教職希望学生に対する現実世界との往還による数学の授業：「２進法によるマジックカード」とその発展課題を通して

教職希望学生に対する現実世界との往還による数学の授業
―「２進法によるマジックカード」とその発展課題を通して―

伊禮三之

A Case Study on Mathmeteic Class Focused on Mutual Understanding of the Real Wolrd for College Students Would-be Teachers
: Through “A Magic Card by Binary Scale” and the Advanced Problem

Mitsuyuki IREI

琉球大学大学院教育学研究科
高度教職実践専攻（教職大学院）紀要
第 1 巻
Department of Teacher Education
Graduate School of Education
University of the Ryukyus
No. 1
2017年３月

【実践研究】

教職希望学生に対する現実世界との往還による数学の授業
―「２進法によるマジックカード」とその発展課題を通して―

伊禮三之

A Case Study on Mathmeteic Class Focused on Mutual Understanding of the Real Wolrd for College Students Would-be Teachers
: Through “A Magic Card by Binary Scale” and the Advanced Problem

Mitsuyuki IREI

要　約

教員養成学部に入学してくる学生についても，高校数学の被教育体験は，「数学の世界」における数学の内容（知識・技能）の習得に重点が置かれ，「現実の世界」との交流・往還の学習経験をもつ学生は少ない。こうして学ばれた数学に対して，「なぜ日常的に使わない数学を入試で使わなければならないのか，ひたすら同じような問題を解く作業を繰り返していることの馬鹿馬鹿しさを感じる」と嘆く学生は多い。

本稿では，教職を希望する学生に対して，「２進法によるマジックカード」を取り上げ，「数学の世界」と「現実の世界」との往還から，マジックの仕組みの解明と，その発展と活用の様相の展開を，対話的で相互交流的な学習を通して，「数学概論」における授業実践の概要を報告し，その効果として，学生の持つ数学観や学習観・授業観をより肯定的なものへの転換を促進することと，授業づくりへの意欲と展望を育む契機となり，その体験が実践的指導力の育成に資するものであることを考察した。

キーワード：教員養成　現実の世界と数学の世界の往還　数学観・学習観の転換　２進法・３進法

１．はじめに―数学的問題解決の図式

「私は高校でも文系を選択していて，数学は苦手な教科でもあった。数学の授業自体も教科書の例題の説明を聞き，実際に自分が問題を解いて，分からないところはひたすら復習するというものであり，テストや受験勉強のために解き方を暗記して繰り返し勉強するというものが数学であると思っていた。数学に対するアンケートを記入したとき，数学は難しい，冷たい，分かりづらいなどとマイナスなイメージが並んだことを覚えている」。「私は，小中高校とたくさんの算数や数学の問題やいろんな先生の授業を受けてきました。私自身は特に数学に苦手や嫌いという意識はなかったのですが，特に好きや楽しいという感情もありませんでした。それに数学は自分に何がプラスになるかと聞かれたら，お店でお買い物するとき割引がわかるようになる。とか物事を整理して考えることができるようになるなどしか答えることができませんでした」。

これらは，「数学概論」を受講している学生の数学に対する思いである。この記述に見られるように，多くの学生は，与えられた数学の公式と練習問題によるその適用方法の記憶が数学の学習（授業）であるという学習観（授業観）や，強固なすでにできあがった体系が数学であり，日常生活には役立たないなどの数学観等を強く持っている。こうした，学生たちの12年以上にも及ぶ算数・数学の被教育体験は，彼らの意識の深層に数学や数学の授業・学習に対する否定的な〈信念〉（学習観や数学観等）をも潜り込

琉球大学大学院教育学研究科高度教職実践専攻

ませている。それは，伝統的な数学授業（新しく出てきた用語の定義をし，定理や公式の証明を行う→例題によって，その定理・公式の適用の仕方や解法の提示をする→類題や練習問題で演習を行い，最後に解答を示し，先に進む，というスタイル）によって形成されていることは間違いない。

こうした意識に無自覚であれば，彼らが教師として教壇に立ったとき，負の体験の再生産を行いこそすれ，新しい算数・数学教育の創造は望むべくもない。数学と教育実践と結びつける際に，教育内容の選択の問題だけでなく，学生がその内容をいかに習得するかという問題も同時に考える必要がある。高度専門職にふさわしい実践的指導力の育成のためには，教科教育の講義において，主体的かつ能動的な学習が進めれれるよう，講義そのものが「楽しい」と感じ取られるような内容と方法を準備し，より多くの良質な数学教育の経験を学生自身が持つ必要がある。そのことによって，彼らの算数・数学に対する否定的な〈信念〉を肯定的なものに組み替えることが重要である。

数学が現実に深く根ざし，そこでの問題解決にも有効であるという実感や，数学のおもしろさや楽しさを十分に伝えられるような授業をどう構想すればよいのだろうか。そのために，銀林浩（1975）の数学的問題解決の図式（図１）が参考になる。

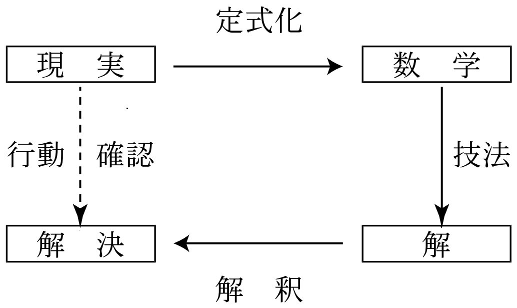


図１　数学的問題解決の図式

銀林によれば，数学的問題解決の過程は，現実世界の具体的な課題から本質的な要素と関係を抽き出して，数学の問題に定式化し，これを数学的技法を用いて解を求め，この解を再び現実世界で解釈し直して，もとの課題の解決とする，と整理できる。

つまり，現実の課題をそのレベルで直接行動によって解決する，のではなく一度数学の世界を通す《まわり道》を経て解決するところに数学的問題解決の特徴があるというのである。

これまでの数学教育は，図式右側の「数学の世界」の中での問題解決が中心で，左側の「現実の世界」との交流・往還は不問に付してきた。こうして学ばれた数学に対して，「なぜ日常的に使わない数学を入試で使わなければならないのか，ひたすら同じような問題を解く作業を繰り返していることの馬鹿馬鹿しさを感じる」と愚痴る学生は多い。

本稿では，学部必修科目の「数学概論」の授業の中で，「２進法によるマジックカード」とその発展課題（教育内容の選択）を取り上げ，「数学の世界」と「現実の世界」との往還的な学習（教育内容の獲得）と，それがどのように活用され発展していくのかを学習者との対話や学習者間の相互交流（教育方法の選択）を通して，学生の持つ否定的な数学観や学習観・授業観の転換の促進と，算数・数学を含む授業づくり（教育）への意欲と展望を育む契機とすることを目指した授業実践を行い，学生たちのレポート感想文やSDの分析を通して，その効果の検証を報告するものである。

２.「２進法による数当てマジックカード」とその発展課題による授業の概要

本実践は，2015年度後期に学部必修科目の「数学概論」において，ゲストティーチャーとして招かれた３回の講義で行われたものである。実施日と内容は，第１回が10月20日（火）「２進数で遊ぼう！」，第２回が10月27日（火）「３進数では？―２進数を発展させる」，第３回が11月10日（火）「誤り訂正符号理論」であり，受講者は主に１年生で60名の登録があった。

⑴　第１時「２進数で遊ぼう！」

①　数当てマジックカード―あなたの思い浮かべた数をピタリ！

まず，次のようなＡ～Ｅの５枚のカードを黒板に添付する。

A			
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

B			
2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

C			
4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

D			
8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

E			
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

「あなたの誕生日を当ててみましょう」と学生一人を指名する。教師に見えないように，白紙に誕生日を書いてもらい，他の学生全員にそれを憶えてもらう。その紙は隠してもらったあと，「Ａ～Ｅの５枚のカードを見て下さい。まず，月からいきます。あなたの誕生月のあるカードを教えて下さい。Ａにありますか…」と順次質問し，「――ＣとＤですね」と確認しながら，板書した表に「ある」と答えたＣとＤの欄には○，「ない」と答えたＡとＢとＥには×を記入する。「次に日です。誕生日のあるカードは…。――ＡとＢとＣとＥですね」。少し思案するふりをしながら「――あなたの誕生日は，12月23日！」。

教室全体が騒然となり，「えっー！　なんで～？」と驚きの声！ この時点ですでに，どのように誕生日を当てているのかを全員が考え始めている。さらに，学生用のマジックカードも配布し，５枚のカードを手に取りながらじっくりと考えてもらう。「相手が思い浮かべた数の当て方を見つけて下さい」と隣同士のペアもしくは近くの３～４人のグループで検討するよう促した。各グループともすぐに「どうして当てられるの？」「なぜ？」と話し合いに移行していった。

	A	B	C	D	E
月	×	×	○	○	×
日	○	○	○	×	○

しばらくして気づいたことを発表してもらう。あるグループは「あると答えたカードから共通な数を抜き出し，そこからないと答えたカードにある数を除けばよい」と発言。「例えば，12月なら…

Ｃ，Ｄにある	→	12	13	14	15	28	29	30	31	(共通な数)
Ａにない	→	12	~~13~~	14	~~15~~	28	~~29~~	30	~~31~~	(Ａにある数を除く)
Ｂにない	→	12		~~14~~		28		~~30~~		(Ｂにある数を除く)
Ｄにない	→	12				~~28~~				(Ｄにある数を除く)

となる！」。「なるほど！（同調の声）これなら当てられるね。でもこの方法で，先生のように早く正解にたどりつける？」。「けっこう時間がかかる…」。他にもいくつか出たが，カードをいじっているうちに「あると答えたカードの左上の数字を足せばよい」という発見が出て，「おー！」と声があがった。

C			
4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

D			
8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

→ 12月なら，左上の４と８を足して

４ ＋ ８ ＝12(月)

23日なら，　１＋２＋４＋16＝23(日)

↑

A			
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

B			
2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

C			
4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

E			
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

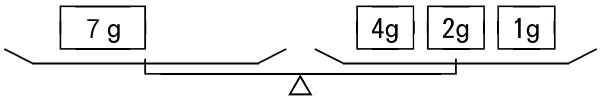
さっそくペアを組み交互にマジシャン役となってその方法でよいのか確かめてみる。すると，「これすーごい！」「楽しいー！」などの声が上がり，正しいことが確認された。

②　数当てマジックカードのトリック

「あると答えたカードの左上の数を足す」という発見は，マジックの方法であってなぜその方法でよいのかが解明されているわけではない。今度は，次の問題を通してトリックの解明に取りかかる。

［問題］　１ｇ，２ｇ，４ｇ，８ｇ，16ｇの分銅が，それぞれ１個ずつあります。これらの分銅を使って１ｇから31ｇの重さを量るにはどうすればよいでしょうか。

７ｇを例に分銅と天秤で考えると，次のようになる。



７ｇ＝４ｇ＋２ｇ＋１ｇ
↓　↓　↓
１　１　１
（分銅の個数で表現）

７ｇを含め，表に記された１g～31ｇそれぞれの重さに，使用する分銅の個数を記入していってもらう（下表左）。表が完成したところを見計らって，「Ａ～Ｅの５枚のカードは，１～31までの数（重さ）をどのように分類したものだろう？」と問うと，各グループとも待ちきれなかったように，カードと表を見比べながらの話し合いが始まった。トリックについて自分の気づきを交流し，議論を展開している様子である。

あるグループを指名すると，「１ｇ～31ｇの重さを，１ｇ，２ｇ，４ｇ，８ｇ，16ｇのそれぞれの分銅を使用する重さに分類していくと，これがマジックカードと同じになります（左表右）。例えば，Ａのカードには１ｇの分銅を使用する重さ，１，３，５，７，…，31が配置されています。同じように，Ｂのカードには２ｇの分銅を使用する重さが，Ｃは４ｇ，Ｄは８ｇ，Ｅは16ｇです」と明快に説明してくれた。

重さ＼分銅	16g	8g	4g	2g	1g
1 g	0	0	0	0	1
2 g	0	0	0	1	0
3 g	0	0	0	1	1
4 g	0	0	1	0	0
5 g	0	0	1	0	1
6 g	0	0	1	1	0
7 g	0	0	1	1	1
8 g	0	1	0	0	0
9 g	0	1	0	0	1
10g	0	1	0	1	0
11g	0	1	0	1	1
12g	0	1	1	0	0
13g	0	1	1	0	1
14g	0	1	1	1	0
15g	0	1	1	1	1
16g	1	0	0	0	0
17g	1	0	0	0	1
18g	1	0	0	1	0
19g	1	0	0	1	1
20g	1	0	1	0	0
21g	1	0	1	0	1
22g	1	0	1	1	0
23g	1	0	1	1	1
24g	1	1	0	0	0
25g	1	1	0	0	1
27g	1	1	0	1	0
28g	1	1	0	1	1
29g	1	1	1	0	0
30g	1	1	1	0	1
31g	1	1	1	1	0

１ｇの分銅を使用する重さ →

A

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

２ｇの分銅を使用する重さ →

B

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

４ｇの分銅を使用する重さ →

C

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

８ｇの分銅を使用する重さ →

D

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

16ｇの分銅を使用する重さ →

E

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

これを引き取って，「相手が思い浮かべた数（重さ）が，ＡとＢとＣとＥにあれば，その数（重さ）は，１（ｇ），２（ｇ），４（ｇ），16（ｇ）の数（分銅）を使用しているとマジシャンに教えていることになる。そこで，それらを足して，１＋２＋４＋16＝23，とすれば相手の思い浮かべた数（重さ）が出てくる。そして，それらの数（分銅）はカードの左上にある数というわけである。それで，あると答えたカードの左上の数を足せばよいのある」。これでトリックの解

明は完了である。

なお，2^nの分銅の個数を用いて，１→00001→１，２→00010→10，…，30→11110，31→11111のように０と１で数を表す方法を２進法，２進法で表した数を２進数ということを確認した。この数当ては２進数を利用した数学マジックだったのである。また，同じ原理のトリックが用いられ，計算を必要としない「ウィンドウズ・カード」による数当てマジックとちびまる子ちゃんのキャラクターを当てる「超能力カード」も紹介した（仲地他，2016を参照）。

③　暗号遊び・回転グリル

この時間の後半に，もう一つ２進数が活用されている例を紹介した。

［問題］　図のような５×５の文字の方陣があって，このひらがなの中の23文字を並べかえると，意味のある文章になります。その文章には，江戸時代の有名な俳人の句と作者の名前が入っています。その句の季語を答えて下さい。
ちなみに，この暗号文のキー・ナンバーは，82149です。

え	や	う	せ	ば
い	よ	の	か	わ
	み	あ	よ	し
む	こ	さ	に	し
る	い	し	み	ず

このままではどこから手をつけていいのかまったくわからないので，少しずつヒントを与えながら暗号解読を進めていく。まず，キー・ナンバーに着目し，それを２進数に変換するよう促した（右図）。

	16	8	4	2	1
8→	0	1	0	0	0
2→	0	0	0	1	0
1→	0	0	0	0	1
4→	0	0	1	0	0
9→	0	1	0	0	1

次に暗号文と同じ大きさの５×５のカードを準備し，１のマス目に相当するところをカッターナイフでくり抜いてのぞき窓を作ってもらう。そのカードを暗号文に重ね，順次右へ90°回転しながらのぞくよう指示する（下図）。

すると…。「しずかさやい・わにしみいる・せみのこえ・ばしようよむ」と暗号文が解読できる。この句の作者は，松尾芭蕉で，季語は「せみ」となる。

		う		ば
	よ			
			よ	
む				し

←

え			せ	
		の		
	こ			
			み	

←

い				わ
	み			
			に	
る		し		

←

	や			
			か	
				し
		さ		
	い			ず

このように，もとの文をそのまま使用し，その配列順序をばらばらにした暗号を「転置方式暗号」と呼ぶ。ここで取り上げたカードによる「回転グリル」はその代表的なもので，1881年オーストリア陸軍のフリーシュナー大佐によって考案され，実際に軍で使用されたものである。

回転グリルによる暗号の作り方を簡単に説明し，最後に「２進法のマジックは，はたして３進法でも可能だろうか」と次回への謎かけで第１時を閉じた。

⑵　第２時「３進数では？―２進数を発展させる」

①　３進数では？

数学はそもそも「考える学問」であるはずだが，高校の数学授業は，数学の内容（知識・技能）の伝達に重点が置かれがちで，学習者の側からすると，受動的なものになりやすく「考えること」より

も「憶える」ことに陥りやすい。「２進法のマジックカードは，はたして３進法でも可能なのか」という素朴な疑問をもとに，数学の問題がどのように発展，拡張，一般化されていくのか，「問いをもつこと」「考えること」の面白さや楽しさを感じさせるよう，次の問題からスタートする。

［問題］　２進数による数当てマジックカードやウィンドウズ・カードでたっぷり楽しんだ恵里子さんは，ふと「２進法で数当てマジックができるのだから，３進法でもできるのでは？」と思いつきました。あなたは，恵里子さんの思いつきをどう思いますか？

予想　ア　恵里子さんの思いつき通り，きっと３進法でも数当てマジックカードが作れるに違いない。

イ　いやいや数当てマジックカードは，２進法に固有なものでそれ以上の発展はない。

「３進法ではマジックはできない」と考える学生もいたが，全体の予想を集計すると，２進数の類推からできる派が多数をしめた。

分銅 / 重さ	3^2の位（９ｇ）	３の位（３ｇ）	１の位（１ｇ）
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	0	2
3	0	1	0
4	0	1	1
5	0	1	2
6	0	2	0
7	0	2	1
8	0	2	2
9	1	0	0
10	1	0	1
11	1	0	2
12	1	1	0
13	1	1	1
14	1	1	2
15	1	2	0
16	1	2	1
17	1	2	2
18	2	0	0
19	2	0	1
20	2	0	2
21	2	1	0
22	2	1	1
23	2	1	2
24	2	2	0
25	2	2	1
26	2	2	2

→

（３進数）
0
1
2
10
11
12
20
21
22
100
101
102
110
111
112
120
121
122
200
201
202
210
211
212
220
221
222

この問題を考えるために，２進数と同様に，１ｇ～26ｇまでの重さを１ｇ，３ｇ，９ｇの分銅を用いて天秤で量ってみる。ただし，今回は各分銅とも２個まで利用できるものとした。２進数での経験から具体的に分銅をイメージしながらスムーズに作業は進んだ（左図左）。

２進法と同様に，０，１，２の３つの数を使って表現した数を３進数ということを簡単に説明し（左図右），２進数のマジックとの比較で表をながめて気づくことはないかグループで話しあってもらった。ある学生は，「１回目の時間に隣の友だちと，３進法でできるの？と疑問に思っていたのでわくわくして仕組みを考えた。前と同じように，３進法を表にしてみるとある法則があることに気づいた。そして，２進数が二択だったから３進数では三択になるということを見いだせた。実際表にしてやってみてうまくいったのでとても嬉しかった」。つまり，２進数の場合，各位が１と０の２種類だけで，それが「ある・ない」の二択に対応していることに気づき，その類推から３進数の場合は，各位とも０，１，２の３つの数が使われているので，「各位とも三択にすればよい」と気づいたのである。

すると，１の位（X），３の位（Y），3^2の位（Z）の３つのカードを準備し，それぞれの位で，０の数を左，１を真ん中，２を右に配置すればよいことを確認し，カードを作成してもらった（次頁上図）。

遊び方は２進数の場合と同じで，０～26までの数の中から好きな数を１つ思いうかべてもらい，３枚のカードX，Y，Zをそれぞれ示し，「あなたの思い浮かべた数はカードの左，真ん中，右のどこにありますか？」と三拓で聞けばよい。例えば，「15」を思い浮かべた場合，各カードにあるその数の位置を答えてもらうと，X→左，Y→右，Z→中，となるので，Xのカードでは１ｇの分銅が０個，Yのカードでは３ｇの分銅が２個，Zのカードでは3^2の分銅が１個使用したことを聞き出したわけで，その積がそれぞれの位置の左上の数になっている。そこで，それぞれの位置の左上の数を，０＋６＋９＝15，と計算すれば，それが相手の思い浮かべた数になるというわけである。

X（１の位）

0	3	6	1	4	7	2	5	8
9	12	15	10	13	16	11	14	17
18	21	24	19	22	25	20	23	26

Y（３の位）

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26

Z（3^2の位）

0	1	2	9	10	11	18	19	20
3	4	5	12	13	14	21	22	23
6	7	8	15	16	17	24	25	26

② もっとシンプルに！

「２進数のカードのように，３進数のカードももっとシンプルにすることはできないだろうか？」。実際に３進数のマジックカードを実演しながら考えてもらった。すると，「各位のカードを９枚にバラバラにすると，二択にすることができる」ことにすぐに気づいた（下図）。

A			B			C			D			E			F		
0	3	6	1	4	7	2	5	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	12	15	10	13	16	11	14	17	9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	21	24	19	22	25	20	23	26	18	19	20	21	22	23	24	25	26

G			H			I		
0	1	2	9	10	11	18	19	20
3	4	5	12	13	14	21	22	23
6	7	8	15	16	17	24	25	26

「実際に切り離してみると，それでマジックはできました。しかし，枚数は９枚で多すぎるなと感じていました…」。さらに，遊んでいると，たし算の答えに０の有無は影響しないことに気づく発言が出て，「０が入ったカードは，なくてもマジックに影響はない」ので最終的に３進数のマジックカードは，次の６枚だけのシンプルなものにできる。

B			C			E			F			H			I		
1	4	7	2	5	8	3	4	5	6	7	8	9	10	11	18	19	20
10	13	16	11	14	17	12	13	14	15	16	17	12	13	14	21	22	23
19	22	25	20	23	26	21	22	23	24	25	26	15	16	17	24	25	26

６枚だけで，実際マジックが可能かペアを組んで確認してもらった。ここでの学びを学生は次のように記している。

――３進法では２進法よりもカードの枚数も多く，数字も大きかったけどやり方はほとんど同じスムーズに頭に入っていくのがわかりました。でもやっぱり頭を使うのですがそれがとても心地よく感じ，数学って本当に奥が深いものなんだと進んで学びたいと感じました。

この時間の最後に，表裏に数字の書かれた４枚のカードを配布し（下図），新しい数当てマジックを披露する。「１～80までで好きな数を一つ思い浮かべて下さい。その数を当てます」と一人を指名し，№１のカードから順次，表→裏と見せていき，思い浮かべた数がカードのどこにあるかを聞いていく。

№１（表）

14	15	16	17	18
19	20	21	22	23
24	25	26	27	28
29	30	31	32	33
34	35	36	37	38
39	40			

№１（裏）

41	42	43	44	45
46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60
61	62	63	64	65
66	67			

№２（表）

5	6	7	8	9
10	11	12	13	32
33	34	35	36	37
38	39	40	59	60
61	62	63	64	65
66	67			

№２（裏）

14	15	16	17	18
19	20	21	22	41
42	43	44	45	46
47	48	49	68	69
70	71	72	73	74
75	76			

№３（表）

2	3	4	11	12
13	20	21	22	29
30	31	38	39	40
47	48	49	56	57
58	65	66	67	74
75	76			

№３（裏）

5	6	7	14	15
16	23	24	25	32
33	34	41	42	43
50	51	52	59	60
61	68	69	70	77
78	79			

№４（表）

1	4	7	10	13
16	19	22	25	28
31	34	37	40	43
46	49	52	55	58
61	64	67	70	73
76	79			

№４（裏）

2	5	8	11	14
17	20	23	26	29
32	35	38	41	44
47	50	53	56	59
62	65	68	71	74
77	80			

「――№１の表と№３の裏，№４の裏ですね？」と確認し終えると…，「その数は…，23ですね！」とピタリと当てた。「このマジックも３進数を利用したもので，ヒントは２進数と同じように各分銅を１個しか使用しないこと」。こうして新しい課題を提起して授業を終えた。ある学生は，「また新しい疑問を残して授業が終わり，今度は友だちも加えてこのカードのトリックについて考えた。３進法による分銅の考え方に違いがあるのではとの意見が出て，ぼくは片方の天秤に分銅を置くのではなく，両方に置いて置いた分を引くのでは？　という考えにいたりそこで友だちとの討論を終えた」と記している。

⑶　第３時「±３進数のマジックカード」「誤り訂正符号理論」

①　±３進数のマジックカードのトリックの解明

これまでの学習から，２進数や３進数から10進数への変換は自然に学習され習得されている。冒頭でそれを整理して，その逆の10進数から２進数，３進数への変換は，タイル操作と対応させて説明した。

前時の最後に披露した４枚の新しい３進数のマジックカードを，「２進数同様，分銅を１個にできないか」と提起し，次の課題を提示する。

［問題］　２進数及び３進数での数当てマジックカードを作る過程から，

①　１ｇ，２ｇ，４ｇ，８ｇ，16ｇ，…，2^nｇ，…の分銅が１個ずつあれば，天秤を用いてどんな重さでも測定可能

②　１ｇ，３ｇ，９ｇ，27ｇ，81ｇ，…，3^nｇ，…の分銅が２個ずつあれば，天秤を用いてどんな重さ

でも測定可能

ということがわかりました。例えば，97ｇの重さは，

```
2)97          3)97
2)48 …1       3)32 …1
2)24 …0       3)10 …2
2)12 …0       3) 3 …1
2) 6 …0       3) 1 …0
2) 3 …0          0 …1
2) 1 …1
   0 …1
```

より，97を２進数に変換すると，「$1100001_{(2)}$」。すなわち，

$$97 = 2^6 + 2^5 + 2^0$$

よって，64(2^6)ｇ,32(2^5)ｇ，１(2^0)ｇの分銅１個ずつで97ｇの重さを量ることができます。

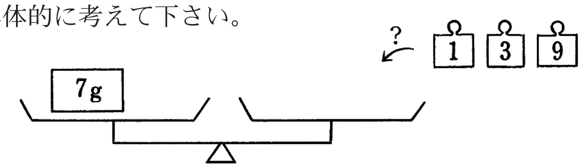
また，97を３進数に変換すると，「$10121_{(3)}$」。すなわち，

$$97 = 3^4 + 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 3^0$$

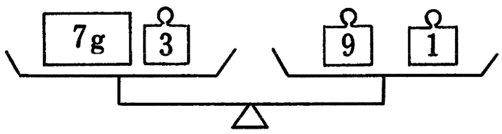
となって,81(3^4)ｇ，９(3^2)ｇ，１(3^0)ｇの分銅を１個ずつ，それに３(3^1)ｇの分銅を２個用意すれば，量ることができるのです。では，

③　１ｇ，３ｇ，９ｇ，27ｇ，81ｇ，…，3^nｇ，…の分銅が1個ずつならば，どうでしょうか。

７ｇの重さで具体的に考えて下さい。



１ｇ，３ｇ，９ｇ，27ｇ，…の分銅１個ずつでは，天秤の片方の皿だけに乗せてすべての重さを量ることはできない。７ｇの場合を具体的に考えることによって,「１ｇ，３ｇ，９ｇ，…の分銅を両方のに振り分ける」というアイディアがすぐに出てきた。こうすればどんな重さでも量ることが可能になる。



分銅 重さ	27ｇ	9ｇ	3ｇ	1ｇ	−27ｇ	−9ｇ	−3ｇ	−1ｇ
1				○				
2			○					○
3			○					
4			○	○				
5		○					○	○
6		○					○	
7		○		○			○	
8		○						○
9		○						
10		○		○				
11		○	○					○
12		○	○					
13		○	○	○				
14	○					○	○	○
15	○					○	○	
16	○			○		○	○	
17	○					○		○
18	○					○		
19	○			○		○		
20	○		○			○		○
21	○		○			○		
22	○		○	○		○		
23	○						○	○
24	○						○	
25	○			○			○	
26	○							○
27	○							

これを式に表すと，

$$7 + 3 = 9 + 1 \rightarrow 7 = 9 - 3 + 1$$

となる。同様に，２ｇ，４ｇ，５ｇ，６ｇ，８ｇ，10ｇなどを量るには，

$2 = 3 - 1$　　$4 = 3 + 1$

$5 = 9 - 3 - 1$　　$6 = 9 - 3$

$8 = 9 - 1$　　$10 = 9 + 1$

として，負の項の相当する分銅は左側の天秤に乗せると考えればよい。

結局，目標とする数（重さ）を，１，３，９，27…の加減で実現し，その符

号で左右の皿への振り分けを考えればよいことがわかる。１ｇ，３ｇ，９ｇ，…の各分銅を高々１個用いて，１ｇ～27ｇを量ったものが左の表である。

これまでの学習の類推から，１～80の数のカードへの振り分け方はすぐに出た。１～80までの数(重さ)で，27ｇの分銅を利用する数(重さ)を№.１のカードの表に，−27ｇを利用する数(重さ)を№.１の裏に配置する。同様に，№.２の表に９ｇ，裏に−９ｇ，№.３の表に３ｇ，裏に−３ｇ，№.４の表に１ｇ，裏に−１ｇ配置 したものが±３進数のマジックカードである。

	№.１	№.２	№.３	№.４
表	＋27	＋９	＋３	＋１
裏	−27	−９	−３	−１
なし	0	0	0	0

こうして，４枚のカードそれぞれについて，思い浮かべた数が「表にあるか」「裏にあるか」「表にも裏にもないか」を確認し，あると答えたカードの，右表に記された正負の重さ（数）を加えれば，その答えが思い浮かべた数である。ただし，結果が負の数の場合は，次の位の数81を足しておく。

遊び方を確認後，またペアを組んでマジックを楽しみながら正しいのか確かめた。

② 変形わり算

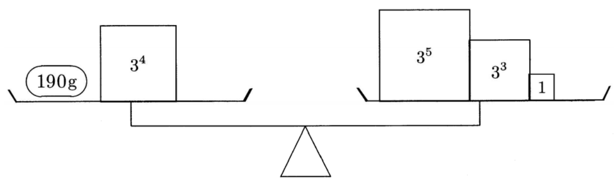
ところで，１，３，９，27…からいくつか選んで，＋と−を結べばどんな数でも表せることがわかったが，目標とする数が小さい場合は試行錯誤でも見つけることが可能だが，大きな数の場合は，そう簡単ではない。こうした場合に，「変形わり算」を利用すればよい。目標とする数を，３で割ったとき，①余りが０，１のときはそのままにし，②余りが２なら，商を１増やして余りを−１にする。

190を例にとると，下の変形わり算から，$196=3^5-3^4+3^3+1$となる。マイナスの項を左辺に移項して，

$$196+3^4=3^5+3^3+1$$

となる。天秤では，次のような状態である。

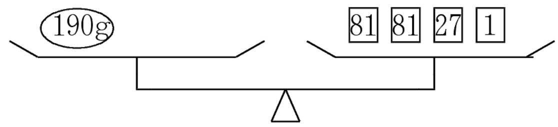
3）1 9 0
3）　6 3　…1
3）　2 1　…0
3）　　 7　…0
3）　　 2　…1
3）　　 1　…−1
　　　 0　　1



なぜ，このような「変形わり算」でうまくいくのだろうか？ それは…。

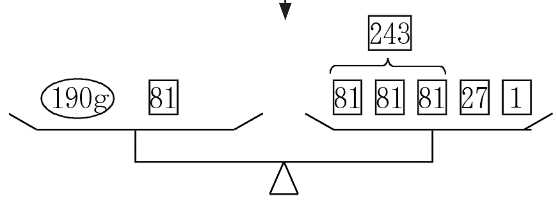
分銅２個まで

3）1 9 0
3）　6 3　…　1←１ｇが１個
3）　2 1　…　0
3）　　 7　…　0
3）　　 2　…　1　←27ｇが１個
　　　 0　…　2　←81ｇが２個



190＝81＋81＋27＋１

両天秤に81ｇを追加



190＋81＝81＋81＋81＋27＋１

190＝247−81＋27＋１

分銅１個だけ

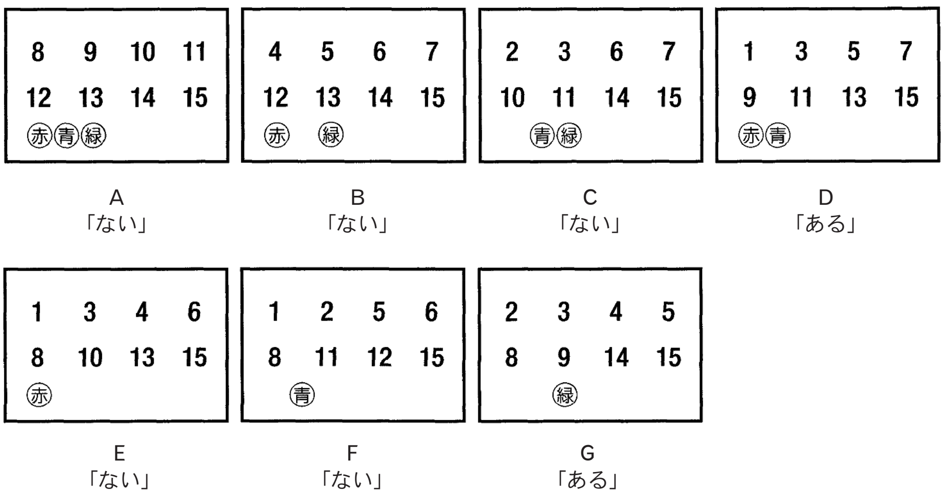
3）1 9 0
3）　2 1　…　0
3）　　 7　…　0
3）　　 2　…　1 ←27ｇが１個
3）　　 1　…−１ ←81ｇが左に１個
　　　 0　…　1

前頁上図で，分銅が２個使用されている重さ81ｇを，下図のように両方の天秤に新たに追加する。すると，余り２の部分の商が１となって，その余りは－１に修正されることになるのである。こうしたアルゴリズムの洗練の方向も数学を「考える」ことである。

③　誤り訂正符号付きマジックカード

続いて，次のような３色のシールが貼られた７枚のカードを黒板に貼付する（下図）。

これまでと同様に数当てマジックを実演する。「今回は，１回までならウソをついてもかまいません。あるのにないといったり，ないのにあるといったり…。もちろん正直に答えてもかまいません」といって，一人を指名，思い浮かべた数があるかないかを答えてもらう。



「――ＤとＧにあるのですね。…あなたはウソつきましたね。そのカードはＡです。そしてあなたが思い浮かべた数は…，９です！」。ウソをついても相手が考えている数を当てたことに，「すっご～い!!　なんで～!?」と衝撃が走って教室は騒然となった。

落ち着きを待ってマジックの仕組みを簡単に説明した。シールが１色のみのＥ，Ｆ，Ｇがウソを見破るためのカードで，正直に答えた場合３色のシールの個数はすべて偶数になる。上記の場合，あると答えたカードの（赤，青，緑）の個数は，Ｄ（１，１，０），Ｇ（０，０，１）で計（１，１，１）となって，３色とも奇数であることからウソをついていることがわかる。そして，そのカードは３色のシールが（１，１，１），つまり（赤，青，緑）のＡである。これを「ある」に変更し，ウソ発見のための検査カードＧを除いて，２進数のマジックと同様ＡとＤの左上の数をたして，９と当てたのである。

現在の携帯電話やパソコンなどのネットワーク通信には，送信されたデータがノイズなどによって通信途中で，抜け落ちたり（情報の欠落），変化してしまう（情報の誤り）場合があり，受信されたデータから誤りを検出し（発見），誤りを復元したり（訂正）することができるシステムが組み込まれている。その数学的な理論が，「誤り訂正符号理論」である。「誤り訂正符号付きマジックカード」は，その直感的理解のためのモデルである。

このような数学の社会的な有用情報を提供・説明した後，学生用のカードを配布し，遊び方を確認して，ペアを組んでマジックを楽しんで授業を終えた。

3　感想文とSDによる授業効果に関する考察

(1)　感想文による分析

「数学概論（伊禮担当分）」に関して提出された毎回の豆レポートに記された学生たちの感想文（提出者数，第１回59名，第２回57名，第３回58名，計174名）をもとに，いくつかのキー・ワードを拾って，授業の効果について考察をくわえておこう。

①　「楽しさ」や「面白さ」などの実感

学生の感想文を読むと，まず目につくのが，「楽しい」「面白い」「興味がわく」「意欲がわく」という言葉である（表１）。例えば，「今までの数学はあまり楽しいイメージはなかったが，今回の授業はとても楽しくて，２進数に興味がわいたし，この楽しさを誰かに伝えたいと思いました。実際，家族にまる子ちゃんのウィンドウズカードをやってみせたら，すごく不思議がっていておもしろかったです。」，「２進法だけではなく，３進法，４進法ならどうなるか等，普段は全く興味が持てないような数学の法則に興味が持て，ひきこまれた！」「２進数や３進数は，あまりなじみがなく，あまり気にしたことはなかったけど，それを利用して簡単にマジックができるし，色々と発展させることができるから，面白いと思った。」などである（アンダーラインは筆者）。

表１　数学と授業の「楽しさ」「面白さ」等の実感を記した感想

○　まず初めに，こんなに数学が楽しいものだと人生ではじめて知りました。同時に，こんな風に今までも，勉強できたら，良かったのにと思いました。この様に数学に親しみを持ちながら学習をすれば，頭の中によくその内容が入ってくると思うし，いつまでも頭の中に残すことができると思います。また，この授業の中で，自分たちで考えて行動したり，問題を解いたりする場面が多く，その活動もまた，頭の中に記憶したり法則を深く理解していくのに非常に役に立つと思いました。

○　講義が始まる前は，どんな難しい話を聞くんだろうなあと，正直びくびくしていました。でもいざ始まるとそれはもう楽しい講義で，加えてずっと微妙な理解だった２進数もようやく分かり，とても有意義な時間でした。私は昔は算数・数学は好きでしたが，高校に入ってから段々苦手になり嫌いになりました。でも今回の講義で，以前は持っていた，数学を楽しむという感覚を久しぶりに思い出した気がします。

○　最初，２進法と聞いて嫌な記憶ばかりが蘇ってきました。しかし，全然関係のないと考えるところにも数学的なトリックがたくさんあり，苦手な数学ですが，興味をもって意欲的に授業に臨むことができ，自分でも驚いています。

○　本講義では，「学んでいる」という感覚ではなく，「遊んでいる」という感覚で，２進法の概念を獲得することができた。遊びの中で，数学を学ぶという授業を，今まで想像したことが無かったため，とても斬新であった。また，講義の中で，自然に「なぜ？」という疑問が生み出され，それを解決するために夢中になっていたとき，とても楽しさを感じていた。（ここまで第１回講義の感想）

○　前回よりも内容がレベルアップしていたので，より考え，楽しむことができた。小学生なんかも，少しずつレベルをあげていくともっと数学が楽しくなるんじゃないかと思った。

○　数学概論での授業は，数学に関することももちろんですが，それだけでなく，「楽しく学ぶ」ということも勉強することができると思います。「楽しい!!」という感覚によって，苦手な数学への抵抗感がなくなって，より自主的，能動的に学ぶことにつながっているのだということを毎回実感することができます。本当に楽しい授業です。

○　前回の続きとしての授業で，前回の理解がよくできていたため，今回の授業も，よく理解し，楽しく受けることができた。また，今回も３進法を使ってカードマジックをすることができるということに気づき驚きました。この遊びのような感覚の中で３進法という数学的な学習が同時にできていると，理解もはやいと思うし，理解したいと思う気もちもより強くなると思いました。逆に，４進法や５進法でもできるのかみんなで考えてみるのも楽しいだろうなと思いました。中学・高校では，よく理解できていなかった単元がこのようにして理解できるようになるとは思いませんでした。ありがとうございました。（ここまで第２回講義の感想）

○　今回の講義で，次々に発展していく進数の遊びがどんどん難しくなっていく過程を第１，２，３回を通して感じることができた。（中略）でも回をかさねていくごとに，数学的考えも養えていったし，どんどん楽しくなってきたのですごくよかった。数学をここまで，幅広く楽しめるのも教材をつくっていく上で，すごく大事なことだと思うし，自分がもし教師になったときの教材づくりに少しでも，役に立てていきたいと思った。

○　３回の授業すべて楽しく数学を学ぶことが出来た。今回の授業は前々回，前回と違い応用力を必要とする内容ではあったが，「マジック」というやり方でやれば，生徒も必死に考え，理解しようとすると思ったので，楽しく学ぶことの重要性を再認識した。

○　これまでの２回の講義でたくさん２進数と３進数を扱っていて，それでもまだ発展させて利用することができることに驚いたし，何よりこの３回の講義が，数学の授業なのに楽しかったことが，一番の驚きでした。
○　今回はまず前時の最後に配ったマジックカードのトリック解明をしたが，２週間の間，自分で考えていた予想と当たっていてうれしかった。しかし，マジックカードを作るのが大変そうだと思っていたので，変形わり算を見たとき，数学的で面白いと感じた。次に取り扱った誤り訂正符号理論の内容では，私が大学に入って習った数学の内容が小学生が相手でも使えるような，直感的に把握できるような教材になっていて驚いた。小中高の数学の教材研究をしていくためには，やはり大学数学の専門的な内容も必要であると実感できた。２進数という数学の内容からここまで濃厚な３コマを展開することができるということは本当にすごいと思った。楽しくて，やりがいのある授業をありがとうございました。（ここまで第３回講義の感想）

こうした感想文に現れる「楽しい」や「面白い」「興味がわく」など言葉は，複数の記述もカウントしてみると，第１回が96カ所，第２回が50カ所，第３回が61カ所，計207カ所にものぼる。特に第１回目の頻度は突出して，「誕生日当てのマジック」による導入が，学生たちの興味・関心を喚起し，そのトリックの解明のプロセスが，それを持続させ，マジックと２進数（数学）の繋がりが明らかになる最終的な解決と，さらにその応用の提示が，数学とその授業の面白さや楽しさを実感させているものと考えられる。

②　数学の意義や有用性の実感

数学の意義や有用性について触れた感想も多く見られた（表２）。「数学を使った手品」や「軍で使われていた暗号」，「ウソを発見して，そのウソを訂正する」誤り訂正符号のマジックカードなど，数学が身近にもの応用され，その意義や有用性について記している。

表２　数学の意義や有用性の実感を記した感想

○　私はこの講義を受けて，数学って楽しいんだなと，心から感じることができました。そのように思ったことの最大の理由は，数当てマジックのトリックの解明に向けてコミュニケーションが取れたということです。私の知っている数学は，黒板に向かい公式に当てはめて解くというものでしたが，そういうものが一切なく，隣の人とディスカッションをしたりして，とても雰囲気がよく，たのしかったです。このように，数学はたのしいと思えたことは，とても大きいと思います。たのしいと思えたということは，今後のやる気にかかわっていくと思うからです。数学がこんなに有意義だと思えてとても嬉しかったです。
○　今回の講義で，２進数，３進数の可能性の大きさが，はかりしれないということを感じました。２進法，３進法のマジックに，４進法，５進法を組み合わせるともっとすごいマジックができるのではないかと思い，自分でできるだけ発展させてマジックを開発できたらいいなと思いました。
○　私は最初，あまり数学へのイメージはあまり良くありませんでした。机に向かってひたすら問題をとくというイメージです。楽しいとかおもしろいと考える前にいつも難しいなとか大変だなと思っていました。でもこの講義で，数学が身近になったような気がします。数学はなにも数字をただ並べていくだけではなく遊びにもなり，気軽なものなんだと気づくことができました。本質としての数学についてもっと知りたくなりました。とても気づきが多く考え方が変わった講義でした。
○　いつも計算ばっかりの数学にこんな楽しく接することができた事に感動した。数学を使った手品がこんなにも簡単なネタだったのがびっくりした。数学に対するイメージが計算だらけの暗い感じだったのが，この授業を通して，楽しくて明るいイメージになったし，理解すると数学も楽しいことがわかった。
○　カードだけで，こんなに楽しく授業ができるとは思わなかった。一つ数字を当てるだけが，ウソを発見して，そのウソを訂正するまでになって，とても不思議でおもしろかった。
○　面白くないものを，使うかどうかもわからないで勉強するのは苦痛だから，こういう日常にあるものと数学をからめた授業は楽しいです。暗号がとくにおもしろかった。軍で使われていた暗号にふれられるのって，何だかドキドキでした。自分にも解けるんだって思うと何だか得意な気分です。（中略）友達と手品しながら勉強できて，とても楽しかったです。自分が高校生までのあいだに，こんな授業を積極的にとり入れてほしかった…。今日は，楽しい時間をありがとうございました。
○　高校の教科書で勉強する数学は，抽象的で，イメージしずらい内容が多くて（虚数とか，対数関数，行列とか…）わかりにくいと思う。だけど，今回の授業は，クイズみたいな感覚でできおもしろかったし，暗号や，ケータイ，パソコンの情報の送信に利用されてるんだと思うとよかった。

これらを読むと，数学の社会的な有用情報（暗号や情報送信への利用）は，学習者の興味・関心を高めていることに寄与していることがわかる。ただし，そうした有用情報は，実際の活動（マジックを行う）や作業（暗号を作る）などを通しながら，実感をともなって受けとめられていることが重要であろう。「軍で使われていた暗号にふれられるのって，何だかドキドキでした。自分にも解けるんだって思うと何だか得意な気分です」，「２進数，３進数の可能性の大きさが，はかりしれないということを感じました」などの感想がそのことを示している。

また，数学の意義を理解した記述もかなり見られた。すなわち，「自分たちの身の回りにある携帯電話やコンピューターは，数学が深く結びついていることを知って，数学って大切なんだなぁーと思いました」。こうした意義の理解が，「２進法についていままで嫌だったけど，今日ので，好きになった気がするし，もっとやりたいと思った」，「暗号についてもっと知りたいと思った」，「楽しい時間を過ごせた。もっと数学の深いとこまで勉強してみたい」など，さらなる意欲を喚起していると思われる。

③　「問い」を立て、「考える」ことの楽しさ・面白さの実感

一つの数学的現象の解明が終わると，そこから次の課題を設定し展開していくのも数学の特徴である。その特徴から，解明された問題をもとに，自然な類推や条件変更などによって，問題を発展させたり，拡張・一般化したりすることで新たな「問い」を立て，その「問い」からまた「考える」ことがはじまるのである。こうして数学の体系的な理解（深い理解）へと進んでいくものと考えられる。

第２時以降は，「問い」を立てることの数学の方法を明示的に指導することを心がけた。それが学生たちにどう受けとめられているだろうか（表３）。

表３　「問い」を立て、「考える」ことの楽しさや面白さの実感

○　今回の講義では数学の考えるという部分を発展させた内容で，前回２進数でマジックカードを使い数当てゲームをやり３進数ではできるんだろうかという問題に取り組んでいきました。今までなら，２進数で数当てゲームをしたらそれで終わりなんですが，その先にこれではどうだろうか？という疑問を実際に探究していく事で喜びや新しい発見がみつけられる大切さや数学についての興味が増していきました。大学の講義では私達の受けてきた普通授業の中で感じる事のできない数のおもしろさやその問題に対してより工夫し，簡単にしていけないかという事を考える楽しさを学ぶ事ができました。小・中・高の数学や算数では解くことへの技術ばかりが求められていて，こういう大学の講義のような考える事や発展させる事の大切さを導入していけたら良いなと思いました。

○　前回は２進法について時間いっぱいやっていたので，今回の講義では新たな内容に入っていくものだと思っていたが，２進法の発展と聞いてまだできることがあるのかと驚いた。内容としては前回よりも高度で面白かった。左／中／右のカードを作り，それをバラバラにして，さらに０がいらないと気付く過程ではハッとさせられることが多かった。このように教材について，色んな視点から発展させていくことの面白さ・大切さを身をもって知ることができた。

○　３進数を利用したマジックでは，他の方法はないか，もっとシンプルにできる方法はないかとグループで話し合う機会も多く，この前２進数を勉強しているからこそそれを利用して自ら学ぼう，発展させようという意欲がでてくると思った。そのおかげで２進法ではできたけど，３進法でできるためにはどうすれば良いのかを考え，自然に３進法の特徴と考え方を学ぶことができた。学んだことを発展させるということは，子どもたちが自ら学ぶ上で非常に重要なことだと感じた。

○　自分は，前回の授業から３進法では，０，１，２と数を３種類使うので，無理じゃないかなと思いました。でも，ちゃんと分類してあげれば，どんなものでもn進法で作れるんだろうなと思いました。あと，０から始まるカードは除いても問題ないのだと思いました。数学は，まず基本的なものを証明したり，考えることをしたあとに，拡張したり，一般化することで色々なものを考えることでより楽しく勉強できたなと思いました。

○　今日は，前回の２進数と同じ考え方で，３進数ではできるかというもので，自分はなんとなくできると思った。でも，こう思ったのは，先生に「３進法ではできるか」と聞かれたから考えたことで，やはり投げかけは大切だと感じました。こういう習ったことを，そこで終わりにしないで，応用させてみようという視点を持とう

と思った。また，３進数でも，カードをバラバラにしても出来たり，０からはじまるカードはいらないなど，また新しい気づきがあった。数学は答えは１つだけど，それを求める過程はいくつかあるから，その楽しみも，この授業で感じられました。
○　前回に続き，さらに２進数を発展させて考えた。数字を足したり引いたりしても相手の数を当てることができるというのは全く思いつかなかった。正直，「どこまで発展させることができるのだろう？」という感じ。これが数学の面白さであり，自分が数学が好きな理由になっている。とても興味深い授業でした！
○　２進数は０，１で表すので分銅で表すとどうしても１個しか使うことができないけど３進数は２個まで使うことができるのに１つだけしか使わないという条件はとても考えさせられました。最終的な話，図にしてみて大きい数（かたまり）をつくってそこから数を引いて調整していく考えには驚きと納得でした。そして，それは２進数や３進数の理解を深め，モデル化することでより分かりやすくなったと感じました。また計算式で表す事でその数を計ることができたということが結論的に解明されたような感じがして自分的にはスッキリしました。初回の授業からここまで複雑な考えや数が発展していく中でどんどん理解が難しくなる中で，ここまで「あぁー!!」と思うことはすごい講義　だったと思います。

これらの感想からわかるように，「考える事や発展させる事の大切さ」や「色んな視点から発展させていくことの面白さ・大切さを身をもって知る」ことができて，「数学の面白さ」やその「理解も深まり」，「数学が好きな理由になって」，「数学が楽しいというイメージ」に繋がっている様子がわかる。

⑵　SD による考察

「良い－悪い」「好き－嫌い」など情緒的な対修飾語を両極に配置した尺度を準備して，概念の内包的意味を測定する SD (Semantic Differential) によって，「数学概論」の講義から表象される数学やその授業に対する「イメージ」や「感じ」などの情緒的反応をもとに，その情緒的イメージが講義前後にどのように変化したかを分析する。また，SD を数的処理するため，左の肯定的なイメージを表す修飾語から否定的なイメージへ１～４点を配した。その平均値によって，2.5未満であれば肯定的なイメージを，2.5以上であれば否定的なイメージを表象していることがわかる。なお，SD は前川公一の開発した「授業評価観点表」を，彼自身が課題とした項目の一部を入れ替えて使用する（藤井他，1982）。

講義直前の第１回調査では，数学や数学の授業に対して抱いている肯定的なイメージは，25項目中ほぼ半数の，⑴「明るい－暗い」，⑷「おもしろい－つまらない」，⑸「活発な－おとなしい」，⑹「真面目な－不真面目な」，⑼「まとまりのある－バラバラな」，⑾「愉快な－不愉快な」，⒁「好きな－嫌いな」，⒃「良い－悪い」，⒄「楽しい－苦しい」，⒅「目のさめるような－眠くなるような」，(21)「満足な－不満足な」，(22)「積極的な－消極的な」，(24)「とけこめる－とけこめない」の13項目であった。この講義の受講者が，教育学部にあって教員志望の学生であることを勘案すれば，数学や数学の授業に対して全体的に好意的な態度を持っていることは肯けることである。

肯定的なイメージがもっとも強い（つまり平均値が低い）項目から順に見ていくと，数学やその授業は，真面目で（６／1.47），良い（16／1.85），そして，おもしろいし（４／1.88），まとまりがあって（９／1.95）」，楽しいし（17／2.02），好き（14／2.03）だなどと感じていることがわかる。

全体的には良好であるが，その一方で，否定的なイメージを表象しているものも12項目ある。具体的に平均値の高い項目から順に見ていくと，数学やその授業は，複雑な（15／3.13），難しい（12／3.08），硬い（２／3.07），緊張した（10／3.05），重い（19／3.03），きつい（25／3.02），冷たい（３／2.88），長い（23／2.85），こせこせした（８／2.77），不親切な（７／2.58），わかりにくい（20／2.55），きゅうくつな（13／2.53）ものとのイメージも持っていて，肯定的なものと拮抗していることが伺える。

次に，３回の講義終了後の変化を見てみよう。まず，全体的な傾向として，25項目中24項目がプラスの方向（SD プロフィールの左への移動）へ大きく変化していることがわかる（図２）。さらに，平

均値2.5未満の項目も22項目あり，もともと否定的なイメージが表象されていた12項目も，講義後には３項目に減って，全体的により肯定的なイメージへと変化していることがわかる。その2.5以上の３項目も，(10)「ゆるんだ－緊張した」(3.05→2.60)，(15)「簡単な－複雑な」(3.13→2.73)，(23)「短い－長い」(2.85→2.56) とプラスの方向への移動である。

この変化が有意なものかどうかを検定してみた。講義の前と後では評点のばらつきがかなりあり，等分散仮説が棄却される項目があった。(4)(5)(11)(13)(14)(17)(18)(24)の８項目である。これらについては，分散が等しくないと仮定した２標本によるt検定を行い，他の項目については通常のt検定を行った。その結果，５％水準で有意な項目は，(6)(16)(23)の３項目あり，他は(9)を除く21項目が１％水準で有意で，合わせて24項目で有意な変化である。

変化の大きさを示す統計量tの値の高い項目を順に見ていくと，「数学概論」で扱われた数学やその授業は，温かかくて(3)，のびのびした(8)，柔らかい(2)もので，明るく(1)，自由で(13)，やさしく(12)，目のさめるような(18)もので，活発で(5)，おもしろいし(4)，満足で(21)，楽しい(17)ものだと受けとめられているといえるだろう。

唯一，マイナス方向への変化が，(6)「真面目な－不真面目な」(1.47→1.73) であるが，この講義が「ゲームとして体感し，考えていくことで，数学の不思議さや面白さを学び」，「分銅に置きかえて考えたり，カードを使って実際に実演してみたりと，頭の中ではなく目に見える形」の展開だったため，通常の数学の授業のイメージとかなりかけ離れているためと考えられる。つまり，学生たちにとっては，「目に見える形」「実演」「体感」などの言葉から推察されるように，この項目については肯定的なイメージを表象しているのであり，教師側とイメージの持ち方が逆転していると考えられる（表４，図２）。

表４　平均値の差の検定

項目	授業前	授業後	t
(1)	2.43	1.67	5.651*
(2)	3.07	2.24	5.652*
(3)	2.88	2.00	6.689*
(4)	1.88	1.31	4.276*
(5)	2.27	1.60	4.569*
(6)	1.47	1.73	-1.872**
(7)	2.58	2.27	2.533*
(8)	2.77	1.84	6.306*
(9)	1.95	1.84	0.708
(10)	3.05	2.60	3.104*
(11)	2.17	1.62	3.777*
(12)	3.08	2.31	5.499*
(13)	2.53	1.67	5.504*
(14)	2.03	1.60	2.731*
(15)	3.13	2.73	2.976*
(16)	1.85	1.56	2.086**
(17)	2.02	1.47	4.010*
(18)	2.37	1.69	4.690*
(19)	3.03	2.49	3.642*
(20)	2.55	2.11	3.217*
(21)	2.23	1.67	4.015*
(22)	2.20	1.64	3.633*
(23)	2.85	2.56	1.976**
(24)	2.37	1.93	2.958*
(25)	3.02	2.47	3.845*

被験者は授業前60名，後45名。*1％水準で有意，**5％水準で有意。アンダーラインは分散が等しくない検定。

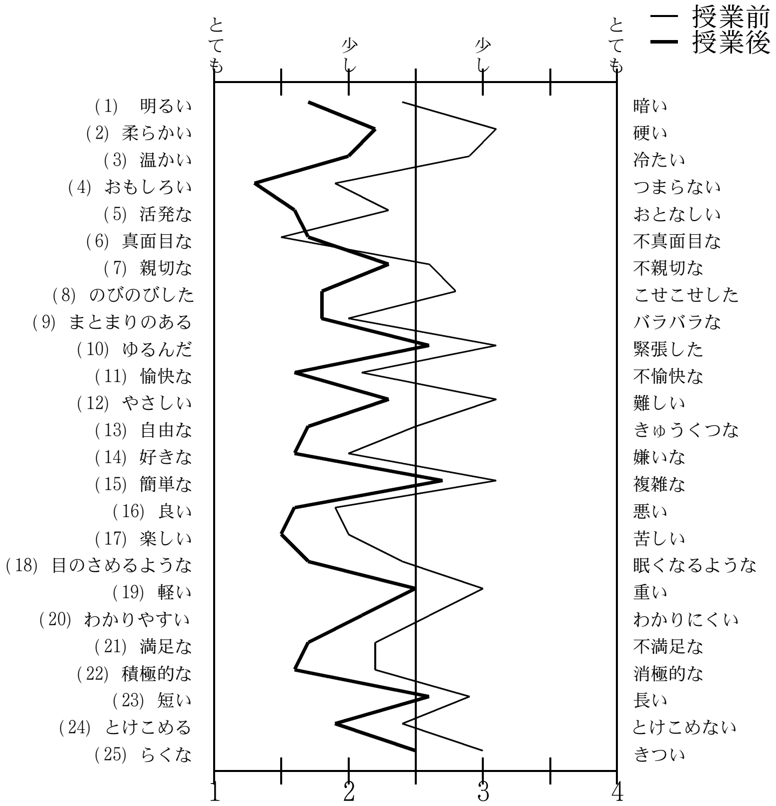


図２ 授業前後のSDプロフィール

４　おわりに―教職への意欲と展望

本稿では,「数学概論」の「２進法によるマジックカード」とその発展課題について取り上げ,「数学の世界」と「現実の世界」との往還的な学習（対象世界との対話）と，学習者との対話や学習者間の相互交流（他者との対話），及び学習内容の再構成を促す豆レポートや小課題－ウィンドウズカードや超能力カードの実演とそのリアクションレポート，暗号作成レポートー（自己との対話）による学習を組織し，高校までの長い被教育体験を通して形成されてきた数学に対する態度（数学観）や数学の授業に対する見方（学習観や授業観）をより肯定的なものへの転換を促し，教職（算数・数学を含む授業づくり等）への意欲と展望を育む契機とすることを目指した実践の概要とその効果の検証を報告してきた。

授業とは，教師と子どもの一般的なコミュニケーションの過程ではなく，教材を媒介としたコミュニケーションの過程であり，それを通して教科内容への理解を深めていく営みである。そのため，教師には，指導する教科内容に関して，幅広く深い知識と技能を身につけていることが求められる。実践的指導力の育成のためには，発問や指示，板書等の授業技術を磨くことも必要なことだが，教える内容に関する検討も重要である。つまり，教科の専門性を高めるとともに，それを自覚的に教育とつなげて考えていくことが求められているのである（「授業を想定した教科内容の知識」の発達）。今回の講義は，数学の目標・内容の全体像を理解し，子どもたちの実態（発達段階，つまずき，興味・関心等）を想定しながら指導過程を構想し，さらに，数学を教えることの社会的・教育的意味（「なぜ数学を学ぶのか」）を踏まえながら,「学問の系統」を「教育の系統」へと再構成した内容を，実践的に体験してもらった。特に，これから教職を目指す学生たちが大学の初年次においてこうした体験を持つことは重要だろう。彼らの感想文を読むと，こうした意図は十分に伝わったものと考えている。

最後に，この講義によって，教職への意欲や展望を語った学生たちの最終レポート（「数学概論から学んだこと」）の一部を紹介して本稿の結びとしたい。

―――全３回の授業を通して，私にとっての数学の授業に対する考えに変化がありました。今までの私は，数学に興味はあったとしても，授業で習った公式を覚えそれに従って考えて問題を解いていました。また，時には数学を習う意味がわからないと感じることもありました。日常生活において，お金の計算など，小学校の算数で習うことは絶対に必要ですが，数学Ⅰ・Ａや数学Ⅱ・Ｂなどはこれから先使うことはないだろう，と思っていたからです。

今回詳しく学んだ進数については，２進法は高校の情報の授業でも少し触れ，数学Ａの「整数」の単元で習ったことがありましたが，私は少し難しい印象を受けていました。しかし，第１回目の授業で，いきなり始まったマジックショーにとても驚き,「まさかあの２進法でマジックができるのか！」と衝撃を受けました。そこから，どのようなトリックがあったのか自分たちで考えていくことで，タネがわかった時の「なるほど！」という感情が自分の学びに繋がっていることを感じました。このことから，自分でなぜこうなるのだろう，などと疑問を持ち，積極的に考えることで，自らの学びを得ることができ，楽しいと感じることができるのだろうと思いました。

また，教材の大切さを強く実感させられた授業でもありました。授業を通して行ったさまざまなマジックも，教壇で教師が実演して見せるだけでなく，生徒一人一人が自分の教材を手にして目で見て，触って考える，ということで決して受動的ではなく能動的に，数学を実践して学習しているという実感がわきました。生徒同士でマジックを実演し合うことはとても楽しかったですし，一緒になって考えることで自分の意見を伝えたり相手の考えを聞いたりすることで，数学を通してコミュニケーションを図っていることに気がつきました。教え合うことで，お互い新しい考え方に出会うことが出来るので，とても効果的な学習方法だと感じました。

そして，教室の雰囲気です。高校生までの数学の授業は，教師が教壇で一生懸命説明をしているのに

も関わらず，生徒の方は難しくて耳を傾けているつもりでも眠くなってしまい，教師の声だけが教室に響き渡っている，といった印象でした。しかし，今回はその正反対でした。教師も生徒もとても楽しそうに授業をしていたからです。教師が楽しそうに明るく授業をすることでその気持ちがダイレクトに生徒に伝わってくることを感じました。このことから，授業の雰囲気作りも教師の大切な役目であることに気がつくことができました。私も将来教師になるので，生徒が楽しんで自ら学びたいと思わせるような授業づくりをしていきたいです。

全３回を通して，２進数で学んだことを次週で３進数へ発展させるなど，前回学んだことの確認をしながらまた新しく応用を学ぶことで，自身の成長を感じることができました。「楽しくない，わからない，数学が嫌いになる」といった負のサイクルではなく，「楽しい，わかった！　数学が好きだ」という良い循環を作ることが生徒の向上心を生むのだと思います。（中略）今回の授業では，生徒皆が興味をもって積極的に考えることができたと思います。私自身，小学生の頃のような「面白い！」という好奇心を持って授業に臨んでいました。児童・生徒だった頃の楽しい授業というものに対する感覚を思い出すことができ，また生徒目線にたって授業を受けることができました。

先ほど述べたように，今回の授業では，「導入」のマジックで興味を引きつけられ，「知りたい！」と関心を持つことができました。人は自分の関心のあるものや，自分に関係するものに関しては興味を持ちやすいと思うので，私も「導入」で生徒の心をつかめるような授業づくりを考えていきたいです。また，念入りな教材研究をし，生徒が主体的に学べるような教材づくりをすること，自ら学びたいと思わせる雰囲気作りができるように，今回の授業を参考に考えていきたいです（後略）。

[引用及び参考文献]

秋山　仁，2007,『秋山 仁　数学センスをみがこう基礎編』NHK 出版，7-20

伊禮三之，2005,「２進数で遊ぼう！―数当てマジック（連載『楽しい数学』の１年⑤）」『数学教室 №645』国土社，74-77

伊禮三之，2005,「Two-circle roller―転がりの数学（連載『楽しい数学』の１年⑦）」『数学教室 №647』国土社，71-73

伊禮三之，2011,「事例研究；２進数で遊ぼう！―新学習指導要領における『数学活用』に向けた教材開発―」『第44回数学教育論文発表会論文集（第１巻）』日本数学教育学会，141-146

伊禮三之，2011,「３進法による『数当てマジックカード』」『数学教室№714』国土社，94-95

伊禮三之，2012,「２進法の発展教材としての３進数による数当てマジックカード―新学習指導要領における『数学活用』に向けた教材開発―」『北陸地区数学教育協議会40周年記念誌』北陸地区数学教育協議会，244-249

銀林　浩，1975,「数学でなぜ授業が問題になるか？」『研究と実践 第43号』数学教育協議会，10-22

高橋　寛，1999,『新編バイパス　確率のる・う・る』三省堂，53-54，167-168

土井幸雄，2006,『数とパズルの18話』日本評論社，1-13

仲地夕南・西平華菜子・森根穂香・伊禮三之，2016,「家族や友人と遊びつつ深い学び直しを促す課題－２進数を使って遊ぼう！の授業から―」『数学教室 №772』国土社，14-17

西山　豊，1993,『人とヒトデとサッカーボール―生活の中の数理を解く（三省堂選書176）』三省堂，1-22

藤井悦雄監修・前川公一他，1982,『授業研究法マニュアル』教育出版，100-121