

下負荷面モデルによる繰返し円形応力負荷を受ける砂の変形挙動の予測 および接線応力速度の効果

Deformation behavior for sand subjected to a cyclic loading of a circular stress path
by the subloading surface model with tangential stress rate effect

瀬戸内秀規*, 橋口公一**, 鹿内健志***, 岡安崇史****

Hideki SETOUCHI, Koichi HASHIGUCHI, Takeshi SHIKANAI, Takashi OKAYASU

- * 工修, 琉球大学助手 農学部生産環境学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原1番地)
 ** 工博, 農博, 九州大学教授 大学院農学研究院生産環境科学部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)
 *** 農博, 琉球大学助教授 農学部生物生産学科 (〒903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原1番地)
 **** 農博, 九州大学助教授 大学院農学研究院生産環境科学部門 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

The subloading surface model which fulfills the mechanical requirements for constitutive equations, i.e. the continuity, the smoothness conditions, the work rate-stiffness and the Masing effect relaxation has been extended so as to describe the inelastic stretching due to the deviatoric tangential stress rate for the subloading surface. The model is called the *tangential-subloading surface model*. In this article, the subloading surface model enabling the description of deformation behavior of a cyclic loading with the tangential rate effect is applied to the prediction of the deformation behavior of sand subjected to a cyclic loading of circular stress path in the π -plane deviating significantly from the proportional loading. The validity of the model and the tangential stress rate effect are verified comparing with the test data.

Key Words: elastoplasticity, inelastic stretching, tangential plasticity, subloading surface model, yield surface

1. はじめに

材料の弾塑性挙動の表現は、工学上の問題を理論的に予測する際に不可欠である。しかしながら、古典弾塑性論は降伏面内部を純粋弾性域と仮定しており、降伏面内部の応力変化による塑性変形を予測し得ない。繰返し負荷においては塑性変形が集積する弾塑性挙動を表現できないなどの問題がある。このため1960年以降、繰返し負荷に対する材料の塑性変形挙動を表現する繰返し塑性モデルが種々提案されてきた¹⁾⁻¹¹⁾。これらのモデルの中で、橋口により提案された“初期下負荷面モデル”⁶⁾⁻⁷⁾は、古典論における降伏面（以降、下負荷面モデルにおいては正規降伏面と称する）の内部に常に現応力点を通して正規降伏面に相似な形を保ちながら膨張/収縮する下負荷面を仮定するのがその基本的特性で、関連流動側を採用しており、連続性条件、滑らか条件および仕事率・剛性緩和の力学的要求条件^{12),13)}を満たす合理的な数学的構造を有する利点がある。また、正規降伏面と下負荷面の相似中心が塑性変形とともに移動すると仮定することにより、繰返し負荷挙動を表現し得るように拡張された“拡張下

負荷面モデル”⁹⁾は、比例負荷の繰返し負荷に対する土や金属の弾塑性挙動の予測が行われ、本モデルの適用性が実証されている¹⁴⁾⁻¹⁶⁾。

他方、これらの弾塑性構成式における塑性ストレッチングの方向および大きさは、降伏面の接線方向の応力速度いわゆる接線応力速度に依存しないことから次のような限界を有する。1) 非比例負荷において非現実的に剛性の高い応答を予測する。従って、非比例負荷状態に至る塑性不安定現象を適切に予測できない。2) 塑性ストレッチングの方向は、応力速度の方向に依存しない。3) 異方塑性ポテンシャル面が導入されない限り、塑性ストレッチングの主軸と応力の主軸の共軸性を示す。

そこで、Hashiguchi and Tsutsumi¹⁷⁾は、接線応力速度の偏差成分いわゆる“偏差接線応力速度”によって生じる非弾性ストレッチング（以下“接線ストレッチング”と称する）を下負荷面モデルに導入した“接線・下負荷面モデル”を提案した。接線・下負荷面モデルは、せん断帯の形成やバルジングおよびバックリングの変形の拡散モードを対象とした土や金属の分岐変形現象の予測に適用されている¹⁷⁾⁻²⁰⁾。しかしながら、これらの解析は相似中心が応力空間の原点に固定された初期下負荷面モデルに

接線応力速度効果を導入して、巨視的には比例負荷近傍の単調負荷挙動を対象としたものである。

本研究では、拡張下負荷面モデルに接線ストレッチングを導入し、代表的な非比例負荷である平均応力一定の繰返し円形応力負荷を受ける地盤材料の変形挙動のシミュレーションを行い、実測値との比較により本モデルの適用性および接線ストレッチングの効果を実証する。また、下負荷面の膨張/収縮および移動、回転の状態の推移および弾性、塑性、接線ストレッチングの方向、大きさなどの分析を行う。

本論文では、応力（速度）、ひずみおよびストレッチング（ひずみ速度）の符号は引張を正とする。

2. 構成式

拡張下負荷面モデル⁹⁾に接線ストレッチング¹⁷⁾を導入した接線・下負荷面モデルに基づく地盤材料の弾塑性構成式について概説する。

2.1 接線応力速度を考慮した下負荷面モデル

ストレッチング \mathbf{D} （速度勾配 \mathbf{L} の対称成分 $\mathbf{D} \equiv (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$ ）は、弾性ストレッチング \mathbf{D}^e と非弾性ストレッチング \mathbf{D}^i に加算分解され、さらに非弾性ストレッチングは塑性ストレッチング \mathbf{D}^p と接線ストレッチング \mathbf{D}^l に加算分解される。つまり、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^i \quad (1)$$

$$\mathbf{D}^i = \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^l \quad (2)$$

ここに、弾性ストレッチング \mathbf{D}^e は次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3)$$

\mathbf{E} は 4 階の弾性係数テンソル、 $(\)^{-1}$ はその逆テンソルを表し、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力、 $(\dot{\ })$ は客観性を満たす共回転速度を表す。なお、 \mathbf{E} は次の Hooke 型で与えられると仮定する。

$$E_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4)$$

ここに、 K および G はそれぞれ体積弾性係数およびせん断弾性係数である。また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタで $\delta_{ij} = 1 : i = j$, $\delta_{ij} = 0 : i \neq j$ を満たす。

下負荷面は次式で表される。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H}) = RF(H) \quad (5)$$

ここに、

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{s} - R(\mathbf{s} - \mathbf{a}) \quad (6)$$

2 階のテンソル \mathbf{H} およびスカラー H は、それぞれ異方硬化変数および等方硬化変数である。2 階のテンソル \mathbf{a} は正規降伏面内部の参照点で、 $\bar{\mathbf{a}}$ は下負荷面内部の \mathbf{a} の共役点である。 \mathbf{s} は正規降伏面と下負荷面の“相似中心”であ

る。 R ($0 \leq R \leq 1$) は正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比を表し、正規降伏状態への接近の度合を表すので、“正規降伏比”と呼ばれる。

相似中心 \mathbf{s} の移動則は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{s}} = c_s \|\mathbf{D}^p\| \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} + \dot{\mathbf{a}} + \frac{1}{F} \left\{ \dot{F} - \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \quad (7)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}, \quad \hat{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{s} - \mathbf{a} \quad (8)$$

ここに、 c_s は材料定数である。 $(\dot{\ })$ は物質時間微分を示す。 $\|\ \|$ は大きさを表す。

正規降伏比 R の発展則は次式で与える。

$$\dot{R} = U \|\mathbf{D}^p\| \text{ for } \mathbf{D}^p \neq 0 \quad (9)$$

ここに、 U は、次の条件を満たす R の単調減少関数である。

$$U = \begin{cases} \infty & \text{for } R = 0, \\ 0 & \text{for } R = 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$(U < 0 \text{ for } R > 1).$$

関連流動則に従う塑性ストレッチング \mathbf{D}^p は次式で与えられる。

$$\mathbf{D}^p = \lambda \bar{\mathbf{N}} = \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\boldsymbol{\sigma}})}{\bar{M}_p} \bar{\mathbf{N}} \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \bigg/ \left\| \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad (\|\bar{\mathbf{N}}\| = 1) \quad (12)$$

ここに、 λ は正值の比例係数である。塑性係数 \bar{M}_p は次式で与えられる。

$$\bar{M}_p \equiv \text{tr} \left[\bar{\mathbf{N}} \left(\bar{\mathbf{a}} + \left\{ \frac{F'}{F} h - \frac{1}{RF} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{h} \right) + \frac{U}{R} \right\} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right) \right] \quad (13)$$

$$F' \equiv \frac{dF}{dH} \quad (14)$$

h , \mathbf{h} および $\bar{\mathbf{a}}$ は λ を 1 次で含み、それぞれ \dot{H} , $\dot{\mathbf{H}}$ および $\dot{\bar{\mathbf{a}}}$ に対して次式で関係づけられる。

$$h \equiv \frac{\dot{H}}{\lambda}, \quad \mathbf{h} \equiv \frac{\dot{\mathbf{H}}}{\lambda} \quad (15)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{a}}} \equiv \frac{\dot{\bar{\mathbf{a}}}}{\lambda} = \dot{\mathbf{z}} - U(\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{a}) - R(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{a}}) \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{\dot{\mathbf{a}}}{\lambda} \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{z}} \equiv \frac{\dot{\mathbf{z}}}{\lambda} = c_s \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} + \dot{\mathbf{a}} + \frac{1}{F} \left\{ F' h - \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\mathbf{s}}, \mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \mathbf{h} \right) \right\} \hat{\mathbf{s}} \quad (18)$$

“接線ストレッチング” \mathbf{D}^l は“偏差接線応力速度” $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i^*$ によって次式で与えられる。

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{T} \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_t^* \quad (19)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^* \equiv \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_m \mathbf{I}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m \equiv \frac{1}{3} \text{tr} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (20)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^* = \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_n^* + \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_t^* \quad (21)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n^* \equiv \text{tr}(\bar{\mathbf{n}}^* \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^*) \bar{\mathbf{n}}^* \quad (22)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_t^* \equiv \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^* - \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_n^* \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}^* &\equiv \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^* \left/ \left\| \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^* \right\| \right. \\ &= \frac{\bar{\mathbf{N}}^*}{\|\bar{\mathbf{N}}^*\|} \quad (\|\bar{\mathbf{n}}^*\| = 1) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{N}}^* \equiv \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^* \left/ \left\| \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)^* \right\| \right. \quad (\|\bar{\mathbf{N}}^*\| \neq 1) \quad (25)$$

(*) は偏差成分を表す。I は単位テンソルである。接線非弾性係数 T は次式で与えられる。

$$T = \frac{\xi}{R^b} \quad (26)$$

ここに、 $b (\geq 1)$ は材料定数で、 ξ は一般に応力の材料関数および内部変数で与えられる。

式(1), (2), (3), (11)および(19)より、ストレッチング \mathbf{D} は次式で与えられる。

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} + \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}})}{M_p} \bar{\mathbf{N}} + \frac{1}{T} \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_t^* \quad (27)$$

応力速度をストレッチングで表す逆関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} &= \frac{1}{1 + \frac{2G}{T}} \\ &\left\{ \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{\text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D})}{M_p + \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{N})} \left[\mathbf{E} \bar{\mathbf{N}} + \frac{2G}{T} \right. \right. \\ &\left. \left. \left\{ \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{N}) \mathbf{I} - \left(\bar{M}_p + \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\mathbf{N}} \right. \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \left. \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{N}) \right) \frac{\bar{\mathbf{n}}^*}{\|\bar{\mathbf{N}}^*\|} \right\} \right] + \frac{2G}{T} \text{tr}(\mathbf{E} \mathbf{D}) \right. \\ &\left. \left. \left. \left. \left(\frac{1}{3} \mathbf{I} - \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\mathbf{N}} \frac{\bar{\mathbf{n}}^*}{\|\bar{\mathbf{N}}^*\|} \right) \right\} \right\} \right. \end{aligned} \quad (28)$$

負荷基準は次式で与えられる²¹⁾⁻²³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0} : \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D}) > 0, \\ \mathbf{D}^p = \mathbf{0} : \text{tr}(\bar{\mathbf{N}} \mathbf{E} \mathbf{D}) \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

2.2 地盤材料の材料関数

本節では、上述の構成式に含まれる材料関数の地盤材料に対する具体形¹⁵⁾を以下に示す。

負荷関数 $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H})$ は次式で与えられる。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{H}) = \bar{p}(1 + \bar{\chi}^2) \quad (30)$$

ここに、

$$\bar{p} \equiv -\frac{1}{3} \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (31)$$

$$\bar{\eta} \equiv \bar{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\beta}, \quad \bar{\mathbf{Q}} \equiv \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*}{p} \quad (32)$$

$$\bar{\chi} \equiv \frac{\|\bar{\eta}\|}{\bar{m}} \quad (33)$$

\bar{m} の具体形については後述する。

土の場合、異方硬化変数 \mathbf{H} を“回転硬化変数” $\boldsymbol{\beta}$ とし、その発展則は次式で与えられる²⁴⁾。

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = b_r \|\mathbf{D}^{p*}\| \|\bar{\eta}\| \bar{\eta}_b \quad (34)$$

ここに、

$$\bar{\eta}_b \equiv \bar{m}_b \bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\beta}, \quad \bar{\mathbf{t}} \equiv \frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} \quad (35)$$

$$\mathbf{D}^{p*} \equiv \mathbf{D}^p - \frac{1}{3} D_v^p \mathbf{I}, \quad D_v^p \equiv \text{tr} \mathbf{D}^p \quad (36)$$

\bar{m}_b の具体形については後述する。

等方硬軟化関数 F は次式で与えられる。

$$F = F_0 \exp \left(\frac{H}{\rho - \gamma} \right) \quad (37)$$

ここに、 F_0 は F の初期値、 ρ および γ は、 $(\ln p, \ln v)$ 平面 (v : 体積) における正規圧密 (弾塑性) 線および膨潤 (弾性) 線の勾配である。等方硬軟化変数 H は次式で与えられる。

$$\dot{H} = -D_v^p + \mu \|\mathbf{D}^{p*}\| (\|\bar{\eta}\| - \bar{m}_d) \quad (38)$$

μ は材料定数である。 \bar{m}_d の具体形については後述する。

接線非弾性係数 T における関数 ξ は次式で与えられる¹⁷⁾。

$$\xi = \frac{p}{a \bar{\chi}^c} \quad (39)$$

ここに、

$$p \equiv -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad (40)$$

a および c は材料定数である。

式(10)の条件を満たす正規降伏比 R の発展則における関数 U は次式で与えられる。

$$U = -u \ln R \quad (41)$$

u は材料定数である。

体積弾性係数 K およびせん断弾性係数 G は次式で与えられる。

$$K = \frac{p}{\gamma}, \quad G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K \quad (42)$$

ここに、 ν はポアソン比である。

2.3 降伏面

非比例負荷において応力は降伏面に沿う経路を辿るため、変形の予測の際には適切な形状を有する降伏曲面式を構成式に導入することが不可欠である。また応力速度とストレッチングの線形関係および塑性ポテンシャル論に従う最大塑性仕事の原理を満たすためには滑らかな凸閉曲面性を有する降伏曲面が望ましい。そこで本研究では、これらの条件を満たす Hashiguchi²⁵⁾によって提案された次式を関数 \bar{m} として採用する。

$$\bar{m} = \frac{14\sqrt{6} \sin \phi_c}{(3 - \sin \phi_c)(8 - \sin 3\theta_\eta)} \quad (43)$$

$$\sin 3\theta_\eta \equiv -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \bar{\eta}^3}{\|\bar{\eta}\|^3} \quad (44)$$

ここに、 ϕ_c は軸対称圧縮における内部摩擦角である。

図1に π 平面における式(43)の \bar{m} による錘面 $\|\mathbf{Q}\| = \bar{m}$ を $\phi_c = 15, 30, 45^\circ$ の場合について、Mohr-Coulomb破壊基準と比較して示す。

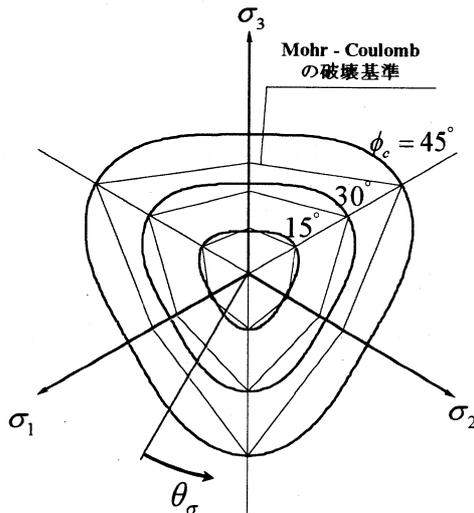


図1 Hashiguchi²⁵⁾の錘面の π 平面形状

図1に示すように、本式は内部摩擦角の大きさによらず滑らかな凸閉曲面性を満たす。なお、式(43)は、 ϕ_c が $22^\circ 01'$

以下の場合、軸対称伸張側でMohr-Coulombの破壊基準より小さい値を示し、 ϕ_c が $22^\circ 01'$ より大きい場合はMohr-Coulombの破壊基準より高い値を示す。

また、式(35)および(38)の \bar{m}_b および m_d はそれぞれ次式で与えられる。

$$\bar{m}_b = \frac{14\sqrt{6} \sin \phi_b}{(3 - \sin \phi_b)(8 - \sin 3\theta_\eta)} \quad (45)$$

$$m_d = \frac{14\sqrt{6} \sin \phi_d}{(3 - \sin \phi_d)(8 - \sin 3\theta_\sigma)} \quad (46)$$

$$\sin 3\theta_\sigma \equiv -\sqrt{6} \frac{\text{tr} \sigma^{*3}}{\|\sigma^*\|^3} \quad (47)$$

ここに、 ϕ_b および ϕ_d は、材料定数である。

3. 実測値との比較

円形応力負荷の精度良い実験は難しく、また実験結果も大変少ない。そこで、本研究では1989年、米国クリーブランドで開催されたワークショップにおいて予測コンテストの対象とされた Reid Bedford 砂を計算の対象とした。試験の詳細は文献²⁶⁾に述べられている。

供試された砂の相対密度47%である。本砂の物理特性を表1に示す。

表1 Reid Bedford 砂の物理特性

試料	Reid Bedford砂
砂の含有率	99.43%
土粒子密度	2.65 g/cm ³
最大密度	1.74 g/cm ³
最小密度	1.46 g/cm ³
平均粒径(D_{50})	0.25mm
C_u	1.47

なお、実測値は真の三軸試験により得られたもので、本試験に対して図2のように座標系 (x_1, x_2, x_3) がとられる。

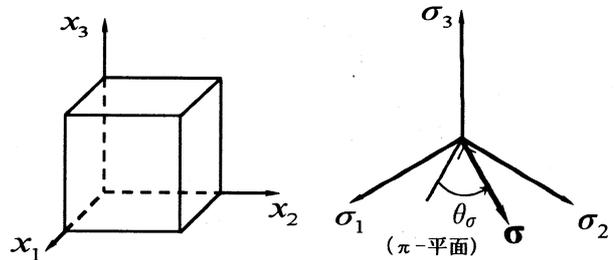


図2 真の三軸圧縮試験における座標系

3.1 繰返し円形応力経路試験

平均応力一定の円形応力経路試験は、図3に示すように π 平面内で偏差応力の大きさ $\|\sigma^*\|$ を一定に保ちながら応

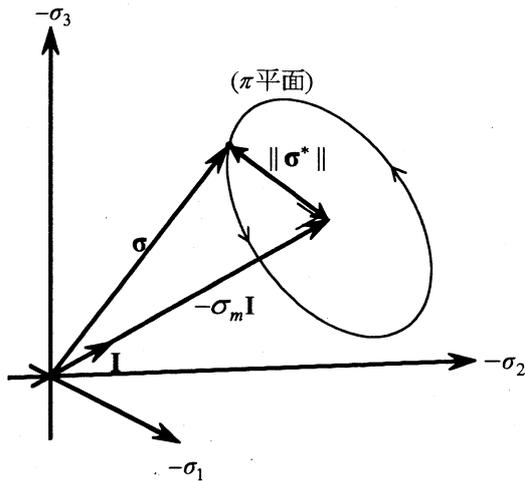


図3 平均応力一定の円形応力負荷経路

力が円形径路を描くように主応力を変化させる試験である。負荷過程は、下記の等方圧縮過程→偏差応力負荷過程→2回転の円形応力負荷過程の3段階からなる。

- 1) 等方圧縮過程：平均応力の初期値 $\sigma_0 = -100$ kPa から -345 kPa まで等方圧縮する。
- 2) 偏差応力負荷過程：平均応力 $\sigma_m = -345$ kPa を一定に保ちながら偏差応力が $\|\sigma^*\| = 262$ kPa になるまで応力を $\Delta\sigma_1 : \Delta\sigma_2 : \Delta\sigma_3 = 0.5 : 0.5 : -1.0$ の比率で変化させる。
- 3) 円形応力負荷過程：平均応力 $\sigma_m = -345$ kPa および偏差応力 $\|\sigma^*\| = 262$ kPa を一定に保ちながら3主応力を次式に示すように正弦的に変化させて π 平面内に応力を円形に負荷する。

$$\sigma_1 = \sigma_m + \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \sin\left(\theta_\sigma + \frac{2}{3}\pi\right) \quad (49)$$

$$\sigma_2 = \sigma_m + \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \sin\theta_\sigma \quad (50)$$

$$\sigma_3 = \sigma_m + \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \sin\left(\theta_\sigma - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (51)$$

これより、応力増分は次式で与えられる。

$$\Delta\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \cos\left(\theta_\sigma + \frac{2}{3}\pi\right) \Delta\theta_\sigma \quad (52)$$

$$\Delta\sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \cos\theta_\sigma \Delta\theta_\sigma \quad (53)$$

$$\Delta\sigma_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\sigma^*\| \cos\left(\theta_\sigma - \frac{2}{3}\pi\right) \Delta\theta_\sigma \quad (54)$$

応力は $\theta_\sigma = 30^\circ$ から $\theta_\sigma = 750^\circ$ までの2回転を与える。

3. 2 接線・下負荷面モデルによる変形挙動の予測

図4に示す2回の除荷・再負荷を含む繰返し等方圧縮試験の実測値から決定した材料定数および初期値を表2に示す。予測結果は実測値の変形挙動を適切に表現しており、相似中心の移動によりヒステリシスループも適切に表現されている。

表2 材料定数および初期値

材料定数	硬/軟化	等方	体積	ρ	0.005
	Rの発展			u	35
	相似中心の移動			c_s	25
	弾性定数			γ	0.0025
	ポアソン比			ν	0.3
初期値				F_0	300 kPa
				β_0	0
				s_0	0
				σ_0	-100I kPa

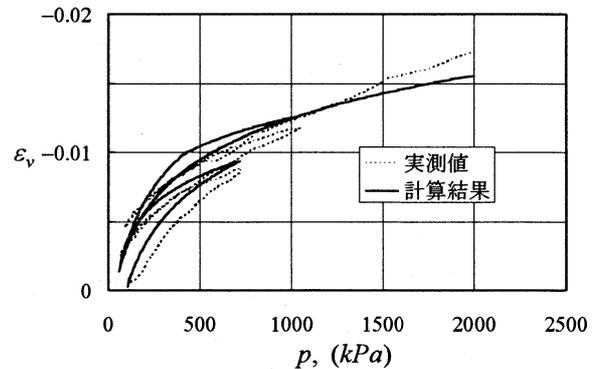


図4 繰返し等方圧縮試験のシミュレーション

表1に示した以外の材料定数については、文献¹⁵⁾の砂の解析で用いられた材料定数を参考に本試験結果に適合するように、表3の通りに決定した。

表3 内部摩擦角、回転硬化、等方硬軟化および接線非弾性係数に関する材料定数

材料定数	軸対称圧縮状態における限界摩擦角		ϕ_c	28°	
	硬/軟化	等方	μ	0.8	
			ϕ_d	29°	
		偏差	b_r	60	
			ϕ_b	26°	
	接線非弾性係数T			a	0.008
				b	1
				c	1

図5は、表2および3の初期値と材料定数を用いて円形応力負荷計算を行った時の応力角 $\theta_\sigma = 120, 210, 300$ および 390° 時における下負荷面を $\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2)/2 - p$ 平面(図5(a))および π 平面上(図5(b))に示したものである。また、図中には、それぞれ応力点において非弾性ストレッチング(D^p , D^i , D^r)の方向とその相対的

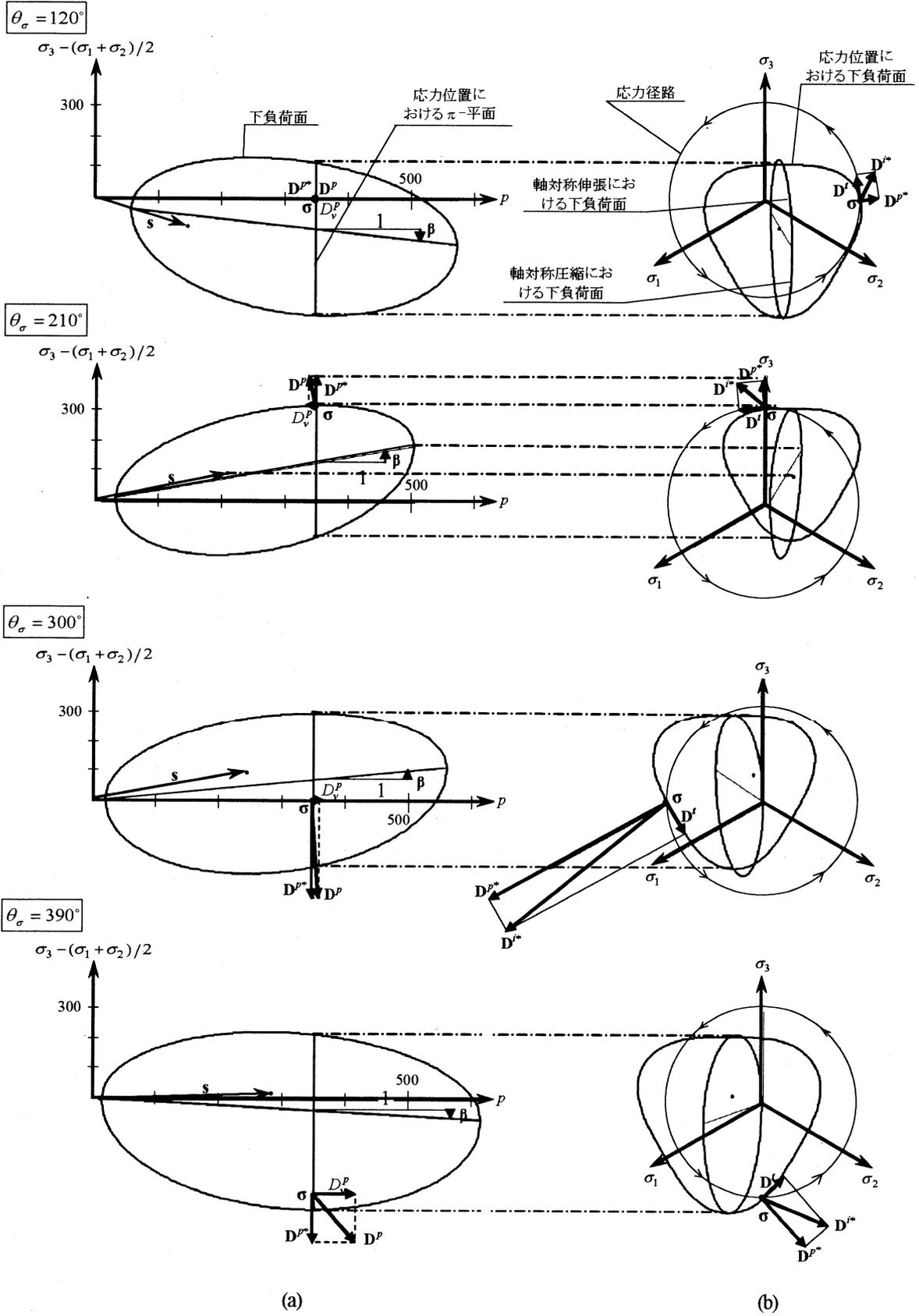


図5 円形応力負荷による下負荷面の状態とストレッチングの発生状況

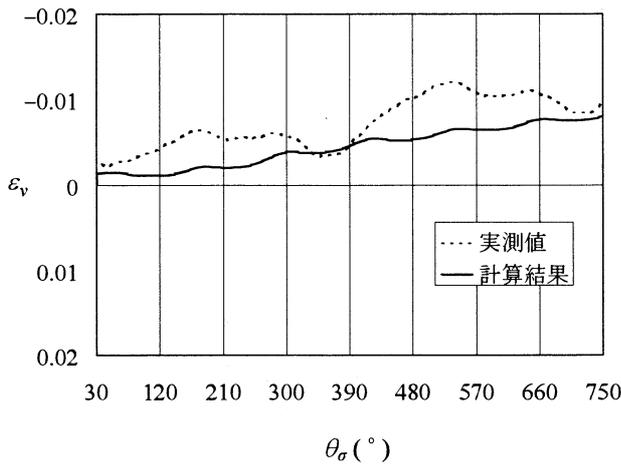
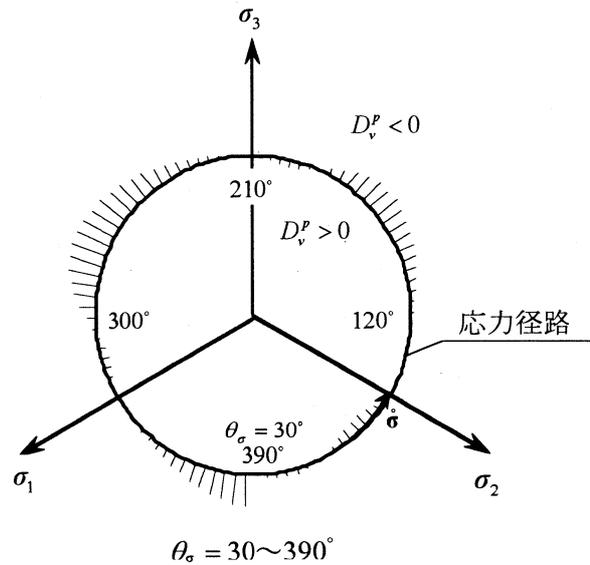


図6 応力角 θ_σ と体積ひずみ ϵ_v の関係

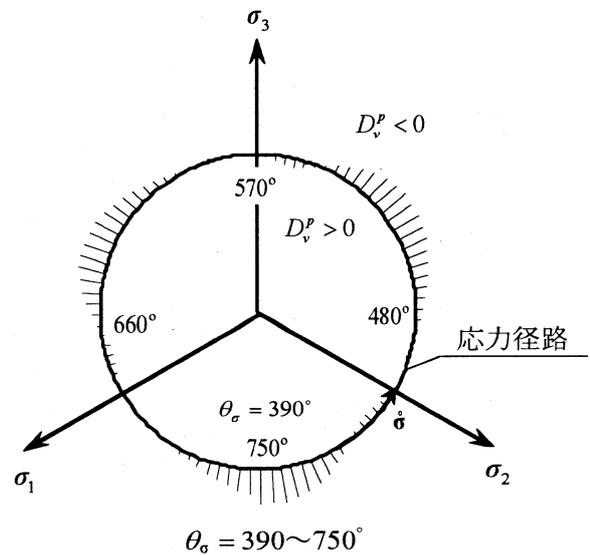
大きさをベクトル表示している。図5(a)および(b)から、下負荷面が回転硬化変数 β および相似中心 s の発展則に従い回転および移動を伴いながら膨張/収縮する様子がわかる。また、下負荷面の挙動にตอบสนองする非弾性ストレッチングの方向が空間的に示されている。

図6は、応力角 θ_σ に対する体積ひずみ ϵ_v の変動を実測値と比較して示したものである。計算における体積ひずみはストレッチングのトレース値の集積によって求められるが、接線ストレッチングは、偏差接線応力速度($\text{tr } \dot{\sigma}^* = 0$)によってもたらされるため体積ひずみには寄与せず、さらに、本研究で対象としている円形応力負荷の場合、平均応力が一定($\text{tr } \dot{\sigma} = 0$)の条件であるので、弾性ストレッチングは体積ひずみには寄与しない。従って、円形応力負荷過程においては塑性ストレッチングのトレース値つまり塑性体積ストレッチング D_v^p のみが体積変化を表現することになる。予測された体積ひずみは、実測値に対してずれがみられるが実測値と同様に θ_σ の増加とともに体積収縮を維持する。また、実測値の体積ひずみは単調な収縮でなく周期的にわずかな膨張を伴いながら収縮している。この現象は、計算結果の体積ひずみにおいても予測されている。図5(a)でわかるように、下負荷面の膨張/収縮、回転および移動によって周期的に塑性体積ストレッチング D_v^p の方向が変わることが推察される。このように、非比例負荷における体積変化は、下負荷面の膨張/収縮、回転および相似中心の移動によって適切に表現できる。図7は応力位置での塑性体積ストレッチング D_v^p の符号およびその相対的大きさを $\theta_\sigma = 30 \sim 390^\circ$ および $\theta_\sigma = 390 \sim 750^\circ$ の場合でそれぞれ図示したものである。

次に、 π 平面内の円形応力負荷で予測される弾性ひずみ、塑性ひずみおよび接線ひずみそれぞれの挙動を明らかにするために、 π 平面上にひずみ経路をそれぞれ図示して考察する。図8に π 平面上における弾性ひずみ、塑性ひずみおよび接線ひずみ経路を示した。弾性ひずみ経路は、弾性ストレッチング D^e の方向が応力速度の方向と一致することから円形を示す。塑性ひずみ経路は、 π 平面における下負荷面を時計方向に $\pi/2$ だけ回転させたような形状を示し



$\theta_\sigma = 30 \sim 390^\circ$



$\theta_\sigma = 390 \sim 750^\circ$

図7 応力角 θ_σ に対する塑性体積ストレッチング D_v^p

ている。これは、図5(b)に示しているように関連流動規則に従う塑性ストレッチング D^p は常に下負荷面の垂直方向に生じるためである。接線ストレッチング D^t の方向(図5(b)参照)は下負荷面に接する偏差応力速度によってもたらされるため、接線ひずみの経路は下負荷面の π 平面形状に類似した形状を示す。また、接線ひずみは常に正規降伏比 R に依存して徐々に導かれている。一方、弾性ひずみ、塑性ひずみおよび接線ひずみ量の大小関係は大きい方から順番に塑性、接線、弾性ひずみとなっている。

ところで、図8で π 平面上の塑性ひずみおよび接線ひずみ経路について考察したように、非比例負荷において応力は降伏面に沿う経路を辿り、塑性ストレッチングおよび接線ストレッチングつまり非弾性ストレッチングは降伏面の形状に直接依存する。このため、非弾性ストレッチングを予測する際には適切な形状を有する降伏面を採用することが不可欠である。特に、本研究で対象としている π 平面上での円形応力負荷の場合には、式(43)で示したように π

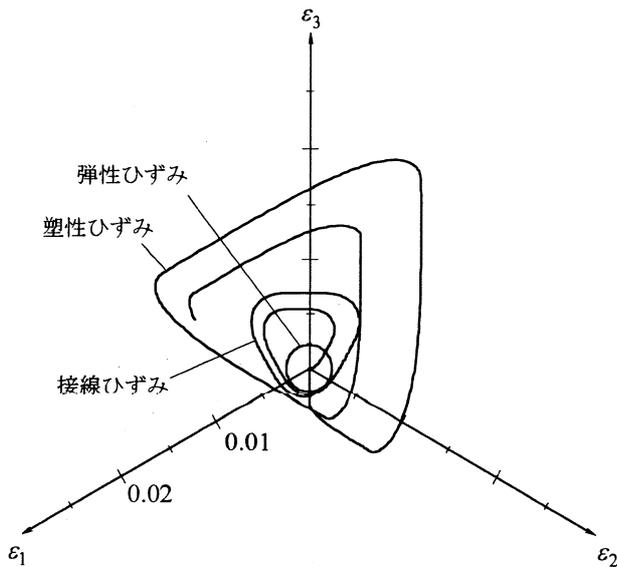


図8 π 平面における弾性、塑性および接線ひずみ径路図

平面上で滑らかな凸閉曲面性を満たす曲面式を構成式に導入する必要がある。

図9は接線ストレッチングを考慮しない従来の拡張下負荷面モデルで予測されるひずみ経路を実測値と比較して π 平面上に示したものである。この場合のひずみ経路は塑性ストレッチングに強く依存して図8で示した塑性ひずみ経路に類似する。そのため、そのひずみ経路は下負荷面の π 平面形状に依存した形式的で非現実的な形状を示し、実測値と比較すると応力速度方向（反時計回り）に対して剛性が高く予測されている。一方、接線ストレッチングを拡張下負荷面モデルに導入して予測された π 平面上のひずみ経路を図10に実測値と比較して示した。図5(b)で示しているように非弾性ストレッチング \mathbf{D}^i の方向は接線ストレッチングの効果により降伏面の垂直方向から降伏面に接する応力速度方向に誘導される。このため、応力速度方向の剛性は緩和され、実測値のひずみ経路を定性的ではあるが適切に表現できている。従って、接線ストレッチングの効果により非比例負荷における変形の予測は改善されると言えよう。なお、接線ストレッチングを拡張下負荷面モデルに導入した接線・下負荷面モデルは図10で示されたように滑らかな変形挙動を予測する。図11は下負荷面の回転および相似中心の移動を考慮しない初期下負荷面モデルによって予測されたひずみ経路を示したものである。予測されたひずみは実測値とは異なり円形応力負荷の1回転目と2回転目でほぼ同じ径路を辿る。これは、塑性ストレッチングの主軸が応力の主軸と常に共軸性を維持することが要因である。また、図中には参考のため接線ストレッチングを考慮した初期下負荷面モデルで予測されるひずみ径路を示している。

接線ストレッチングを考慮した拡張下負荷面モデルによる応力角 θ_0 と主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の関係を図12に実測

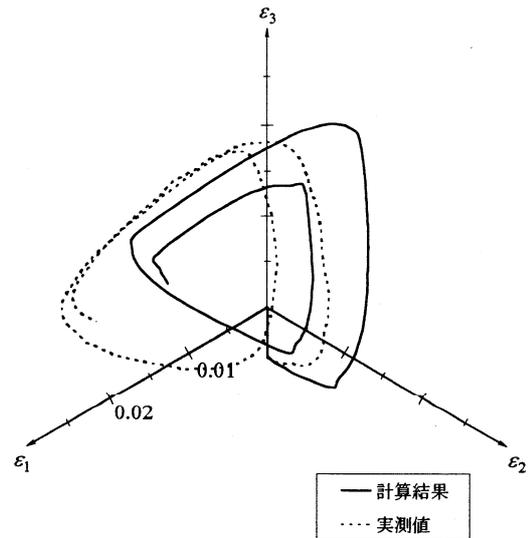


図9 従来の拡張下負荷面モデルによるひずみ径路

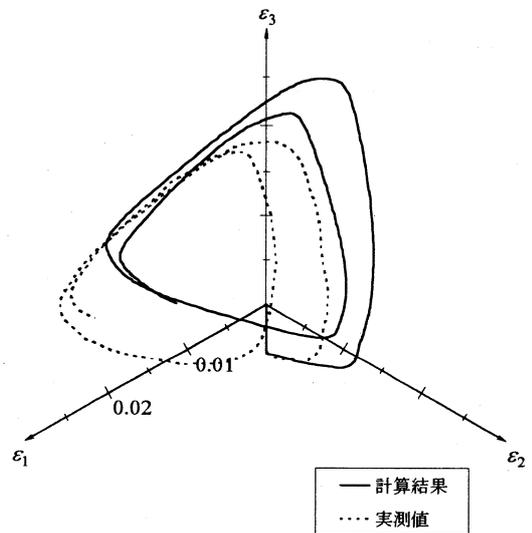


図10 拡張下負荷面モデルに接線ストレッチングを考慮した場合のひずみ径路

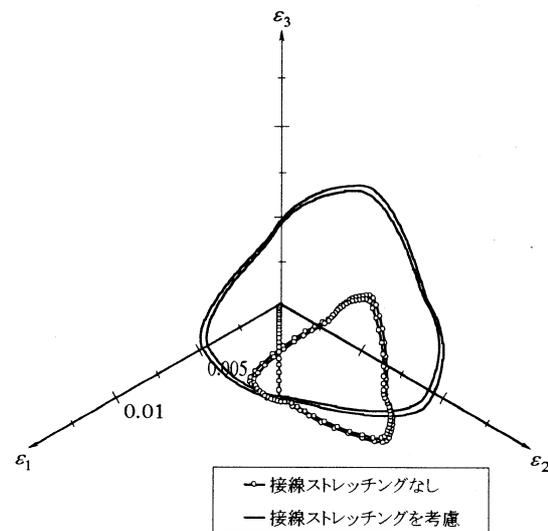


図11 初期下負荷面モデルによるひずみ径路

値と比較して示す。各主ひずみの予測値は実測値に対してずれが見られるが実測値と同様の位相差で収縮と膨張を繰り返している。

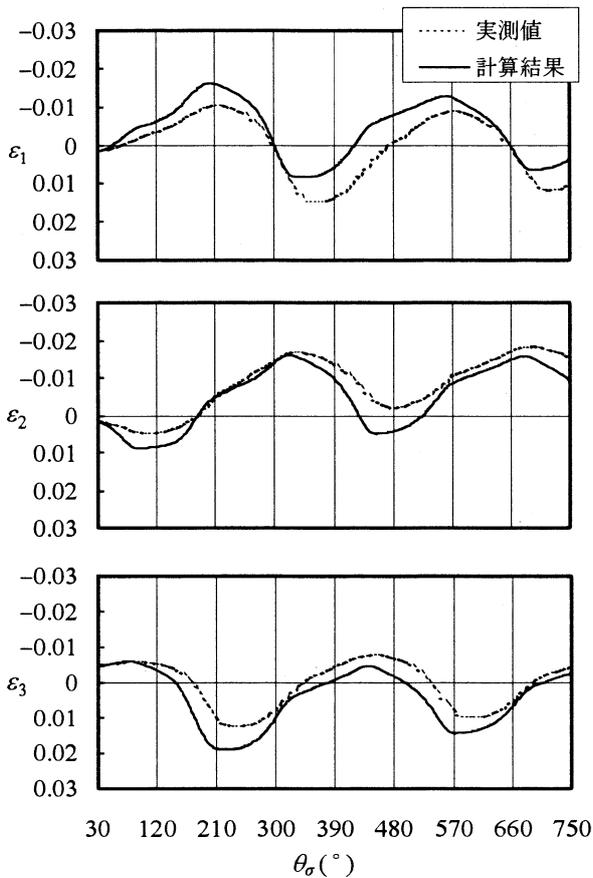


図12 接線ストレッチングを考慮した下負荷面モデルによる応力角 θ_a と主ひずみ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の関係

4. まとめ

本研究では、偏差接線応力速度によって生じる接線ストレッチングを拡張下負荷面モデルに導入して、代表的な非比例負荷である地盤材料の繰返し円形応力経路試験結果のシミュレーションに適用した。得られた主な結果は以下の通りである。

- (1) 非比例負荷の場合、応力は降伏面に沿う経路を辿るので、塑性ストレッチングおよび接線ストレッチングの予測結果は降伏面の形状に直接依存し、適切な形状を有する降伏面を採用することが不可欠である。特に、本研究で対象とした平均応力一定の円形応力負荷に代表される π 平面上での非比例負荷においては、 π 平面において適切な断面形状を有する降伏面を用いる必要がある。
- (2) π 平面におけるひずみ経路において、接線ストレッチングを考慮しない場合は、そのひずみ経路は塑性ストレッチングによるひずみ経路に大きく依存し、

その方向が降伏面の垂直方向によって表現されるため非現実的な変形を予測する。一方、接線ストレッチングを考慮した場合は、非弾性ストレッチングの方向は降伏面の垂直方向から降伏面に接する方向に誘導され応力速度方向の剛性が緩和されて定性的ではあるが実測値の変形挙動を適切に予測する。

最後に、以上の予測結果は実測値と良い一致を示すまでには至らなかった。この点に関しては、今後の検討課題としたい。

参考文献

- 1) Mroz, Z.: On the description of anisotropic hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.15, pp.163-175, 1967.
- 2) Iwan, W.D.: On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems, *J. Appl. Mech.* (ASME), Vol.34, pp.612-617, 1967.
- 3) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mech.*, Vol.23, pp.173-192, 1975.
- 4) Krieg, R.D.: A practical two surface plasticity theory, *J. Appl. Mech.* (ASME), Vol.42, pp.641-646, 1975.
- 5) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P.: Cyclic loading for materials with a vanishing elastic domain, *Nucl. Eng. Design*, Vol.41, pp.293-302, 1977.
- 6) Hashiguchi, K. and Ueno, M.: Elastoplastic constitutive laws of granular materials, *Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. Session 9, Tokyo)*, JSSMFE, pp.73-82, 1977.
- 7) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *J. Appl. Mech.* (ASME), 47, pp.266-272, 1980.
- 8) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C.: An anisotropic, critical state model for soils subjected to cyclic loading, *Geotechnique*, Vol.31, pp.451-469, 1981.
- 9) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 25, pp.917-945, 1989.
- 10) Armstrong, P.J. and Frederick, C.O.: A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *C.E.G.B. Report RD/B/N731*, Central Electricity Generating Board, 1966.
- 11) Chaboche, J.L.: Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metals, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.*, Vol.25, 1977.
- 12) Hashiguchi, K.: Mechanical requirements and structures of cyclic plasticity models, *Int. J. Plasticity*, 9, pp. 721-748, 1993.
- 13) Hashiguchi, K.: Fundamentals in constitutive equation: continuity and smoothness conditions and loading criterion, *Soils and Foundations*, 40(4), pp. 155-161, 2000.
- 14) Toplonicki, M.: An elasto-plastic subloading surface model for clay with isotropic and kinematic mixed hardening parameters, *Soils and Foundations*, 30, pp. 103-113, 1990.
- 15) Hashiguchi, K. and Z.-P., Chen.: Elastoplastic constitutive equations of soils with the subloading surface and the rotational hardening, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*,

- 22, pp. 197-227, 1998.
- 16) Hashiguchi, K. and Yoshimaru : A generalized formulation of the concept of nonhardening region, *Int. J. Plasticity*, 11, pp.347-365, 1995
 - 17) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, 17, pp. 117-145, 2001.
 - 18) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S.: Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect, *Int. J. Plasticity*, 19, pp.1651-1677, 2003.
 - 19) Khojastehpour, M. and Hashiguchi, K. (2004a): Axisymmetric bifurcation analysis of soils by the tangential-subloading surface model, *Int. J. Solids Struct.*, 41, in press, 2004.
 - 20) Khojastehpour, M. and Hashiguchi, K. (2004b): The plane strain bifurcation analysis of soils by the tangential-subloading surface model, *J. Mech. Physics of Solids*, 52, in press, 2004.
 - 21) Hill, R.: A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, pp.236-249, 1958.
 - 22) Hill, R.: On the classical constitutive relations for elastic/plastic solids, *Recent Progress in Appl. Mech. (The Folke Odqvist Volume)*, John Wiley & Sons, pp.241-249, 1697.
 - 23) Hashiguchi, K.: On the loading criterion, *Int. J. Plasticity*, 10(8), pp.871-878, 1994.
 - 24) Hashiguchi, K.: Description of inherent/induced anisotropy of soils: Rotational hardening rule with objectivity, *Soils and Foundations*, 41 (6), pp.139-145, 2001.
 - 25) Hashiguchi, K.: A Proposal of the simplest convex-conical surface for soils, *Soils and Foundations*, 42(3), pp.107-113, 2002.
 - 26) A. S. Saada and G. Bianchini (eds.): *Proc. Int. Workshop on Constitutive Equations for Granular Non-cohesive Soils*, Cleveland, Balkema, Rotterdam, 1989.

(2004年4月16受付)