. 47, No. 1 (2004), pp.199-208.
- 17) Sutton, M.A., Orteu, J.-J. and Schreier, H.J., Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications, Springer (2009).
- 18) Yeoh, O.H., Some forms of the strain energy function for rubber, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 66, No. 5 (1993), pp. 754-771.
- 19) 米山聡, デジタル画像相関法を用いた変位・ひずみ分布測定, 非破壊検査第 59 巻 7 号 (2010), pp.306-310.
- 20) Zhang, J., Zhao, X., Suo, Z. and Jiang, H., A finite element method for transient analysis of concurrent large deformation and mass transport in gels, Journal of Applied Physics, Vol. 105, Issue 9 (2009), pp. 093522 1-9.

3. 非線形有限要素法への材料構成則の実装方法の検討

3.1 はじめに

前章ではクリープ試験を行った。そして、実験結果に基づいてゲル材料の材料モデルの選定とその材料定数の同定を行い、例題を通して性能評価を行った。前章の材料モデルは定性的にゲル材料の粘弾性挙動を予測することが可能である。ただし、より精度の高い予測をする場合やより適切な再現性を示すことがシミュレーションに求められる場合、材料試験に合わせたシミュレーション法を開発し実装する必要がある。そして、実装には煩雑な計算が必要である。例えば変位法に基づく Total Lagrange 法ベースの一般的な幾何学非線形有限要素法の定式化では、まず所望の形状関数 \mathbf{N} を定義したあとで、 \mathbf{B} マトリクスや変形勾配テンソル \mathbf{F} を計算する。次に、 \mathbf{F} の関数として定義された材料モデルから、第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ を算出する。最後に、内力ベクトル \mathbf{Q} を計算する。また、Newton-Raphson 法を用いた陰的解法を採用した場合、 $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ と整合する整合接線剛性マトリクス \mathbb{C} を算出した後に、要素剛性マトリクス \mathbf{K} を計算する。そして各計算過程では、ベクトル・行列の大きさや配列の順序を適宜並べ変えなければならない。

要素や材料モデルの実装に伴う微分計算の煩雑さを改善するため、数値微分を利用した \mathbb{C} の計算手法が多く提案されている。例えば Miehe らは、 \mathbf{F} から $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ を計算するプログラムを利用して、数値微分法の 1 つである Forward Difference (FD) 法を用いて \mathbb{C} を算出する方法を提案している (Miehe, 1996)。しかし、FD 法は変動量の設定による打ち切り誤差や丸め誤差の混入が避けられない。そこで、Tanaka らはもう 1 つの数値微分法である Complex step derivative approximation (CSDA) 法に注目し、これを $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ から \mathbb{C} を算出する方法へ応用した (Tanaka et al., 2014)。CSDA 法は丸め誤差が発生しないため、変動量に充分小さい値さえ設定しておけば、常に解析解と同等の精度で \mathbb{C} を算出可能である。さらに Tanaka らは高精度な数値 1 階・2 階微分演算が可能な Hyper-dual Step Derivative (HDS) 法 (Clifford, 1873; Fike, 2013) に注目して、ひずみエネルギー密度関数 $W(\mathbf{F})$ から、 $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ と \mathbb{C} の両方を算出する方法を提案した (Tanaka et al., 2015)。この計算方法は、スカラー値である $W(\mathbf{F})$ から 2 階の $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ と 4 階の \mathbb{C} の両者を数値計算によって自動的に算出するものであり、前述の実装に伴う煩雑な作業を大幅に削減する。また、解析解に基づく実装法と同等の計算結果と収束性能が保証される。

以上の研究は、材料モデルの実装に特化したものであり、要素の開発の立場から考えた場合、これらの計算手法は \mathbf{F} から $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ や \mathbb{C} の計算の効率化を図っているに過ぎない。そこで Lee らは、FD 法を用いて \mathbf{K} を算出する方法を提案している (Lee and Park, 2002)。この計算方法は、 \mathbf{Q} を計算するプログラムさえ用意すれば、自動的に \mathbf{K} が算出され、プログラムの実装に掛かる煩雑な作業を大幅に削減する。しかし、 \mathbf{Q} の算出のためには \mathbf{B} マトリクスと $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ の計算プログラムが要求される。さらに変動量の設定値により \mathbf{K} の算出精度が変動する問題が残されている。

そこで本章では、幾何学非線形問題を対象として、高精度な数値 1 階・2 階微分演

算手法である HDSO 法を用いて有限要素の定式化を行うことにより, 簡易的に要素を組み込める実装スキームの開発を行った. 今回は, Total Lagrange 法ベースの変位法に基づく定式化の例を示し, 微圧縮型の超弾性体に焦点を絞り解説する. 本章では, 本提案手法の有効性を確認するため, 3 種類の 3 次元ソリッド要素 (4 節点四面体要素, 8 節点六面体要素, 20 節点六面体要素) を用いて基本的な変形解析を従来法と本法により実施し, 両者を比較検討した.

3.2 ひずみエネルギーに基づく幾何学非線形有限要素法の定式化

本節ではまず, 3.2.1 項で従来の非線形有限要素法の実装方法についてまとめる. 3.2.2 項で HDSO 法を紹介する. そして, 3.2.3 項では HDSO 法を利用した非線形 FEM の定式化を示す.

3.2.1 幾何学非線形有限要素法の定式化 (久田, 野口, 1995)

解くべき平衡方程式を以下に示す. なお, テンソルの成分表示は直行デカルト座標系を用いるものとする.

$$\nabla_x (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_0 \mathbf{g}^* = 0 \quad (3.1)$$

ここで, ρ_0 は基準配置における質量密度, $\rho_0 \mathbf{g}^*$ は単位体積当たりの物体力である. また,

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial X_j} \mathbf{e}_j \quad (3.2)$$

であり, \mathbf{e}_j ($j=1, 2, 3$) は正規直行基底ベクトルである. また, 境界条件を,

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad (3.4)$$

とする. ここで, \mathbf{n} は基準配置の外向単位法線ベクトル, \mathbf{t} は基準配置面に作用する力である. また, 式中の[*] は外部から与えられている成分であることを示している. したがって, \mathbf{t}^* と \mathbf{g}^* は力学的境界条件, \mathbf{u}^* は幾何学的境界条件を表す.

次に時刻 0 から t までの状態量が既知であるとし, 時刻 $t' = t + \Delta t$ の状態を未知とする増分解析を想定する. また, 左上付き添え字にはその量が生じる時刻を表し, 左下付き添え字は参照配置の時刻を表すものとする. 例えば, ${}^t_0 \mathbf{A}$ は時刻 0 の配置を参照した時刻 t' における \mathbf{A} を表す. ただし, Cauchy 応力のように, その量が生じる時刻と参照した配置の時刻が一致する場合には, ${}^t \mathbf{T}$ と略記する. 以上の記法を用いると, 式(3.1)から式(3.4)に関連する仮想仕事式は次のようになる.

$$\int_V {}^t_0 \mathbf{S} : \delta {}^t_0 \mathbf{E} dV = {}^t \delta R \quad (3.5)$$

ここで,

$${}^t \delta R = \int_{S_t} {}^t_0 \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 {}^t_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (3.6)$$

である。 ${}'_0\mathbf{S}$, ${}'_0\mathbf{E}$ は時刻0の初期配置を基準とする時刻 t' の第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル, Green-Lagrange ひずみである。また, S_e は \mathbf{t}^* が負荷される基準配置上の領域であり, V は基準配置上の体積としている。また δ は後に続く量の仮想値であることを示す。なお, 式(3.6)の ${}'_0\mathbf{t}^*$ と $\rho_0 {}'_t\mathbf{g}^*$ は次の定義式より与えられる。

$${}'_0\mathbf{t}^* := \frac{d {}'_t s}{dS} {}'_t\mathbf{t}^* \quad (3.7)$$

$$\rho_0 {}'_t\mathbf{g}^* := \frac{d {}'_t v}{dV} {}'_t\rho {}'_t\mathbf{g}^* \quad (3.8)$$

ここで, s , v はそれぞれ現配置における表面積と体積である。上記の非線形問題を離散化して Newton-Raphson 法により節点変位ベクトル \mathbf{U} に関して解くことを考える。すると一般に,

$$\begin{cases} {}'_0\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}'_t\mathbf{P} - {}'_0\mathbf{Q}^{(i-1)} \\ {}'_t\mathbf{U}^{(i)} = {}'_t\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$({}'_0\mathbf{K}^{(0)} = {}'_0\mathbf{K}, {}'_0\mathbf{Q}^{(0)} = {}'_0\mathbf{Q}, {}'_0\mathbf{U}^{(0)} = {}'_0\mathbf{U})$$

を得る。ここで, 右上付きの (i) は Newton-Raphson 法における繰り返し演算数, \mathbf{U} は全ての節点についての全変位成分を適当に並べた節点変位ベクトルである。また, ${}'_0\mathbf{K}$, ${}'_0\mathbf{Q}$, ${}'_t\mathbf{P}$ はそれぞれ下式のような要素剛性マトリクス, 内力ベクトル, 外力ベクトルである。

$${}'_0\mathbf{K} = {}'_0\mathbf{K}_L + {}'_0\mathbf{K}_{NL} \quad (3.10)$$

$${}'_0\mathbf{K}_L = \sum_e \int_{V_e} ({}'_t\mathbf{B}_{L0} + {}'_t\mathbf{B}_{L1})^T {}'_t\bar{\mathbf{D}} ({}'_t\mathbf{B}_{L0} + {}'_t\mathbf{B}_{L1}) dV_e \quad (3.11)$$

$${}'_0\mathbf{K}_{NL} = \sum_e \int_{V_e} {}'_t\mathbf{B}_{NL}^T {}'_t\hat{\mathbf{S}} {}'_t\mathbf{B}_{NL} dV_e \quad (3.12)$$

$${}'_0\mathbf{Q} = \sum_e \int_{V_e} ({}'_t\mathbf{B}_{L0} + {}'_t\mathbf{B}_{L1})^T {}'_t\hat{\mathbf{G}} \boldsymbol{u} r_e \quad (3.13)$$

$${}'_t\mathbf{P} = \sum_e \int_{S_e} \mathbf{N}^T {}'_t\mathbf{t}^* dS_e + \sum_e \int_{V_e} \rho_0 \mathbf{N}^T {}'_t\mathbf{g}^* dV_e \quad (3.14)$$

ここで, S_e と V_e は要素表面と領域, \mathbf{N} は形状関数, Σ は要素から構造全体への重ね合わせである。また, ${}'_0\mathbf{K}_L$ は初期変位マトリクス (initial displacement matrix), ${}'_0\mathbf{K}_{NL}$ は初期応力マトリクス (initial stress matrix) である。なお, ${}'_t\hat{\mathbf{G}}$ は ${}'_0\mathbf{S}$ のベクトル表記であり, ${}'_t\hat{\mathbf{S}}$ は ${}'_0\mathbf{S}$ を, ${}'_t\bar{\mathbf{D}}$ は ${}'_0\mathbf{C}$ をそれぞれマトリクス表示したものであり, 次式のように定義される。

$${}'_t\hat{\mathbf{G}} = \{ {}'_0\boldsymbol{u}_{11} \quad {}'_0S_{22} \quad {}'_0S_{33} \quad {}'_0S_{12} \quad {}'_0S_{23} \quad {}'_0S_{31} \} \quad (3.15)$$

$${}^i_0\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} \\ {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} \\ {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} \\ {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} \\ {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} \\ {}^i_0\mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$${}^i_0\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^i_0S_{11}\mathbf{I} & {}^i_0S_{12}\mathbf{I} & {}^i_0S_{13}\mathbf{I} \\ {}^i_0S_{21}\mathbf{I} & {}^i_0S_{22}\mathbf{I} & {}^i_0S_{23}\mathbf{I} \\ {}^i_0S_{31}\mathbf{I} & {}^i_0S_{32}\mathbf{I} & {}^i_0S_{33}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

なお,

$${}^i_0\mathbf{C} = \sum_{L=0}^{m-1} {}^i_0\mathbf{B}_L \mathbf{E}_L \quad (3.18)$$

である. また, 式(3.11)から式(3.13)中の ${}^i_0\mathbf{B}_L = {}^i_0\mathbf{B}_{L0} + {}^i_0\mathbf{B}_{L1}$ は節点速度 (もしくは節点変位変分) と $\delta^i_0\mathbf{r}$ (もしくは $\delta^i_0\mathbf{E}_L$) を要素ごとに関連付けるマトリクス, ${}^i_0\mathbf{B}_{L1}$ は節点速度 (もしくは節点変位変分) と $\delta^i_0\mathbf{r}$ (もしくは $\delta^i_0\mathbf{E}_L$) を要素ごとに関連付けるマトリクスである. 要素内の任意の位置の変位は, 節点変位からの内挿により次のようになる.

$$\mathbf{u} = N^n \mathbf{U}^n \quad (3.19)$$

ここで n に対して 1 から m まで総和規約に従うものとする. なお, m は要素を構成する節点の数である. また, N^n はある要素の n 番目節点における形状関数である. 以上の定義より,

$${}^i_0\mathbf{B}_{L0}^n = \begin{bmatrix} \partial N^n / \partial X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N^n / \partial X_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N^n / \partial X_3 \\ \partial N^n / \partial X_2 & \partial N^n / \partial X_1 & 0 \\ 0 & \partial N^n / \partial X_3 & \partial N^n / \partial X_2 \\ \partial N^n / \partial X_3 & 0 & \partial N^n / \partial X_1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$${}^t\mathbf{B}_{L1}^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial' u_1}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} & \frac{\partial' u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} & \frac{\partial' u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} \\ \frac{\partial' u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & \frac{\partial' u_2}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & \frac{\partial' u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} \\ \frac{\partial' u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} & \frac{\partial' u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} & \frac{\partial' u_3}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} \\ \frac{\partial' u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} + \frac{\partial' u_1}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & \frac{\partial' u_2}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} + \frac{\partial' u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & \frac{\partial' u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} + \frac{\partial' u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} \\ \frac{\partial' u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} + \frac{\partial' u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & \frac{\partial' u_2}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} + \frac{\partial' u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & \frac{\partial' u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} + \frac{\partial' u_3}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_2} \\ \frac{\partial' u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} + \frac{\partial' u_1}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} & \frac{\partial' u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} + \frac{\partial' u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} & \frac{\partial' u_3}{\partial X_3} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} + \frac{\partial' u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^n}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

である。また、式(3.12)に対応して、

$$({}^t\mathbf{B}_{NL}^n)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^n}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

である。

3.2.2 HDSB による高精度な数値 1 階・2 階微分

本項では数値微分法について簡単にまとめる。まず、関数 $f(x+h)$ を x の周りで Taylor 展開すると次式を得る。

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) \cdots \quad (3.23)$$

ここで、FD 法と Central difference (CD) 法により $f'(x)$ と $f''(x)$ を算出することを考える。式(3.23)の変動量 h を微小に設定したと仮定すれば、次式を得る。

$$f'_{FD}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (3.24)$$

$$f'_{CD}(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (3.25)$$

$$f''_{CD}(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + O(h) \quad (3.26)$$

ここで、 $O(h)$ は Landau's symbol である。式(3.24)～式(3.26)では、 h を大きくすると Taylor 展開の高次項を省略したことによる打ち切り誤差の影響が大きくなる。また、小さくするほど理論上は計算精度が良くなるが、実際の計算機上では有効桁数が決まっ

ているため、 h を小さくし過ぎると丸め誤差の影響が大きくなる。つまり、この方法では最適な h を使用しなければ計算精度が低下する。そして、その値は非微分関数によって異なる場合もあるため、適宜最適な h を確認する必要がある。

この FD 法や CD 法による数値微分の問題を克服する方法として、CSDA 法による数値微分法がある (Lyness, 1968)。CSDA 法では変動量 h を虚軸 (i) 方向にとった Taylor 展開に基づくものである。今回の例題の場合、式(3.23)は次のように書ける。

$$f(x+ih) = f(x) + ihf'(x) - \frac{h^2}{2!} f''(x) - i \frac{h^3}{3!} f'''(x) \dots \quad (3.27)$$

すると、1 階微分は次のように書ける。

$$f'_{\text{CSDA}}(x) = \frac{\Im[f(x+ih)]}{h} + O(h^2) \quad (3.28)$$

ここで、 \Im は虚部の係数を取り出す演算子である。式(3.28)の演算には、式(3.24)とは異なり、差分商近似が現れない。すなわち、丸め誤差の影響がないことから変動量 h を小さく設定しさえすれば解析解と同等の計算精度が保証される (例えば $h=10^{-100}$ など)。しかしこのような特徴を有する計算は 1 階微分のみで有効であり、2 階微分以上の階数に対しては、差分商近似による演算が避けられない。

より性能の良い微分演算を達成する目的で dual numbers が開発された。この演算では、CSDA と同様に、非実数軸方向に $\varepsilon^2 = 0$ なる元 ε を定義したものである。これを用いると、式(3.23)は次のように書ける。

$$f(x+\varepsilon h) = f(x) + \varepsilon h f'(x) \quad (3.29)$$

すると、1 階微分は次のように書ける。

$$f'_{\text{DN}}(x) = \frac{\Im[f(x+\varepsilon h)]}{\varepsilon} \quad (3.30)$$

ここで、 \Im_ε は dual numbers の非実数部 ε の係数を取り出す演算子である。式(3.30)の演算には、丸め誤差と打ち切り誤差の両方が現れない。すなわち、変動量 h の設定値によらず、式(3.30)により任意の有効数字桁内において解析解と同じ精度で結果が得られる。ただし、この計算方法でも、2 階微分以上の演算に対しては差分商近似による演算が避けられない。そこで、以上の問題点を克服する方法として、Fike らは HDSD 法を提案した (Fike, 2013)。この方法ではまず、次式のように定義された 2 つの非実数軸の元 ε_1 と ε_2 を考える。

$$\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 0, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 \quad (3.31)$$

そして式(3.23)の変動量 h を $h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2$ に置き換えると次式を得る。

$$f(x+h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2) = f(x) + (h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2) f'(x) + h_1 h_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 f''(x) \quad (3.32)$$

上式は、Taylor 展開の h^3 以上の高次項は ε_1^2 もしくは ε_2^2 の項が含まれるため 0 となる。

これにより、 $f(x)$ と $f'(x)$ は次式で算出できる。

$$f'_{\text{HDSD}}(x) = \frac{\Im_{\varepsilon_1}[f(x+h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2)]}{h_1} = \frac{\Im_{\varepsilon_2}[f(x+h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2)]}{h_2} \quad (3.33)$$

$$f''_{\text{HSDS}}(x) = \frac{\mathfrak{I}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} [f(x+h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2)]}{h_1 h_2} \quad (3.34)$$

ここで、 $\mathfrak{I}_{\varepsilon_1}$ は ε_1 の係数を取り出す演算子、同様に $\mathfrak{I}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ は $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ の係数を取り出す演算子としている。式(3.33)や式(3.34)を見ればわかるように、HSDS法では $f(x)$ と $f'(x)$ の計算に差分商近似が含まれない。さらに高次項も完全に消滅することから、変動量の値に依存しない微分値が得られる。なお、HSDS法の演算を計算機で実現するためには、各種の演算規則をプログラミングにより組み込む必要がある。例えば Fortran を用いる場合には、演算子多重定義が可能なモジュール機能を利用するのが便利である。具体的な実装方法の一例は、参考文献 (Tanaka et al., 2015) の付録に記載されているので参照されたい。

3.2.3 数値微分法による非線形有限要素法の定式化

本項では、HSDS法を利用した非線形有限要素法の定式化を提案する。また合わせて比較検討のため、一般的な数値微分による計算についても記すこととする。まず(a)項で基礎となる停留ポテンシャルエネルギーの原理について整理する。続いて(b)項では、数値微分法 (FD法とHSDS法) の内力ベクトルへの適用方法をまとめる。続く(c)項では、数値微分法 (FD法とHSDS法) の要素剛性マトリクスへの適用方法をまとめる。以上を基にして(d)項では、HSDS法による内力ベクトルと要素剛性マトリクスを算出する計算方法についてまとめる。さらにHSDS法による定式化と通常非線形有限要素法の定式化の違いについて整理する。なお外力ベクトル \mathbf{P} は、2.1節より形状関数 \mathbf{N} が決められた時点で直ちに計算できるため、ここでは問題にしないものとする。

(a) 停留ポテンシャルエネルギーの原理

停留ポテンシャルエネルギーの原理について整理するため、本論文では参考文献 (久田, 野口, 1995) を基に記述を展開している。本論文では材料構成則として超弾性モデルを考える。このとき、応力は次式のように計算される。

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (3.35)$$

また、式(3.35)より式(3.5)の左辺は

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} dV = \delta \int_V W dV \quad (3.36)$$

となり、式(3.36)と式(3.6)を用いると、式(3.5)は次のように書くことができる。

$$\delta \int_V W dV = \int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (3.37)$$

ここで外力についてもポテンシャル R , G が存在するものとして、

$$t^*_i = -\frac{\partial R}{\partial u_i} \quad (3.38)$$

$$\rho_0 \mathbf{g}^*_i = -\frac{\partial G}{\partial u_i} \quad (3.39)$$

と与えられるとすると、次式を得る.

$$\delta\Phi = 0 \quad (3.40)$$

ただし,

$$\Phi = \int_V (W + Q) dV + \int_{S_t} R dS \quad (3.41)$$

である. ここで, Φ は系の全ポテンシャルエネルギーである. すなわち, 物体内 V で Green-Lagrange ひずみ \mathbf{E} および, 表面 S_u 上で $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ を付帯条件とする任意の微小変分 $\delta\mathbf{E}$ および $\delta\mathbf{u}$ に対して, 平衡状態にある全ポテンシャルエネルギー Φ は停留する.

次に, 外力のポテンシャルが,

$$R = -\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} \quad (3.42)$$

$$G = -\rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{u} \quad (3.43)$$

と与えられる場合を想定する. そして, 平衡状態にある Φ に任意である変分 $\delta\mathbf{u}$ を与えた物体 Φ' より $\Phi' - \Phi$ を計算すると次式を得る.

$$\Phi' - \Phi = \delta \int_V \{W(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}) - W(\mathbf{E})\} dV - \int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS - \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV \quad (3.44)$$

ここで,

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \right\} \quad (3.45)$$

である. 次に, 式(3.44)の $W(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E})$ を \mathbf{E} の周りで Taylor 展開すると

$$W(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}) = W(\mathbf{E}) + \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \delta E_{ij} \delta E_{kl} + \dots \quad (3.46)$$

となり, 式(3.46)を式(3.44)に代入すれば次式を得る.

$$\begin{aligned} \Phi' - \Phi = \int_V \left\{ \left(W(\mathbf{E}) + \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \delta E_{ij} \delta E_{kl} + \dots \right) \right. \\ \left. - \left(\int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (3.47)$$

ここで, 式(3.37)を用いれば, 式(3.47)は次のようになる.

$$\Phi' - \Phi = \int_V \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \delta E_{ij} \delta E_{kl} + \dots \right) \dots \quad (3.48)$$

ここで, δE_{ij} , δE_{kl} が微小の場合, 高次項が無視される. また, 式(3.48)中の $\frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}}$ が正定値関数 (任意の $\delta E_{ij} \delta E_{kl}$ をかけて正となる関数) であれば,

$$\Phi' - \Phi > 0 \quad (3.49)$$

となる. すなわち, 平衡点の近傍に限り局所的に最小となる.

(b) 数値微分法による内力ベクトルの定式化

停留ポテンシャルエネルギーの式(3.40)を基にして，FD 法による内力ベクトルを算出することを考えた．3.2.3(a)項における変分を $h\delta\mathbf{u}$ とする．ここで， h は数値微分の変動量であり，微小であるとする．すると 3.2.3(a)項にならって， $h\delta\mathbf{u}$ を与えた物体 Φ' より $\Phi'-\Phi$ を計算すると次式を得る．

$$\Phi'-\Phi = \int_V \{W(\mathbf{E}+h\delta\mathbf{E})-W(\mathbf{E})\} dV - h \int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS - h \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV \quad (3.50)$$

ここで，式(3.50)の $W(\mathbf{E}+h\delta\mathbf{E})$ を \mathbf{E} の周りで Taylor 展開すると

$$W(\mathbf{E}+h\delta\mathbf{E}) = W(\mathbf{E}) + h \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} + h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \delta E_{ij} \delta E_{kl} + \dots \quad (3.51)$$

となる． h が微小であることを考慮すると高次項を無視できるため，次式を得る．

$$\begin{aligned} \Phi'-\Phi &= \int_V \left\{ \left(W(\mathbf{E}) + h \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} + h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \delta E_{ij} \delta E_{kl} + \dots \right) \right\} dV \\ &\quad - h \left(\int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV \right) \\ &\approx \int_V \left\{ h \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} + h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \delta E_{ij} \delta E_{kl} \right\} dV - h \left(\int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV \right) \\ &= h^2 \delta^2 \Phi \end{aligned} \quad (3.52)$$

式(3.50)と式(3.52)より，次式が成立する．

$$\frac{1}{h} \left(\int_V W(\mathbf{E}+h\delta\mathbf{E}) dV - \int_V W(\mathbf{E}) dV \right) + O(h) \approx \int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta\mathbf{u} dV \quad (3.53)$$

ここで 3.2.1 節を参照すると，左辺は内力ベクトルに相当していることがわかる．以上を離散化して整理すると次式を得る．

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q} = \frac{1}{h} \left(\int_V W(\mathbf{U}+h\delta\mathbf{U}) dV - \int_V W(\mathbf{U}) dV \right) + O(h) \quad (3.54)$$

また変分は任意であったことを考慮して，次のように設定するものとする．

$$\delta \mathbf{U} := \underline{\mathbf{U}}^i \quad (3.55)$$

ここで， $\underline{\mathbf{U}}^i$ は i 行目のみ 1 で，その他の行には 0 の値を持つベクトルである．これにより，最終的に内力ベクトル \mathbf{Q} は近似的に次式のように得られる．

$$Q_i = \frac{1}{h} \left(\int_V W(\mathbf{U}+h\underline{\mathbf{U}}^i) dV - \int_V W(\mathbf{U}) dV \right) + O(h) \quad (3.56)$$

次に，HDS法による内力ベクトルの算出方法を示す．まず，平衡状態にある Φ に HDS法の実数軸上にある任意である変分 $h\varepsilon_1 \delta\mathbf{u}$ を与えた物体 Φ' より $\Phi'-\Phi$ を計算すると次式を得る．

$$\Phi' - \Phi = \delta \int_V \{W(\mathbf{E} + h\varepsilon_1 \delta \mathbf{E}) - W(\mathbf{E})\} dV - h \int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \varepsilon_1 \delta \mathbf{u} dS - h \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \varepsilon_1 \delta \mathbf{u} dV \quad (3.57)$$

ここで、式(3.57)中の $W(\mathbf{E} + h\varepsilon_1 \delta \mathbf{E})$ を \mathbf{E} の周りで Taylor 展開すると、

$$W(\mathbf{E} + h\varepsilon_1 \delta \mathbf{E}) = W(\mathbf{E}) + \varepsilon_1 h \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \quad (3.58)$$

となる。ここで、式(3.58)では dual-numbers の元が $\varepsilon_1^2 = 0$ となるため、高次項は消滅する。したがって、式(3.57)を整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \Phi' - \Phi &= \int_V \left\{ \left(W(\mathbf{E}) + h\varepsilon_1 \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \right) - W(\mathbf{E}) \right\} dV - h\varepsilon_1 \left(\int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) \\ &= h\varepsilon_1 \int_V \left\{ \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \right\} dV - h\varepsilon_1 \left(\int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot \delta \mathbf{u} dV \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

つまり、HDSO 法による演算では、式(3.59)の演算は厳密に 0 となる。また、式(3.57)と式(3.59)より次式が成立する。

$$\mathfrak{I}_{\varepsilon_1} \left[\int_V W(\mathbf{E} + h\varepsilon_1 \delta \mathbf{E}) dV \right] = \mathfrak{I}_{\varepsilon_1} \left[\left(\int_{S_t} \mathbf{t}^* \cdot h\varepsilon_1 \delta \mathbf{u} dS + \int_V \rho_0 \mathbf{g}^* \cdot h\varepsilon_1 \delta \mathbf{u} dV \right) \right] \quad (3.60)$$

HDSO 法による演算では、FD 法の場合とは異なり、厳密に両辺が一致している。さらに 3.2.1 項を参照すると、左辺は内力ベクトルに相当している。以上を離散化して整理すると次式を得る。

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q} = \frac{1}{h} \mathfrak{I}_{\varepsilon_1} \left[\int_V W(\mathbf{U} + h\varepsilon_1 \delta \mathbf{U}) dV \right] \quad (3.61)$$

したがって、FD 法と同様の手順により、最終的に内力ベクトル Q_i の成分は次式により抽出できる。

$$Q_i = \frac{1}{h} \mathfrak{I}_{\varepsilon_1} \left[\int_V W(\mathbf{U} + h\varepsilon_1 \underline{\mathbf{U}}^i) dV \right] \quad (3.62)$$

(c) 数値微分法による要素剛性マトリクスの定式化

一般に有限要素解析のための離散化後において、要素剛性マトリクスは次式で定義される (久田, 野口, 1995)。

$$K_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} \quad (3.63)$$

FD 法による要素剛性マトリクスの算出は、例えば Lee と Park の研究 (Lee and Park, 2002) が挙げられる。これによると、式(3.63)は次のように書くことができる。

$$K_{ij} = \frac{1}{h} \left[Q_i(\mathbf{U} + h\underline{\mathbf{U}}^j) - Q_i(\mathbf{U}) \right] + O(h) \quad (3.64)$$

この式により、解析解の導出が煩雑な要素剛性マトリクスを算出することなく、内力ベクトルの差分商近似により要素剛性マトリクスが得られる。

HDSO 法による要素剛性マトリクスの算出は、式(3.64)を基にして $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$ の \mathbf{U} に対して非実数方向に変動 $\varepsilon_1 \underline{\mathbf{U}}^i$ を与える。すると、要素剛性マトリクスは次式より得られる。

$$K_{ij} = \frac{1}{h} \mathfrak{S}_{\varepsilon_1} [Q_i(\mathbf{U} + h\varepsilon_1 \underline{\mathbf{U}}^i)] \quad (3.65)$$

こちらの場合でも解析解の導出が煩雑な要素剛性マトリクスを算出することなく、要素剛性マトリクスが得られる。さらに特筆すべきは、打切り誤差および丸め誤差の混入が生じないことである。

(d) HDSO 法による有限要素定式化のまとめ

本論文で提案する HDSO 法による有限要素定式化の計算方法をまとめる。また比較検討のため、一般的な数値微分である CD 法による計算方法についても提示する。なお、3.2.3(a)~(c)項の計算は全て FD 法による展開を示しているが、2 階微分を必要とする今回の問題では、CD 法の方が精度の良い解析が可能であると判断したため、CD 法を採用することとした。

CD 法による内力ベクトルと要素剛性マトリクスの計算方法は、2 変数関数の Taylor 展開を用いることで以下の式で計算できる。

$$Q_i^{\text{CD}} \approx \frac{1}{2h_1} \left[\int_V W(\mathbf{U} + h_1 \underline{\mathbf{U}}^i) dV - \int_V W(\mathbf{U} - h_1 \underline{\mathbf{U}}^i) dV \right] \quad (3.66)$$

$$K_{ij}^{\text{CD}} \approx \frac{1}{2h_1 h_2} \left[\int_V W(\mathbf{U} + h_1 \underline{\mathbf{U}}^i + h_2 \underline{\mathbf{U}}^j) dV + \int_V W(\mathbf{U} - h_1 \underline{\mathbf{U}}^i - h_2 \underline{\mathbf{U}}^j) dV - 2 \int_V W(\mathbf{U}) dV - K_1^i - K_2^j \right] \quad (3.67)$$

ここで、

$$K_1^i = \left[\int_V W(\mathbf{U} + h_1 \underline{\mathbf{U}}^i) dV + \int_V W(\mathbf{U} - h_1 \underline{\mathbf{U}}^i) dV - 2 \int_V W(\mathbf{U}) dV \right] \quad (3.68)$$

$$K_2^j = \left[\int_V W(\mathbf{U} + h_2 \underline{\mathbf{U}}^j) dV + \int_V W(\mathbf{U} - h_2 \underline{\mathbf{U}}^j) dV - 2 \int_V W(\mathbf{U}) dV \right] \quad (3.69)$$

である。

一方、HDSO 法による計算は式(3.62)と式(3.65)より次式となる。

$$Q_i^{\text{HDSO}} = \frac{1}{h_1} \mathfrak{S}_{\varepsilon_1} \left[\int_V W(\mathbf{U} + h_1 \varepsilon_1 \underline{\mathbf{U}}^i) dV \right] \quad (3.70)$$

$$K_{ij}^{\text{HDSO}} = \frac{1}{h_1 h_2} \mathfrak{S}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[\int_V W(\mathbf{U} + h_1 \varepsilon_1 \underline{\mathbf{U}}^i + h_2 \varepsilon_2 \underline{\mathbf{U}}^j) dV \right] \quad (3.71)$$

つまり本法による計算では、節点変位から各要素のひずみエネルギーを計算するプログラムさえ用意すれば、内力ベクトル \mathbf{Q} と要素剛性マトリクス \mathbf{K} の両方を自動的に算出することが可能となる。さらに HDSO 法の演算は打切り誤差と丸め誤差の混入がないため、数値微分法でありながら有効桁数をもつ浮動小数点表記においても、 \mathbf{Q} と \mathbf{K} の解析解を用いた従来法と同等の結果が得られる。

最後に、本法と従来法による定式化の違いについてまとめる。図 3.1 は、要素単位（もしくは積分点単位）で \mathbf{Q} と \mathbf{K} を算出するのに必要な基本情報を取り出した図である。図 3.1a より、従来法では要素内の変位ベクトル \mathbf{U} および形状関数 \mathbf{N} から変形

勾配テンソル \mathbf{F} を算出し、さらに \mathbf{B}_{L0} , \mathbf{B}_{L1} および \mathbf{B}_{NL} を算出、そして \mathbf{C} および \mathbf{S} を算出したのちに \mathbf{Q} と \mathbf{K} が得られる。一方、本法では図 3.1b に示すように、節点変位から変形勾配テンソル \mathbf{F} を計算し、これを基にひずみエネルギーを算出するプログラムを作成しさえすればよい。式(3.70)と(3.71)より、ひずみエネルギーの算出プログラムを利用することで \mathbf{Q} と \mathbf{K} が自動的に算出される。

以上のことをまとめれば、本法は \mathbf{B}_L , \mathbf{B}_{NL} , \mathbf{C} , \mathbf{S} などの解析解の導出やその実装の作業を削減することが可能となる。また本法はスカラー値であるひずみエネルギーのみを実装しさえすればよい。このため、従来で煩雑となる各計算過程におけるベクトル・行列の大きさや配列の順列の並べ替えの煩雑さの多くを削減できる。以上より、非線形有限要素における要素開発の簡略化が可能となる。

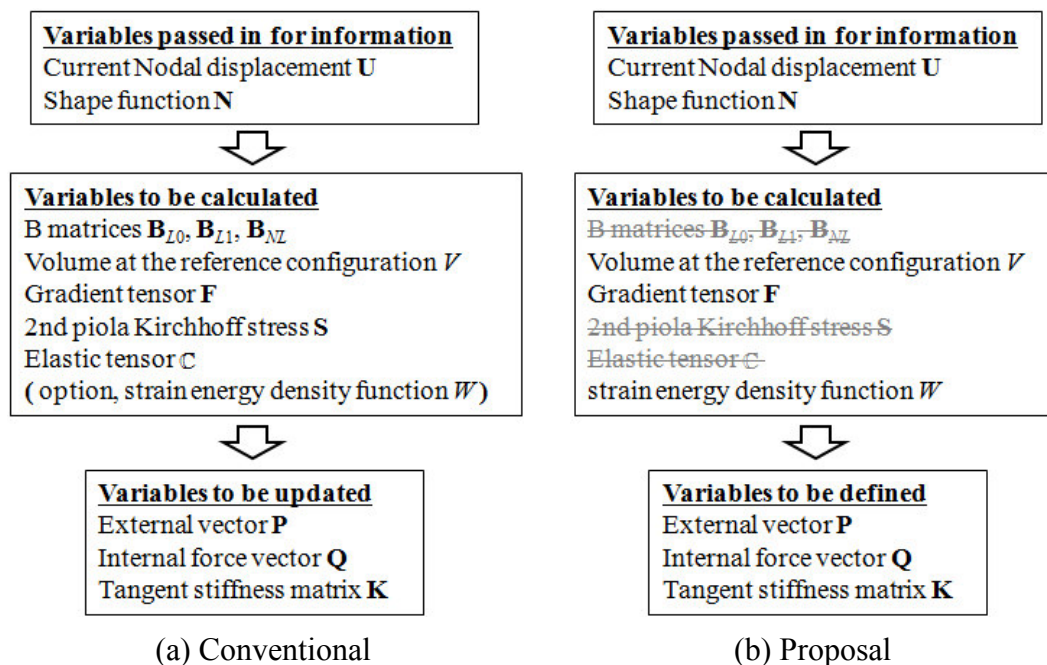


Fig.3.1 Nonlinear FEM implementation scheme at each integration point by (a) conventional and (b) proposed method.

3.3 本法の性能評価

本数値微分法の有効性を 3 種類の例題に適用して検証する. 3.3.1 項では, 3 次元 4 節点四面体要素を用いて立方体試験片の単軸引張り解析を行った結果を示す. 3.3.2 項では, 3 次元 8 節点六面体要素を用いて立方体試験片のせん断解析を行った結果を示す. 最後の 3.3.3 項では, 3 次元 20 節点六面体要素を用いて長方形試験片の片持ち梁の曲げ解析を行った結果を示す.

それぞれの例題における材料構成則には, 超弾性構成則の一つである Neo-Hookean モデルを採用する.

$$W = c_1 (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D} (J - 1)^2 \quad (3.72)$$

ここで, c_1 と D は材料定数であり, それぞれ $c_1=50.0, D=0.001$ とする. なお, ここでの材料定数には特別な意味はないため, 無次元量としている.

各例題では, 本法と CD 法における変形解析の精度を検証する目的で次の式(3.73)と式(3.74)を用いる.

$$\text{error} = \frac{1}{3N_n} \sum_i^{3N_n} \sqrt{(U_i^{\text{ana}} - U_i^{\text{CD}})^2} \quad (3.73)$$

$$\text{error} = \frac{1}{3N_n} \sum_i^{3N_n} \sqrt{(U_i^{\text{ana}} - U_i^{\text{HDSD}})^2} \quad (3.74)$$

ここで, U^{ana} は内力ベクトルと要素剛性マトリクスを解析解で実装した FEM より得られる結果, U^{CD} と U^{HDSD} はそれぞれ内力ベクトルと要素剛性マトリクスを CD 法, HDSD 法で実装した結果, N_n は総節点数である. また要素剛性マトリクスの計算精度についてはそれぞれの例題における収束性能で評価する.

3.3.1 単軸引張り解析 (3 次元 4 節点四面体要素)

図 3.2a に示すような立方体 (1×1×1) の単軸引張り解析を 3 次元 4 節点四面体要素により計算した結果について検討する. 境界条件として, 図 3.2a の頂点番号 1,4,5,8 の x 方向変位, 頂点番号 1,2,5,6 の y 方向変位, 頂点番号 5,6,7,8 の z 方向変位をそれぞれ拘束するものとする. そして頂点番号 2,3,6,7 に様な変形になるようにかつ合計 120 となる引張り荷重を負荷するものとした. 図 3.2b には有限要素モデルを示す. 今回は節点数 9, 要素数 12 のメッシュとした. また, 解析は全 5 インクリメントで行った.

図 3.3 には, 解析解と本法の解析結果における最終インクリメント時の変形状態を示す. また, 表 3.1 には CD 法と HDSD 法の変形解析結果の精度を検証するため, 式 (3.73) と式 (3.74) の結果を示す. 表 3.2 にはそれぞれの計算方法における収束性能を示す. 表 3.1a より, CD 法における変形解析の算出精度は変動量 h_1 の設定値に依存している. つまり, CD 法では数値微分における打ち切り誤差と丸め誤差が混入するため, 適切な h_1 の値を探し出さなければならない. 一方, 図 3.3 と表 3.1b より HDSD 法による本法では変動量の設定する値によらず, 計算結果は解析解のものと一致している. また, 表 3.2 より, CD 法における収束性能は, 変動量 h_1, h_2 の設定値により大きく異なる. その設定値を誤れば収束解を得ることができない. 一方, 本法は収束性能も

変動量に依存しておらず、常に解析解と同等の収束性能であることが確認できる。

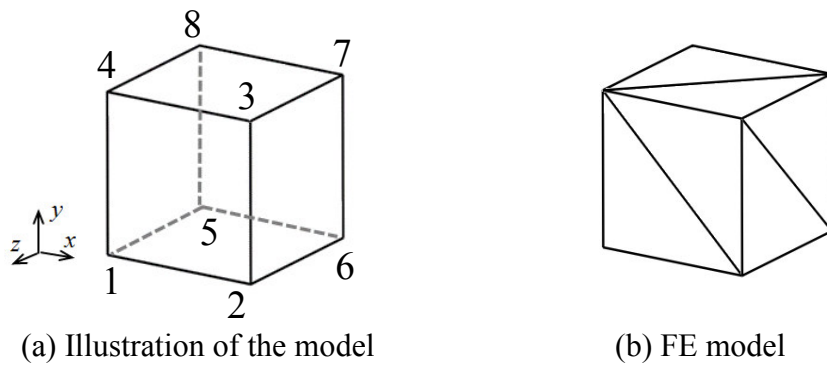


Fig.3.2 Initial configuration for the uniaxial tensile test

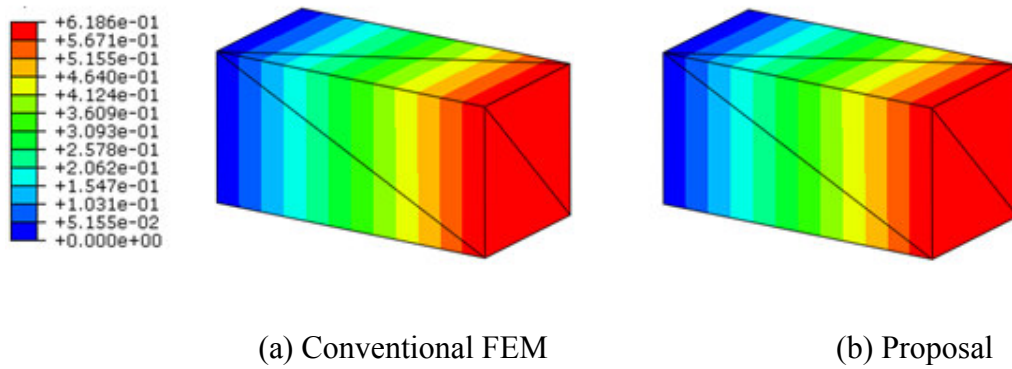


Fig.3.3 Displacement distribution results of the uniaxial tensile test for the 5th load step

Table 3.1 Deformation error calculated by Equations (3.73) and (3.74) of the uniaxial tensile test resulting from the different approaches to calculate the internal forces and element stiffness matrices. The choice of the perturbation values in the CD influences on the displacement accuracy. The HDSO yields a quite accurate displacement values under all perturbation value selected.

(a) CD for the 5th load step

		h_2						
CD	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}	
h_1	10^{-1}	failed	9.1×10^{-4}	9.1×10^{-4}	9.1×10^{-4}	9.1×10^{-4}	9.1×10^{-4}	9.1×10^{-4}
	10^{-3}	9.2×10^{-8}	9.2×10^{-8}	9.2×10^{-8}	9.2×10^{-8}	9.2×10^{-8}	9.2×10^{-8}	failed
	10^{-5}	8.0×10^{-12}	8.4×10^{-12}	9.1×10^{-12}	6.8×10^{-12}	9.4×10^{-12}	failed	failed
	10^{-7}	1.1×10^{-10}	1.1×10^{-10}	8.3×10^{-11}	1.3×10^{-10}	failed	failed	failed
	10^{-9}	failed	failed	failed	failed	failed	failed	failed

(b) HDSO for the 5th load step

		h_2						
HDSO	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}	
h_1	10^{-1}	3.9×10^{-17}	3.5×10^{-17}	4.1×10^{-17}	3.9×10^{-17}	4.6×10^{-17}	3.6×10^{-17}	3.2×10^{-17}
	10^{-3}	2.6×10^{-17}	2.9×10^{-17}	3.2×10^{-17}	4.4×10^{-17}	4.6×10^{-17}	3.4×10^{-17}	3.0×10^{-17}
	10^{-5}	5.6×10^{-17}	4.0×10^{-17}	2.6×10^{-17}	4.1×10^{-17}	3.8×10^{-17}	4.4×10^{-17}	4.3×10^{-17}
	10^{-7}	3.3×10^{-17}	4.3×10^{-17}	3.5×10^{-17}	4.6×10^{-17}	4.0×10^{-17}	4.3×10^{-17}	3.3×10^{-17}
	10^{-9}	3.3×10^{-17}	3.4×10^{-17}	2.7×10^{-17}	2.7×10^{-17}	4.2×10^{-17}	3.8×10^{-17}	3.5×10^{-17}

Table 3.2 Convergence results of the uniaxial tensile test for the 5th load step based on the CD and the HDSD. The choice of the perturbation value in CD strongly influences on the convergence behavior. The HDSD shows the excellent convergence under all perturbation value selected.

(a) Iteration numbers

CD / HDSD	h_2						
	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}
h_1 10^{-1}	failed / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	6 / 4
10^{-3}	6 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	5 / 4	failed / 4
10^{-5}	6 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	6 / 4	failed / 4	failed / 4
10^{-7}	6 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4
10^{-9}	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4

(b) Normalized residual force for the 5th load step

Conventional FEM	CD with $h_1=10^{-5}$			HDSD
	$h_2=10^{-5}$	$h_2=10^{-7}$	$h_2=10^{-8}$	
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.93×10^{-4}	1.93×10^{-4}	1.92×10^{-4}	4.93×10^{-4}	1.93×10^{-4}
7.68×10^{-11}	7.66×10^{-11}	4.87×10^{-11}	1.10×10^{-7}	7.68×10^{-11}
1.22×10^{-23}	7.86×10^{-20}	3.85×10^{-20}	6.18×10^{-11}	1.21×10^{-23}
			1.34×10^{-14}	
			6.49×10^{-19}	

3.3.2 せん断変形解析 (3次元8節点六面体要素)

図 3.4a に示すような立方体 (1×1×1) のせん断解析を 3次元 8節点六面体要素により計算した結果について検討する. 境界条件として, 図 3.4a の頂点番号 1, 2, 5, 6 の x, y, z 方向変位を拘束し, 頂点番号 3, 4, 7, 8 にそれぞれ 10 の節点荷重を x 方向に負荷するものとした. 図 3.4b には有限要素モデルを示す. 今回は節点数 8, 要素数 1 のメッシュとした. なお, 解析は全 5 インクリメントで行った.

図 3.5 には, 解析解と本法の解析結果における最終インクリメント時の変形状態を示す. また, 表 3.3 には CD 法と HDSO 法の変形解析結果の精度を検証するため, 式 (3.73) と式 (3.74) の結果を示す. 表 3.4 には各計算方法における収束性能をそれぞれ示す. 表 3.3a より, 本項の例題においても, CD 法の変形解析の算出精度は変動量 h_1 の設定値に依存して変化してしまう. 一方, 図 3.5 と表 3.3b より本法では変動量の設定する値によらず, 計算結果は解析解のものと一致している. また, 表 3.4 より, CD 法における収束性能は, 変動量 h_1, h_2 の設定値により大きく異なる. つまり, 計算結果および収束性能の両方に留意した変動量 h_1, h_2 の設定が必要になる. 一方, 本法の収束性能は変動量に依存せず, 常に解析解のものと同等の計算精度であった.

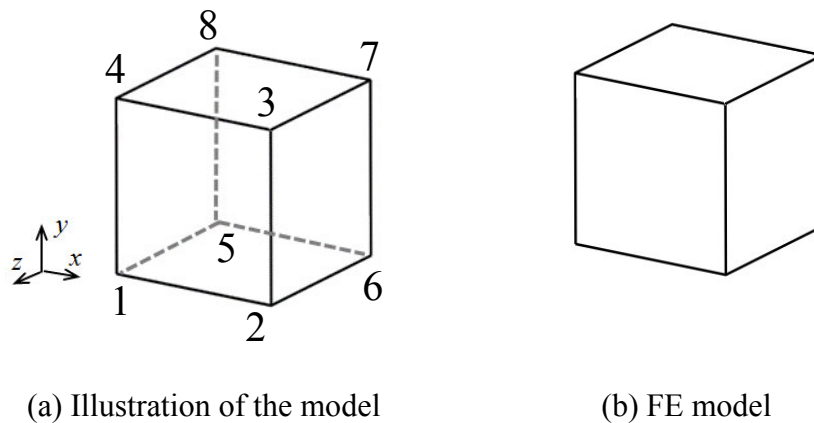


Fig.3.4 Initial configuration for the shear test.

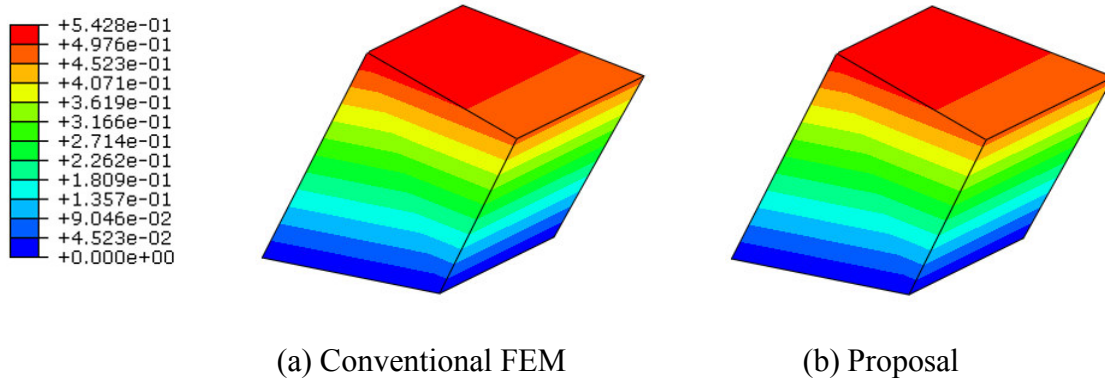


Fig.3.5 Results of displacement in x -direction for the shear test.

Table 3.3 Deformation error calculated by Equations (3.73) and (3.74) of the shear test resulting from the different approaches to calculate the internal forces and element stiffness matrices. The choice of the perturbation values in the CD influences on the displacement accuracy. The HDSD yields a quite accurate displacement values under all perturbation value selected.

(a) CD for the 5th load step

		h_2						
CD	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}	
h_1	10^{-1}	7.8×10^{-5}	7.8×10^{-5}	7.8×10^{-5}	7.8×10^{-5}	7.8×10^{-5}	7.8×10^{-5}	failed
	10^{-3}	7.9×10^{-9}	7.9×10^{-9}	7.9×10^{-9}	7.9×10^{-9}	7.9×10^{-9}	failed	failed
	10^{-5}	3.7×10^{-12}	4.7×10^{-12}	9.8×10^{-12}	4.6×10^{-12}	5.5×10^{-11}	failed	failed
	10^{-7}	3.5×10^{-10}	3.7×10^{-10}	3.1×10^{-10}	failed	failed	failed	failed
	10^{-9}	failed	failed	failed	failed	failed	failed	failed

(b) HDSD for the 5th load step

		h_2						
HDSD	10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}	
h_1	10^{-1}	2.2×10^{-16}	2.0×10^{-16}	1.7×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.2×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.2×10^{-16}
	10^{-3}	2.1×10^{-16}	2.5×10^{-16}	2.7×10^{-16}	2.3×10^{-16}	2.6×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.3×10^{-16}
	10^{-5}	2.6×10^{-16}	2.2×10^{-16}	2.2×10^{-16}	2.1×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.2×10^{-16}	2.3×10^{-16}
	10^{-7}	2.4×10^{-16}	2.5×10^{-16}	2.7×10^{-16}	2.2×10^{-16}	2.3×10^{-16}	1.9×10^{-16}	2.3×10^{-16}
	10^{-9}	2.6×10^{-16}	2.1×10^{-16}	2.2×10^{-16}	1.9×10^{-16}	2.6×10^{-16}	2.6×10^{-16}	2.5×10^{-16}

Table 3.4 Convergence of the shear test for the 5th load step based on the CD and the HDSD scheme. The choice of the perturbation value in CD strongly influences on the convergence behavior. Almost all perturbation values lead to results the failed convergence. The HDSD shows the excellent convergence under all perturbation values selected.

(a) Iteration numbers

CD / HDSD		h_2						
		10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}
h_1	10^{-1}	8 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	5 / 4	failed / 4
	10^{-3}	5 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	4 / 4	failed / 4	failed / 4
	10^{-5}	5 / 4	4 / 4	4 / 4	5 / 4	10 / 4	failed / 4	failed / 4
	10^{-7}	5 / 4	4 / 4	5 / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4
	10^{-9}	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4	failed / 4

(b) Normalized displacement norm for the 5th load step

Conventional FEM	CD with $h_1=10^{-5}$			HDSD
	$h_2=10^{-5}$	$h_2=10^{-5}$	$h_2=10^{-5}$	
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2.40×10^{-4}	2.40×10^{-4}	2.37×10^{-4}	1.46×10^{-4}	2.40×10^{-4}
5.74×10^{-10}	5.74×10^{-10}	5.98×10^{-10}	2.19×10^{-4}	5.74×10^{-10}
3.21×10^{-20}	3.42×10^{-20}	1.76×10^{-16}	5.36×10^{-8}	3.21×10^{-20}
		9.67×10^{-21}	5.16×10^{-10}	
			2.59×10^{-12}	
			2.84×10^{-13}	
			1.40×10^{-14}	
			4.40×10^{-16}	
			7.61×10^{-18}	

3.3.3 片持ち梁の解析 (3次元 20 節点六面体要素)

図 3.6a に示すような直方体 (10×1×1) の片持ち梁の曲げ解析を 3次元 20 節点六面体要素により計算した結果について検討する. 境界条件として, 図 3.6a の頂点番号 1, 4, 5, 8 の x, y, z 方向変位を拘束し, 頂点番号 3, 7 にそれぞれ 0.1 の節点荷重を y 方向に負荷するものとした. 図 3.6b には有限要素モデルを示す. 今回は節点数 104, 要素数 8 のメッシュとした. なお, 解析は全 2 インクリメントで行った.

図 3.7 には, 解析解と本法の解析結果における最終インクリメント時の変形状態を示す. また, 表 3.5 には CD 法と HDSO 法の変形解析結果の精度を検証するため, 式 (3.73) と式 (3.74) の結果を示す. 表 3.6 には各計算方法における収束性能をそれぞれ示す. 表 3.5a より, CD 法は変形解析の算出精度は変動量 h_1 の設定値に依存して変化してしまう. 一方, 図 3.7 と表 3.5b より HDSO 法による本法では変動量の設定する値によらず, 計算結果は解析解のものと一致している. また, 表 3.6 より, CD 法における収束性能は, 変動量 h_1, h_2 の設定値により大きく異なる. 特に今回の場合では収束解を得るのが困難となる結果が多く, 適切な変動量を探すのは容易でない. 一方, 本法では前回までの結果と同様に, 収束性能も変動量 h_1, h_2 に依存しない. 以上より, 本法は, 数値微分であるにもかかわらず, 解析解と同じ内力ベクトルと要素剛性マトリクスを常に得られることが分かる.

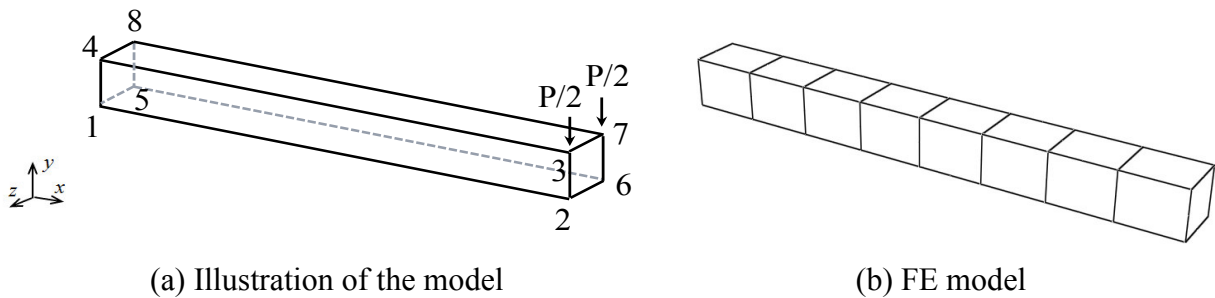


Fig.3.6 Exapample of the cantileber problem

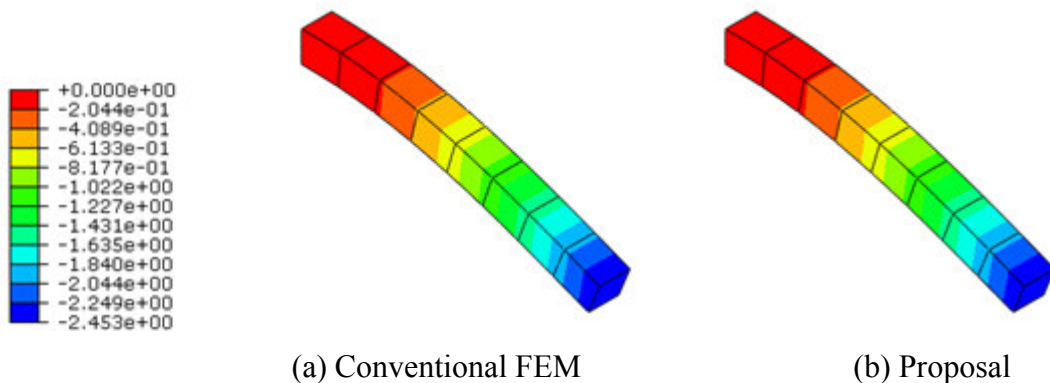


Fig.3.7 Results of displacement in y -direction for the cantileber problem.

Table 3.5 Deformation error calculated by Equations (3.73) and (3.74) of the cantilever problem resulting from the different approaches to calculate the internal forces and element stiffness matrices. The choice of the perturbation values in the CD influences on the displacement accuracy. The HSDS yields a quite accurate displacement values under all perturbation values selected.

(a) CD for the 2nd load step

		h_2						
CD		10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}
h_1	10^{-1}	failed	failed	failed	failed	failed	failed	failed
	10^{-3}	failed	failed	4.1×10^{-5}	4.1×10^{-5}	failed	failed	failed
	10^{-5}	failed	7.5×10^{-9}	1.5×10^{-8}	failed	failed	failed	failed
	10^{-7}	failed	failed	failed	failed	failed	failed	failed
	10^{-9}	failed	failed	failed	failed	failed	failed	failed

(b) HSDS for the 2nd load step

		h_2						
HSDS		10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}
h_1	10^{-1}	1.7×10^{-14}	3.2×10^{-14}	2.0×10^{-14}	4.5×10^{-14}	1.7×10^{-14}	2.6×10^{-14}	3.8×10^{-14}
	10^{-3}	3.1×10^{-14}	7.1×10^{-15}	3.9×10^{-14}	2.4×10^{-14}	1.7×10^{-14}	4.9×10^{-14}	1.9×10^{-14}
	10^{-5}	4.6×10^{-14}	2.3×10^{-14}	9.3×10^{-15}	9.3×10^{-15}	3.2×10^{-14}	4.6×10^{-14}	1.7×10^{-14}
	10^{-7}	6.9×10^{-15}	1.9×10^{-14}	1.7×10^{-14}	3.3×10^{-14}	2.7×10^{-14}	1.3×10^{-14}	3.6×10^{-14}
	10^{-9}	3.2×10^{-14}	3.7×10^{-14}	3.5×10^{-14}	3.0×10^{-14}	2.6×10^{-14}	1.8×10^{-14}	6.7×10^{-14}

Table 3.6 Convergence of the cantilever problem for the 2nd load step based on the CD and the HDS scheme. The choice of perturbation values in CD strongly influences on the convergence behavior. Almost perturbation values lead to results of the failed convergence. The HDS shows the excellent convergence under all perturbation values selected.

(a) Iteration numbers

CD / HDS		h_2						
		10^{-1}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}
h_1	10^{-1}	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7
	10^{-3}	failed / 7	failed / 7	7 / 7	15 / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7
	10^{-5}	failed / 7	7 / 7	13 / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7
	10^{-7}	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7
	10^{-9}	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7	failed / 7

(b) Normalized displacement norm for the 2nd load step

Conventional FEM	CD with $h_1=10^{-5}$		$h_1=10^{-3}$	HDS
	$h_2=10^{-3}$	$h_2=10^{-5}$	$h_2=10^{-7}$	
1	1	1	1	1
8.38×10^{-4}	8.06×10^{-4}	1.34×10^{-3}	9.57×10^{-4}	8.38×10^{-4}
7.91×10^{-7}	6.67×10^{-7}	1.39×10^{-5}	1.33×10^{-6}	7.91×10^{-7}
1.22×10^{-7}	3.84×10^{-7}	9.86×10^{-4}	1.72×10^{-5}	1.22×10^{-7}
1.71×10^{-11}	1.06×10^{-10}	1.35×10^{-8}	1.04×10^{-8}	1.71×10^{-11}
2.38×10^{-16}	2.96×10^{-14}	3.11×10^{-7}	3.37×10^{-9}	2.38×10^{-16}
1.53×10^{-28}	2.35×10^{-21}	2.63×10^{-13}	1.40×10^{-14}	1.59×10^{-28}
		4.01×10^{-15}	3.64×10^{-18}	
		1.92×10^{-17}	8.18×10^{-20}	
		2.13×10^{-18}	2.97×10^{-19}	
		6.22×10^{-20}	8.01×10^{-16}	
		4.39×10^{-20}	5.06×10^{-15}	
		2.87×10^{-21}	2.85×10^{-16}	
			1.87×10^{-19}	
			1.62×10^{-20}	

3.4 まとめ

本論文では、幾何学非線形問題を対象にして、HDS法による高精度な数値1階・2階微分を用いた簡易的な要素の実装スキームを開発した。得られた知見は以下のよう
にまとめられる。

- (1) 本法は、要素のひずみエネルギーを計算するプログラムを用意するだけで、内力ベクトルおよび要素剛性マトリクスを自動的に計算することが可能となる。
- (2) 本法の特徴として、従来では計算が必須であった \mathbf{B} マトリクス、応力テンソル、整合接線係数の解析解の導出およびプログラムの実装が不要となる。また、用意するプログラムは基本的にスカラー値のひずみエネルギーのみであるため、従来で煩雑となる各計算過程におけるベクトル・行列の大きさや配列の順列の並べ替えの煩雑さの多くを削減できる。そのため、幾何学非線形問題の有限要素解析の実装において、大幅な作業の簡略化が見込まれる。
- (3) HDS法による数値微分の計算精度は、変動量の値に関係なく、解析解の結果と同等の精度である。このことから、本法による内力ベクトルおよび要素剛性マトリクスの算出精度においても解析解と一致する。
- (4) 本法の有効性を確認するために、3次元4節点四面体要素による単軸引張り解析、3次元8節点六面体要素によるせん断解析、3次元20節点六面体要素による片持ち梁の曲げ解析をおこなった。その結果、本法により出力される結果および収束性能の両方は、解析解のものと全て一致することを確認した。

以上より、本法は解析解と同等の性能を持つ。また、非線形有限要素解析を少ない作業負担で実装可能となる。特に、要素開発の効率化や、新しい計算アルゴリズムの開発の支援ツールとして期待できる。

実問題に適用する場合、計算時間の検証は重要である。材料構成則の計算にHDS法を適応し、計算時間を検証した結果は既報の論文で報告されている (Tanaka et al., 2015)。この報告によると、要素数が少ない場合は従来のFEMに比べて計算時間が大きくなるが、要素数が増えるとその影響は小さくなる。これは要素数が増えるにつれて近似計算の影響を受ける剛性マトリクスの計算より、方程式の解を導く計算にかかる時間のほうが支配的になるためである。本実装スキームでも同様の結果が得られると予想できるが、計算時間の検証は今後の課題とする。

参考文献

- 1) Clifford, W.K., Preliminary sketch of biquaternions, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 4 (1873), pp. 381–395.
- 2) Fike, J.A., Multi-objective optimization using hyper-dual numbers (Ph.D. Thesis), Stanford university (2013).
- 3) 久田俊明, 野口裕久, 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善(1995).
- 4) Lee, Y. and Park, K.C., Numerically generated tangent stiffness matrices for nonlinear structural analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, No. 51-52 (2002), pp. 5833–5846.
- 5) Lyness, J.N., Differentiation formulas for analytic functions, Mathematics of Computation (1968), pp. 352–362.
- 6) Miehe, C., Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 134 (1996), pp. 223–240.
- 7) Tanaka, M., Fujikawa, M., Balzani, D. and Schröder, J., Robust numerical calculation of tangent moduli at finite strains based on complex-step derivative approximation and its application to localization analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 269 (2014), pp. 454-470.
- 8) Tanaka, M., Sasagawa, T., Omote, R., Fujikawa, M., Balzani, D. and Schröder, J., A highly accurate 1st- and 2nd-order differentiation scheme for hyperelastic material models based on hyper-dual numbers, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 283 (2015), pp. 22–45.

4. ゲル材料の簡易応力-ひずみシミュレーション法の開発

4.1 はじめに

2章では、クリープ試験の結果から簡易的にゲルの粘弾性挙動を予想する材料モデルとして Yeoh の超弾性モデル (Yeoh, 1993) と Simo の粘弾性モデル (Simo, 1987; Simo and Hughes, 1998) を採用し、その材料定数の簡易同定法を開発した。また、FEM 解析を行い、材料モデルの性能評価を行った。その結果、材料試験と FEM 解析の結果は概ね一致した。ただし、より高い再現性が求められる場合は2章の提案手法では難しい。また、クリープ試験の FEM 解析から正規化公称ひずみ $\alpha(t)/\varepsilon_\infty$ を計算した結果を図 4.1 に示す。図 4.1 より、 2×10^5 [s] より大きな時間域では実験結果と解析結果は概ね一致しているが、 2×10^5 [s] より小さい時間域において、FEM 解析の結果では各負荷応力下の $\alpha(t)/\varepsilon_\infty$ が一致しておらず、負荷応力に依存しないという材料試験の特性を再現していない。そして、既存の材料モデルではこれらの課題を解決するのは難しい。

そこで、2章の提案手法の課題を改善し、より再現性・予測性能の高いシミュレーション法を開発を行った。まず、クリープ試験の再現性を向上させるとともに、 $\alpha(t)/\varepsilon_\infty$ を再現できる材料モデルについて検討した。そして、長期の応力-ひずみ関係に着目し、新しい超弾性モデルの開発を行った。また、3章の成果を応用した超弾性モデルの簡易実装スキームを開発することで、新しい材料モデルを効率的に実装する方法について検討した。最後に、汎用 FEM ソフトを用いて解析を行い、性能評価を行った。本章ではこれらについて検討もしくは開発した結果を示す。なお、本章では、ゲル材料を非圧縮と仮定している。また、これから提案する手法と区別するために、2章で提案した材料モデル (Simo の粘弾性モデル+Yeoh モデル) によるシミュレーション法を前法とする。

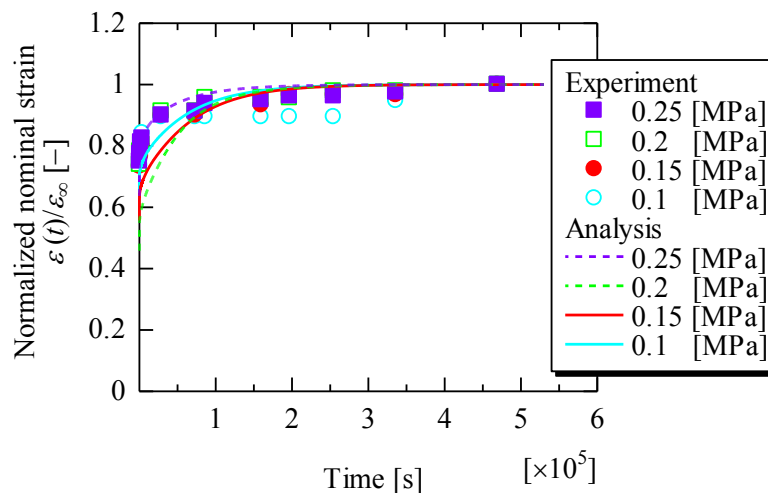


Fig. 4.1 Normalized nominal strain results of tensile creeps tests and FEM. The material constants are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3$ [s], 0.048), $(10^4$ [s], 0.027) and $(10^5$ [s], 0.144) for $i = 1, 2$ and 3 , respectively.

4.2 材料モデルの再検討

本節では 2.2 節の大変形クリープ試験の結果と前法の課題を踏まえて、ゲル材料の材料モデルについて再検討した結果を示す。4.2.1 項では前法のクリープ挙動の再現性を向上させる方法について述べる。そして、4.2.2 項ではクリープ試験の結果を再現するための超弾性モデルを提案する。

4.2.1 クリープ試験の再現性の改善

前法で使用した Simo の粘弾性モデルは定常状態（長期）の力学挙動を表す単独の非線形バネ要素と複数の Maxwell 要素（非線形バネと線形ダッシュポットを直列に連結させた要素）で構成されている。そして、全てのバネ要素の公称応力—公称ひずみ関係が線形の場合、線形粘弾性と等価となる。また、線形粘弾性体の場合、クリープ試験の $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ は負荷応力に依存しない。この項ではまず、全てのバネ要素の公称応力—公称ひずみ関係が線形の場合、 $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ が負荷応力に依存しないのかを確認するために、(a)項で公称応力—公称ひずみ関係が線形となるバネ要素を適用した Simo の粘弾性モデルを用いたクリープ試験の解析の結果を示す。そして、(b)項では解析結果を踏まえて、クリープ試験の再現性を向上させる方法について検討した結果を示す。

(a) Simo の粘弾性モデルによるクリープ試験の解析

クリープ試験の解析では Simo の粘弾性モデルの単独バネ要素の公称応力—公称ひずみ関係を図 4.2 のように定義した。これにより、単独バネ要素と各 Maxwell 要素のバネ要素は剛性比 γ_i , γ_{SE} により比例関係で表されるため、全てのバネ要素が線形で表される。Maxwell 要素の材料定数である緩和時間 τ_i と γ_i は 2 章で同定した値 $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3 \text{ [s]}, 0.048), (10^4 \text{ [s]}, 0.027), (10^5 \text{ [s]}, 0.144)$ を使用した。そして 2.2 節の材料試験と同様に、0.1, 0.15, 0.2, 0.25 [MPa] の 4 つの公称応力を負荷し、 $4.7 \times 10^5 \text{ [s]}$ 保持した。以上の条件で行ったクリープ試験の解析より得られた $\epsilon(t)$ と $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ を図 4.3 に示す。図 4.3a は $\epsilon(t)$ 、図 4.3b は $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ の結果である。図 4.3a より、それぞれの負荷応力下で大きなひずみとクリープ挙動が確認できる。そして図 4.3b では全ての負荷応力下で $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ は一致している。つまり、単独バネ要素の公称応力—公称ひずみ関係が線形となる場合、 $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ は全ての負荷応力下で一致することが確認できる。

(b) クリープ試験の再現性の改善法の検討

4.2.1a 項の解析結果を踏まえて、長期（単独バネ要素）の公称応力—公称ひずみ関係について再検討した。前法では長期の公称応力—公称ひずみ関係は Yeoh モデルで表されるとした。そして、クリープ試験の結果から材料定数の同定を行った。ここで、同定した材料定数を用いた Yeoh モデルによる単軸引張解析を行った結果と 2.2 節のクリープ試験より得られる長期の公称応力—公称ひずみ関係を図 4.4 に示す。図 4.4 より、Yeoh モデルの単軸引張解析の結果は実験より得られる長期の公称応力—公称ひずみ関係のデータ点の近傍を通過している。しかし、公称応力の増加率は変動しており、公称応力—公称ひずみ関係は線形ではない。つまり、4.2.1a 項で示した $\epsilon(t)/\epsilon_\infty$ が負荷応力に依存しない条件は満たしていない。一方で、図 4.4 の実験データでも 0~60

[%]と 60~300 [%]のひずみ域では公称応力の増加率が異なるため線形ではない。しかし、クリープ試験で計測した 60~300 [%]のひずみ域では公称応力の増加率に大きな変化は見られない。そこで、データ点間の値を確認するために負荷（公称）応力 0.12 [MPa]のクリープ試験を実施し、負荷後 4.7×10^5 [s]までの公称ひずみを計測した。そして、得られた結果を図 4.4 に追加したが、それでも増加率に大きな変化は見られない。

以上より、長期の公称応力-公称ひずみ関係を改善することで、クリープ試験の再現性を向上させることができると考えた。60~300 [%]のひずみ域では公称応力の増加率に大きな変化は見られないため、長期の公称応力は 0~60 [%]のひずみ域では曲線を描きながら増加し、60~300 [%]のひずみ域では 1 次関数に漸近すると仮定する。これにより、2.2 節のクリープ試験で計測した 60~300 [%]のひずみ域では長期の公称応力-公称ひずみがほぼ線形となり、 $\varepsilon(t)/\varepsilon_0$ が負荷応力に依存しない条件を満たすことができる。ただし、この仮定を Yeoh モデルで再現することは難しい。したがって、超弾性モデルを再検討する必要があると考えられる。

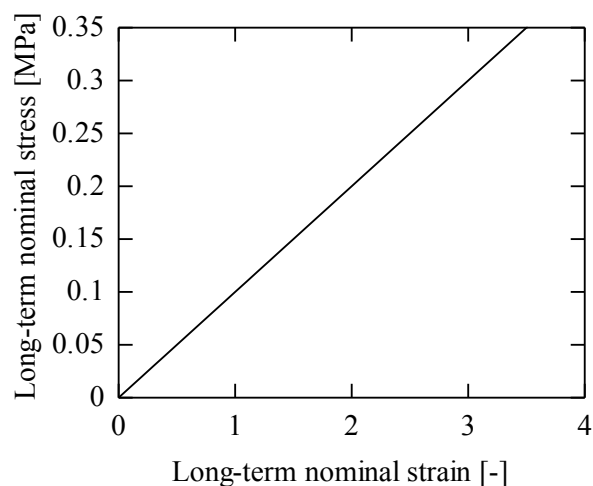
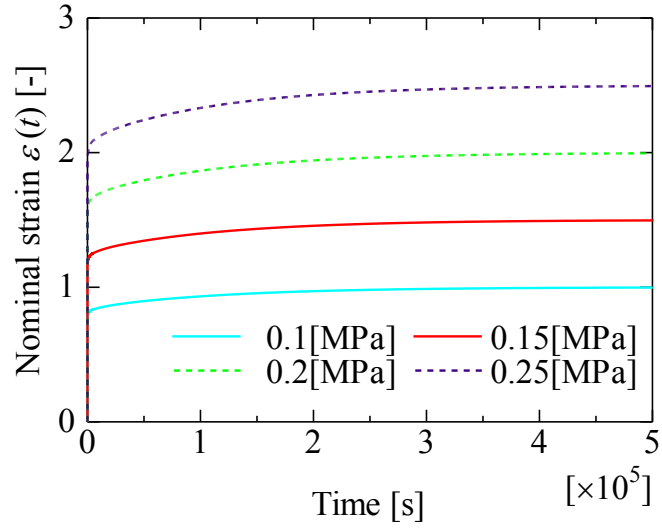
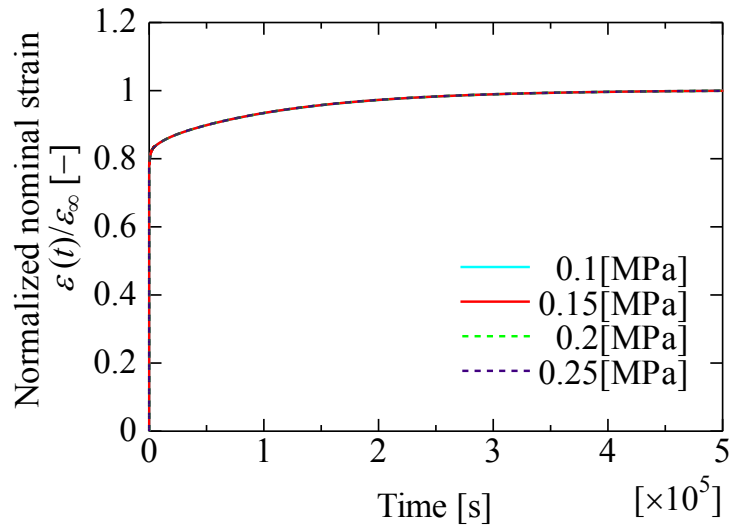


Fig. 4.2 Long-term stress vs strain relationships used in the numerical analysis of creep test.



(a) Nominal strain $\varepsilon(t)$



(b) Normalized nominal strain $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$

Fig. 4.3 Numerically obtained (a) nominal strain and (b) normalized nominal strain of the creeps tests with the viscoelastic model proposed by Simo. The material constants of Maxwell models are $(\tau_i, \gamma_i) = (10^3 [s], 0.048)$, $(10^4 [s], 0.027)$ and $(10^5 [s], 0.144)$ for $i = 1, 2$ and 3 , respectively. The long-term nominal stress – nominal strain relationships as shown in Fig 4.2 are used in the numerical creep tests.

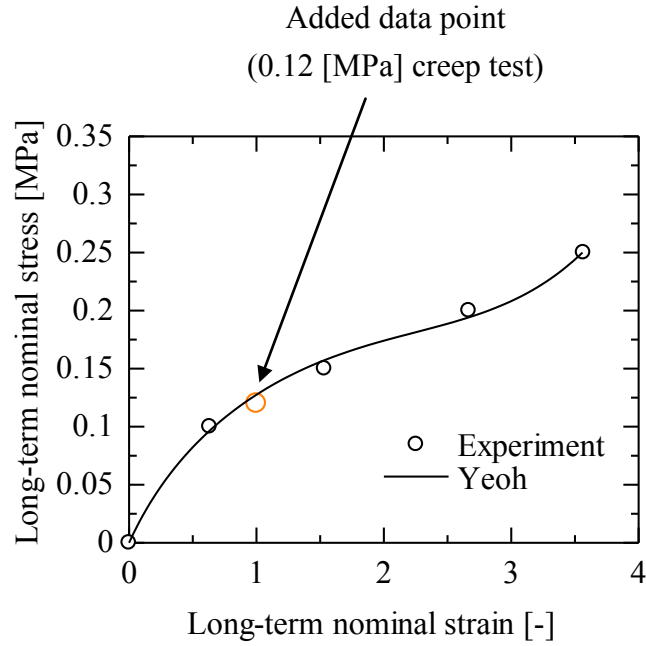


Fig. 4.4 Experimentally and numerically obtained long-term stress vs strain relationships. Experimental data was obtained from the creep tests results under 0.1, 0.15, 0.2 and 0.25 [MPa] constant nominal stresses. Yeoh model was used in numerical calculation. The material constants of Yeoh model are $c_{10} = 0.04$, $c_{20} = 0.98 \times 10^{-3}$ and $c_{30} = 2.36 \times 10^{-5}$ [MPa]. Moreover, new experimental data obtained from the creep test under 0.12 [MPa] constant nominal stress was added.

4.2.2 超弾性モデルの再検討

前項では、長期の力学挙動を表す超弾性モデルを改善することでよりクリープ試験の再現性を向上させることができると考えた。また前項では、長期の力学挙動を表す超弾性モデルは（条件①）公称応力が 0～60 [%]のひずみ域では曲線を描きながら増加し、（条件②）60～300 [%]のひずみ域では 1 次関数に漸近するようなモデルとなると仮定した。しかし、この条件を満たしつつ、単軸引張の公称応力が図 4.4 の実験データと一致する超弾性モデルは著者が調査した限りでは見当たらなかった。

そこで、新しい超弾性モデルの開発を行った。2.1 節で述べたように単軸方向の実験データを用いる場合、 I_1 のみを変数とするひずみエネルギー密度 W が用いられる (Koprowski-Theiss et al, 2011; Johlitz et al, 2011)。ここで、 I_1 のみを変数とする任意のひずみエネルギー密度 W から単軸引張の公称応力 P_{cal}^∞ を解析的に求めると次式のようになる (Holzapfel, 2000)。

$$P_{cal}^\infty = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (\lambda - \lambda^{-2}) \quad (4.1)$$

ここで、 λ は伸長比である。式(4.1)中の λ^{-2} は λ が大きい場合、 $\lambda^{-2} \approx 0$ となる。つまり、

λ が大きくなると $\partial W/\partial I_1$ が一定値になるように $\partial W/\partial I_1$ を定義すると、式(4.1)の P_{cal}^∞ は λ の増加とともに1次関数に漸近する。そこで、 $\partial W/\partial I_1$ を次式で定義する。

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = (a + b \cdot c^{-(I_1-3)}) \quad (4.2)$$

ここで、 a, b, c は定数である。 λ が大きくなると I_1 は大きくなる。したがって、式(4.2)の $\partial W/\partial I_1$ は λ が大きくなると定数 a となる。そして、式(4.1)より P_{cal}^∞ は以下のような。

$$P_{cal}^\infty = 2(a + b \cdot c^{-(I_1-3)})(\lambda - \lambda^{-2}) \quad (4.3)$$

式(4.3)は伸長比 λ が大きくなると1次関数 $(2a\lambda)$ に漸近するため条件②を満たす。なお、式(4.3)は次式のひずみエネルギー密度と等価となる。

$$W = a(I_1 - 3) + \frac{b}{\ln c} (1 - c^{-(I_1-3)}) \quad (4.4)$$

次に材料定数の同定を行った。まず、図 4.4 の実験データにおいてひずみ量が大きな右の2点の傾きが最も漸近する1次関数の傾きに近くと考えて、この傾きから a の値を決定した。他の材料定数 b, c は式(4.3)の P_{cal}^∞ と図 4.4 の実験データの相対誤差が最小となるような値を準Newton法により同定した。その結果、 $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa], $c = 1.48$ [-]となった。式(4.3)の P_{cal}^∞ と図 4.4 の実験データを比較した結果を図 4.5 に示す。図 4.5 より、式(4.3)と実験データはよく一致していることが確認できた。また、0~60 [%]のひずみ域では曲線を描きながら増加し、60~300 [%]のひずみ域ではほぼ線形となっている。したがって、条件①②を満たすことが確認できる。

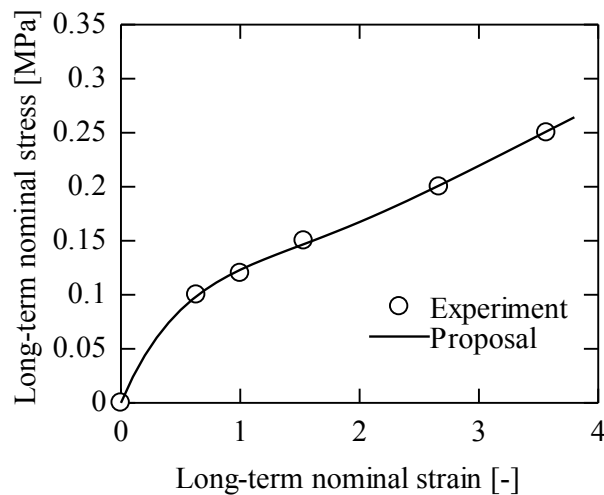


Fig. 4.5 Experimentally and numerically obtained long-term stress vs strain relationships. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-].

4.3 汎用 FEM への実装

本節では超弾性モデルの実装方法について述べる．通常，材料モデルの実装には煩雑な微分計算が必要となる．そこで3章では，簡易的に実装する手段として高精度な数値1階・2階微分近似法である HDSO 法 (Clifford, 1873; Fike, 2013) に着目し，要素の実装に伴う複雑な計算を低減するスキームを開発した．ただし本研究では材料モデルとして，すでに汎用 FEM ソフト Abaqus (Abaqus 6.14 User's Guide 2014) に搭載されている Simo の粘弾性モデルを使用している．さらに Abaqus にはユーザー独自の超弾性モデルを実装し，他の機能と組み合わせて使用できるユーザーサブルーチン UHYPER (Abaqus 6.14 User's Guide 2014) という機能が搭載されている．このサブルーチンを用いると，Simo の粘弾性モデルにおけるバネ要素の超弾性モデルのみ UHYPER で定義し，粘弾性の計算は Abaqus の機能を用いて計算することが可能である．本法に限って言えば，こちらの方がより効率的に超弾性モデルの実装が行える．これより，本法では UHYPER で材料モデルの実装を行った．ただし，UHYPER を使用する場合でも，要素の実装でスカラー値のひずみエネルギーから内力ベクトルと要素剛性マトリクスを求めた様に，ひずみエネルギー密度 W を右 Cauchy-Green テンソルの第一不変量 I_1 で微分し，1階と2階の微係数を求めなければならない．そこで，本項では要素の計算の一部である材料構成則の超弾性モデルの計算に焦点を当て，前章の簡易実装スキームを応用して，HDSO 法による W の微係数の計算法について検討した．3章と同様に，次式のように定義された2つの非実数軸上の元 ε_1 と ε_2 を考える．

$$\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 0, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_1 \quad (4.5)$$

そして，変動量を $h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2$ とし， $W(I_1 + h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2)$ を I_1 の周りで Taylor 展開すると次式の様になる．

$$W(I_1 + h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2) = W(I_1) + (h_1 \varepsilon_1 + h_2 \varepsilon_2) \frac{\partial W}{\partial I_1} + h_1 h_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \quad (4.6)$$

なお，一般に Taylor 展開には微小な変動量を用いるが，3章より HDSO 法は計算精度が変動量に依存しないため，ここでは $h_1 = h_2 = 1$ とした．以上より，HDSO 法を W の微係数の計算に適用した数値微分近似式は次式で表される．

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \mathfrak{I}_{\varepsilon_1} [W(I_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)] = \mathfrak{I}_{\varepsilon_2} [W(I_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} = \mathfrak{I}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} [W(I_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \quad (4.8)$$

この方法は W の計算するプログラムから必要な全ての微係数が得られるため実装の作業が軽減される．本法では，このスキームを用いることで効率的に新しい超弾性モデルを実装できた．

4.4 例題による性能評価

本節では4.3節で開発した超弾性モデルと Simo の粘弾性モデルを用いて，いくつかの例題の解析を行い，有効性を調査した結果を示す．解析には汎用 FEM ソフトの

Abaqus/Standard を使用した。なお、解析で使用した Simo の粘弾性モデルの材料定数 (τ_i, γ_i) は、クリープ試験の計測時間 $(300 \sim 4.7 \times 10^5 \text{ [s]})$ の桁数に合わせて緩和時間 τ_i を設定し、剛性比 γ_i は Simo の粘弾性モデルから得られる単軸引張における公称応力の計算結果と 2.2 節のクリープ試験の負荷応力との相対誤差が最小となるように準 Newton 法で求めた。同定ではゲル材料の粘弾性挙動が負荷応力に非依存という特性を考慮して、0.25 [MPa] の結果を使用した。材料定数は $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2 \text{ [s]}, 0.047), (10^3 \text{ [s]}, 0.055), (10^4 \text{ [s]}, 0.041), (10^5 \text{ [s]}, 0.082)$ である。

4.4.1 大変形クリープ試験

本法の再現性を評価するために 2.2 節のクリープ試験のトレース解析を行った。また、前法と比較することで、クリープ試験の再現性が向上しているか調査した。クリープ試験と本法による解析結果を図 4.6 と図 4.7 に示す。図 4.6 は $\varepsilon(t)$ 、図 4.7 は $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$ の結果である。前法では 0.15 と 0.2 [MPa] で材料試験と FEM 解析の結果に差が生じていた。一方で図 4.6 より、本法は全ての負荷応力下で材料試験と FEM 解析の結果は良く一致している。また図 4.7 より、本法は $\varepsilon(t)/\varepsilon_\infty$ が全ての負荷応力下で概ね一致しており、材料試験の結果を良く再現できている。つまり、本法はクリープ試験の結果を前法より高い精度で再現している。したがって、再現性が向上させることに成功した。

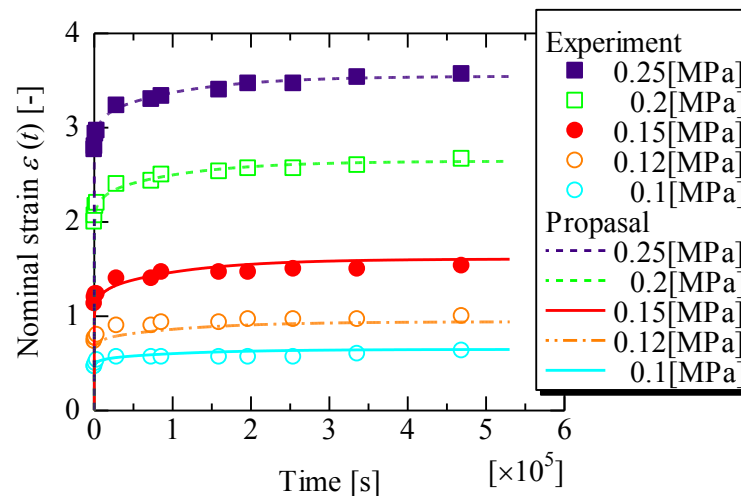


Fig. 4.6 Nominal strain results of the tensile creep tests and FEM analysis with the proposed method. The material constants are $a = 0.028 \text{ [MPa]}$, $b = 0.016 \text{ [MPa]}$ and $c = 1.48 \text{ [-]}$, and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2 \text{ [s]}, 0.047), (10^3 \text{ [s]}, 0.055), (10^4 \text{ [s]}, 0.041)$ and $(10^5 \text{ [s]}, 0.082)$ for $i = 1, 2, 3$ and 4 , respectively.

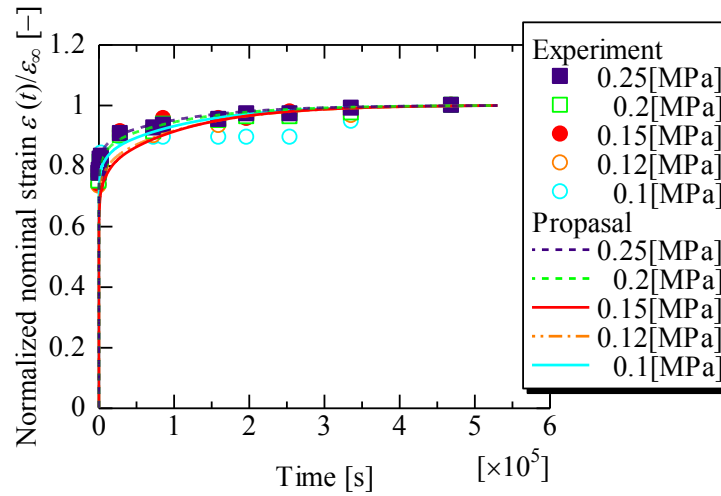


Fig. 4.7 Normalized nominal strain results of tensile creep tests and FEM analysis with the proposed method. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

4.4.2 有孔平板のクリープ試験

本項では、本法を2.4.2項の2つの穴を有する短冊形試験片のクリープ試験へ適用し、有効性を評価した結果を示す。3次元デジタル画像相関 (DIC) (Sutton et al, 2009; 米山, 2010; Correlated Solutions User Manual) で計測した試験片表面の対数ひずみ分布と本法による FEM 解析より得られた対数ひずみ分布を図 4.8 から図 4.13 に示す。図 4.8 は試験片 A の対数ひずみ e_{yy} 分布を表しており、試験片全体で材料試験と FEM 解析の結果は概ね一致した。チャックつかみ部付近では、クリップ締付けによる影響で差異が見られるが、応力集中が生じる穴付近はひずみ分布の傾向やクリープ挙動を定性的に再現できている。図 4.9 は試験片 B の対数ひずみ e_{yy} 分布を表しており、ここでも材料試験と FEM 解析の結果は概ね一致していることがわかる。さらに図 4.10 と図 4.11 はそれぞれ試験片 A, B の対数ひずみ e_{xx} 分布, 図 4.12 と図 4.13 はそれぞれ試験片 A, B の対数ひずみ e_{xy} 分布を表しており、こちらでも e_{yy} 分布と同様に粘弾性挙動を再現できている。以上より、本シミュレーション法は応力集中が生じるような問題にも適用可能であることがわかる。また、単軸方向のクリープ試験の結果を用いて e_{yy} , e_{xx} , e_{xy} 分布の粘弾性挙動を定性的に予測できており、選定した材料モデルと同定した材料定数の有効性が確認できる。前項で示したように、本法は前法よりも優れた再現性を有するため、より効果的にゲル材料の粘弾性挙動を再現できる手法であると言える。

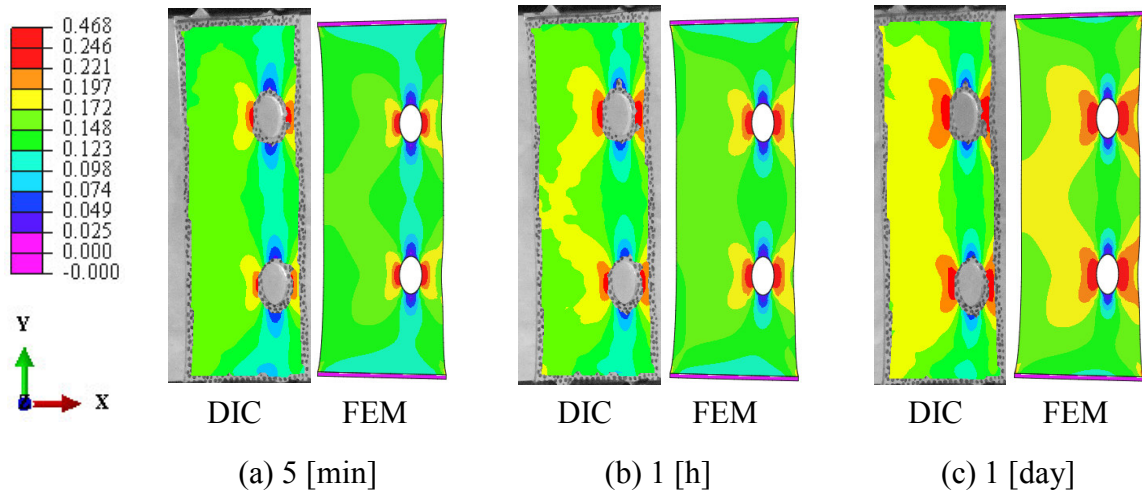


Fig. 4.8 Logarithmic strain e_{yy} of specimen A from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

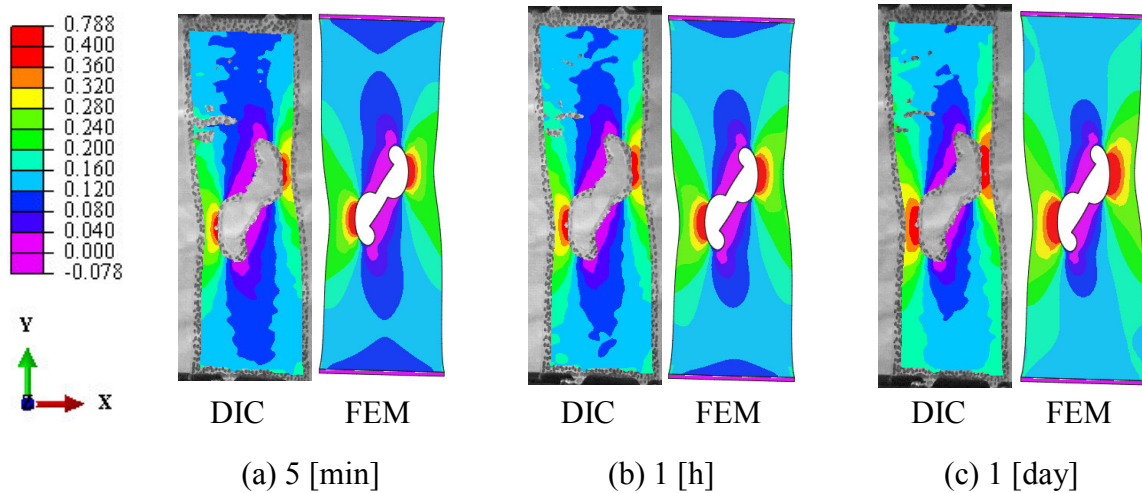


Fig. 4.9 Logarithmic strain e_{yy} of specimen B from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

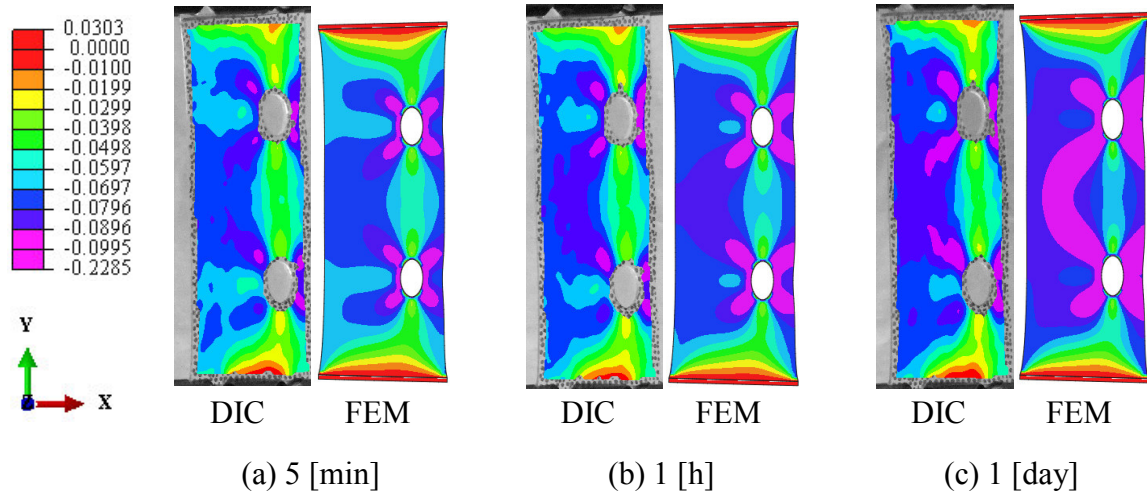


Fig. 4.10 Logarithmic strain e_{xx} of specimen A from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

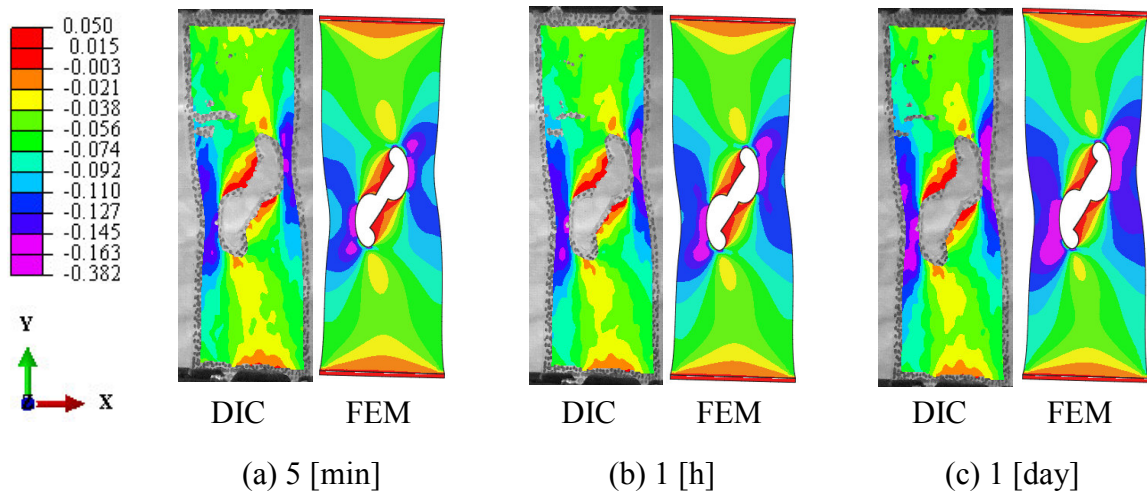


Fig. 4.11 Logarithmic strain e_{xx} of specimen B from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

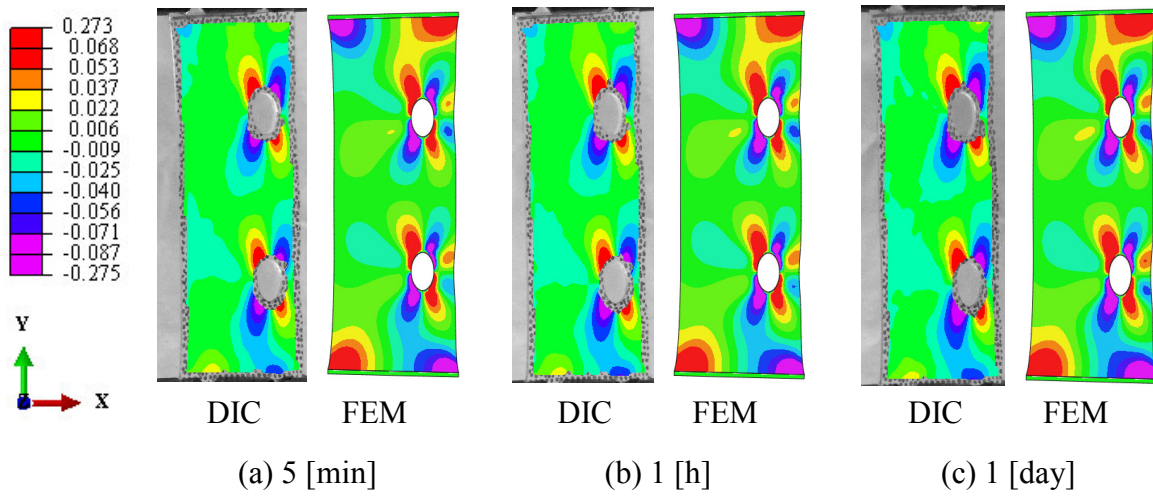


Fig. 4.12 Logarithmic strain e_{xy} of specimen A from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

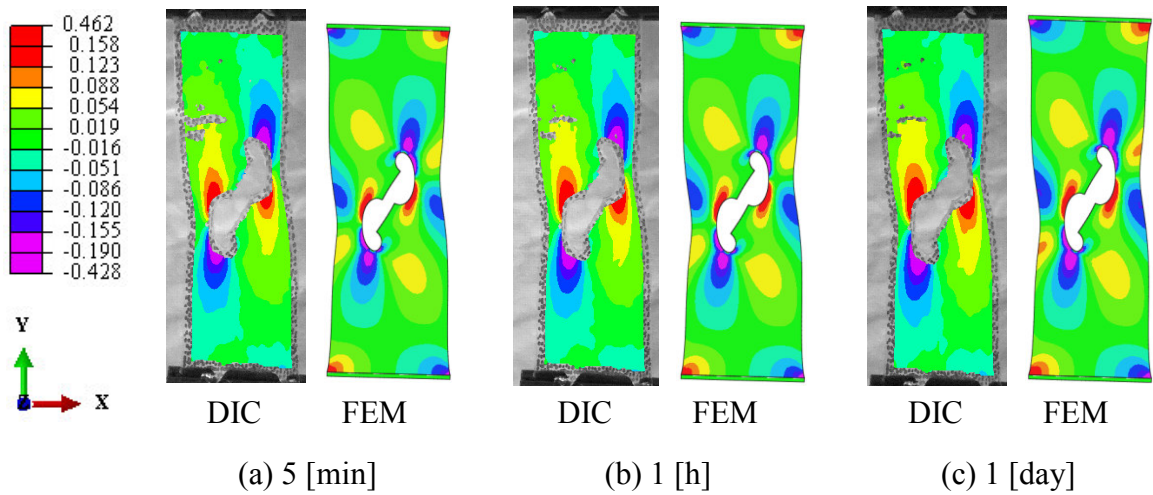


Fig. 4.13 Logarithmic strain e_{xy} of specimen B from DIC (left) and FEM (right) at (a) 5 [min], (b) 1 [h] and (c) 1 [day] after loading. The material constants are $a = 0.028$ [MPa], $b = 0.016$ [MPa] and $c = 1.48$ [-], and $(\tau_i, \gamma_i) = (10^2$ [s], 0.047), $(10^3$ [s], 0.055), $(10^4$ [s], 0.041) and $(10^5$ [s], 0.082) for $i = 1, 2, 3$ and 4, respectively.

4.6 まとめ

本章では前法の再現性を向上させる方法を検討した。まず、前法の再現性を向上させる方法を検討し、新しい超弾性モデルを開発した。また、3章の成果を応用して、超弾性モデルの簡易実装スキームを開発した。そして、いくつかの例題を通して性能評価を行った。得られた知見を以下に示す。

- (1) 前法の再現性を向上させるために超弾性モデルについて再検討し、材料試験に合わせた新しい超弾性モデルを開発した。そして、開発した超弾性モデルは2.2節のクリープ試験から得られた長期の公称応力-公称ひずみ関係を再現できることを確認した。
- (2) 超弾性モデルを汎用 FEM ソフト Abaqus のユーザーサブルーチン UHYPER を使用して実装した。実装する際は、3章で得られた成果を応用して、要求される微係数をひずみエネルギー密度から自動的に計算できるスキームを開発した。これにより、新しい超弾性モデルを効率的に実装することができた。
- (3) 本法を用いてクリープ試験の FEM 解析を行った結果、材料試験と良く一致することを確認した。また、前法より再現性が向上させることに成功した。
- (4) 2つの穴を有する短冊型試験片のクリープ試験の FEM 解析を行い、2.4.2 項の材料試験の結果と比較した。その結果、本法は実験結果と概ね一致する確認した。本法は応力集中が生じるような問題にも適用可能であることがわかった。

以上より、本法は簡単な材料実験を用いてゲル材料の粘弾性挙動を予測することができる。また、300 [s]から約 5×10^5 [s]までの長時間域のクリープ挙動を再現できるため、製品の設計・開発を効率良く行えることが期待できる。今後は本法の再現性や予測性能を定量的に評価することが課題となる。また、他のゲル材料へ応用し、性能を調査する必要がある。

参考文献

- 1) Abaqus6.14 User's Guide, Dassault Systemes SIMULIA (2014).
- 2) Clifford, W.K., Preliminary sketch of biquaternions, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 4 (1873), pp. 381–395.
- 3) Correlated Solutions User Manual, Laser Measurement Co., Ltd..
- 4) Fike, J.A., Multi-objective optimization using hyper-dual numbers (Ph.D. Thesis), Stanford University (2013).
- 5) Holzapfel, G.A., Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering, Wiley (2000).
- 6) Johlitz, M. and Diebels, S., Characterisation of a polymer using biaxial tension tests. Part I: Hyperelasticity, Vol. 81, Issue 10 (2011), pp. 1333–1349
- 7) Koprowski-Theiss, N., Johlitz, M. and Diebels, S., Characterizing the time dependence of filled epdm, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 84, No. 2 (2011), pp. 147–165.
- 8) Simo, J.C., On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects, Vol. 60, Issue 2 (1987), pp. 153-173.
- 9) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R., Computational Inelasticity, Springer (1998).
- 10) Sutton, M.A., Orteu, J.-J. and Schreier, H.J., Image Correlation for Shape, Motion and Deformation measurements: basic concepts, theory and applications, Springer (2009).
- 11) Yeoh, O.H., Some forms of the strain energy function for rubber, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 66, No. 5 (1993), pp. 754-771.
- 12) 米山聡, デジタル画像相関法を用いた変位・ひずみ分布測定, 非破壊検査第 59 巻 7 号 (2010), pp. 306-310.

5. 結論

本論文ではゲル材料のための簡易的かつ再現性の高い力学数値シミュレーション法の開発を目的とし、簡単な材料試験からゲル材料のクリープ挙動を予測するシミュレーション法を開発した。また、汎用 FEM ソフトでは再現できない様な問題も視野に入れ、新しいシミュレーション法を簡易的に実装するスキームについての研究を行った。得られた知見を以下に示す。

2 章では、クリープ試験の結果から簡易的にゲル材料のクリープ挙動を予測することができるシミュレーション法を開発を行った。ゲルの粘弾性挙動を調査するためにクリープ試験を行い、結果を基にして Yeoh モデルと Simo の粘弾性モデルを選定した。さらに、例題を通して再現性や予測性能、汎用性の評価を行った。その結果、材料試験と FEM 解析の結果は概ねに一致した。簡易的なクリープ試験からゲル材料のクリープ挙動を定性的に予測できるシミュレーション法を提案した。

より高い再現性や予測性能が求められる場合、材料試験に合わせた新しい材料モデルやシミュレーション法を開発し、実装する必要がある。ただし、実装には複雑な微分演算が必要となる。そこで 3 章では、幾何学非線形有限要素法を対象として、新しい要素の簡易実装スキームについて検討した。高精度な数値 1 階 2 階微分演算が可能な HSDS 法に着目し、ひずみエネルギーを計算するプログラムから自動的に、解析解と同等の精度で内力ベクトルと要素剛性マトリクスを計算する方法を提案した。

4 章では、今までの成果を基に、より再現性の高いゲルの数値シミュレーション法の実装に取り組んだ。まず、クリープ試験の正規化公称ひずみを再現できる材料モデルについて検討し、材料試験に合わせた超弾性モデルを開発した。さらに、汎用 FEM ソフト Abaqus のユーザーサブルーチン UHYPER を用いて新しい超弾性モデルを実装した。また、UHYPER が要求しているひずみエネルギー密度の微係数の計算に HSDS 法を応用することで、新しい超弾性モデルを効率的に実装した。最後に例題を通して性能評価を行った結果、優れた再現性や予測性能を有し、応力集中が生じる問題にも適用できることを確認した。

本研究では、クリープ試験の結果を用いて簡易的に、ゲル材料の粘弾性挙動を考慮した応力-ひずみシミュレーションを行うことができる手法を提案した。この手法は単軸試験の結果から長時間使用環境下の粘弾性挙動を予測できる。今後はより定量的に評価する方法について検討することが望まれる。また、様々な問題への適用、他のゲル材料へ応用が必要である。

謝辞

本論文を書き終えるにあたり、これまで支えていただいた全ての方に感謝の辞を述べさせていただきます。

指導教員であり、本論文の主査をしていただいた琉球大学工学部機械システム工学科の真壁朝敏先生には、多くの御指導、御鞭撻を賜りました。また、留学生と一緒に研究をする機会を与えてくださる等、貴重な経験をさせていただきました。心から感謝申し上げます。

琉球大学工学部機械システム工学科の宮崎達二郎先生と琉球大学工学部環境建設工学科の松原仁先生には、本論文の副査をしていただき、多くの御指導と御助言をいただきました。御多忙にも関わらず、時間を割いていただき、心から感謝致します。

学部4年と博士前期課程の指導教員である琉球大学工学部機械システム工学科の藤川正毅先生には、数値解析や粘弾性材料に関する研究の面白さ、連続体力学やプログラミングの基礎等、沢山の事をご教授いただき、論文や資料作成の際は多くの御助言をいただきました。また、博士後期課程でも御指導と御鞭撻を賜り、大変お世話になりました。学部4年から博士後期課程までの6年間の御指導と御協力に深く感謝申し上げます。

本論文には株式会社豊田中央研究所との共同研究より得られた成果が含まれます。株式会社豊田中央研究所の表竜二氏、田中真人氏、笹川崇氏には、多くの御協力と御教授をいただきました。このような機会をさせていただき、深く感謝致します。

学部4年から博士後期課程まで共に研究をしてきた前田成人氏、材料力学研究室の先輩、後輩、同期の方々には様々な場面で御協力と御助言をいただきました。共に研究活動を行うことができたことに深く感謝申し上げます。

講義等で御指導いただいた先生方、生活を支えてくださった両親や姉妹、様々な方のおかげでこの6年間に有意義なものとなりました。深く礼申し上げます。