研究論文

農業機械学会誌 60(2)：3～10，1998

耕盤のある圃場における支持力のすべり線解析（第1報）

——干渉状態のすべり線場——

橋口公一*1・鹿内健志*2・久木田徹*1・
上野正実*2・亀井雅浩*3

要　旨

一般に圃場は硬い耕盤の上に軟弱な作土が存在する2層構造を呈し，均質半無限地盤とは異なる支持力特性を示すと考えられる。本研究では，車両の合理的な設計指針を得るため，耕盤のある圃場における車両の支持力問題を剛盤上の土に2つの近接する荷重が作用する平面ひずみ問題として理想化し，すべり線解法を導入して理論的解析を行った。荷重下に生じるすべり線場として，荷重幅および荷重間隔に応じた5種の干渉状態のすべり線場を提示した。

［キーワード］車両，支持力，すべり線場，剛塑性，平面ひずみ，耕盤

A Slip-Line Analysis for the Bearing Capacity of Farm Land on a Sole Pan (Part 1)

——Interfering Slip-Line Fields——

Koichi HASHIGUCHI*1, Takeshi SHIKANAI*2, Toru KUKITA*1,
Masami UENO*2, Masahiro KAMEI*3

Abstract

Bearing capacity of farm land which generally consists of soft soil on hard sole pan differs from that of homogeneous semi-infinite ground. In this study the bearing capacity of farm land for a vehicle which is regarded as two adjacent loads penetrating into soil on rigid pan in plane strain is analyzed by the slip-line method in order to establish a reasonable designing method for the traveling device of vehicles. Five types of the slip-line field are proposed for variation of load width and its interval.

[Keywords] vehicle, bearing capacity, slip-line field, rigid plasticity, plane strain, sole pan

I　緒　言

軟弱地を走行するトラクタ，コンバイン等の圃場機械に対する地盤の支持力特性の解明は，これらの性能向上に資する重要な課題である。支持力解析における最も簡便な方法はすべり線解法である。本法により金属の半無限体に対する2次元押し込み力の解がPrandtl[1]によって与えられ，さらに内部摩擦角を考慮に入れて土などの摩擦性材料の支持力問題に拡張，適用されている[2)3)]。

ところで，圃場は一般に硬い耕盤とその上の軟

*1　会員，九州大学農学部（〒812-81 福岡市東区箱崎 ☎092-642-2929）Faculty of Agriculture, Kyushu University, Fukuoka-shi, 812-81 Japan
*2　会員，琉球大学農学部（〒903-01 沖縄県西原町千原1番地 ☎098-895-8771）College of Agriculture, University of the Ryukyus, Nishihara-cho, Okinawa, 903-01 Japan
*3　会員，九州農業試験場，現在：中国農業試験場（〒721 福山市西深津町6－12－1 ☎0849-23-4100）Chugoku National Agricultural Experiment Station, 6-12-1, Nishifukatsu, Fukuyama, Hiroshima, 721 Japan

弱な作土からなる2層構造を呈し，また，車両の土への加圧形態はその接地形状から見て2つの近接する荷重とみなせ，車両に対する圃場の支持力についてはPrandtl解を適用し得ない場合が多い。本問題に関して，摩擦性半無限体における荷重間隔と支持力の関係，および剛盤上の有限厚地盤の単一荷重に対する支持力が橋口等[4)-6)]により与えられている 。

本研究では，車両に対する圃場の支持力問題を，近接する2つの荷重に対する剛盤上の有限厚地盤の支持力問題として理想化し，上記の解を拡張して解析を行う。

本研究は車両の支持力について静的な条件下で解析を行ったもので，作業時に有益な情報となる沈下量と荷重の関係は得られない。しかし，トレッド（荷重間隔），車輪・履帯幅（荷重幅）および圃場条件である耕盤深さに着目して車両の支持力を解析した研究例はなく，圃場に適応した走行部の理論的な設計指針がなかった。本研究による解析結果は，水田や畑地など耕盤深さが異なる圃場で使用される農業機械のトレッドと車輪・履帯幅の寸法決定に合理的指針を与えると考える。

本報では，本問題に対するすべり線場は荷重幅および荷重間隔に応じて5種に分類できることを示し，それぞれのすべり線場を決定する。また，次報においてこれらのすべり線場に基づく具体的な支持力の解析結果を報告する。

II　基本仮定

支持力の解析に当たって次の仮定を設ける。

1）荷重幅に比べて荷重および地盤の奥行きは十分に大きく，平面ひずみ（2次元）問題と見なし得る。

2）解析対象の土は弾性変形を伴わず，また，硬・軟化も生じない剛完全塑性体である。

3）最大塑性仕事の原理

$$(\sigma_{ij}^{a}-\sigma_{ij}^{b})\ \dot{\varepsilon}_{ij}\geq 0 \qquad (1)$$

が成り立つ。ここに，空間固定の直交座標(x,y,z)に関する応力を$\sigma_{ij}(i,j=x,y,z)$とし，σ_{ij}^{a}は塑性ひずみ速度$\dot{\varepsilon}_{ij}$を生じさせる降伏応力であり，σ_{ij}^{b}は降伏面内の応力である。

4）土の降伏条件式は次のCoulomb-Mohr則で与えられる。

$$\bar{\tau}+\bar{\sigma}\sin\phi-c\cos\phi=0 \qquad (2)$$

ここにϕおよびcはそれぞれ内部摩擦角および粘着力である。また，$\bar{\sigma}$および$\bar{\tau}$はそれぞれ平均垂直応力および最大せん断応力で，z軸を平面拘束方向として次式で表される。

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}&=\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\\ \bar{\tau}&=\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^{2}+\sigma_{xy}^{2}}\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

5）土と剛盤面（耕盤面）および荷重底面は完全粗で固着摩擦（完全粗接触）が作用する。

6）土の物体力（自重）は無視し得る。

以上の仮定より，すべり線場に関して次のKötterの応力特性方程式が成立する[7)8)]。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dy}=\tan(\theta-\mu)\ (\alpha\text{ 線}):\\ &\quad d\bar{\sigma}+2(\bar{\sigma}-H)\tan\phi\cdot d\theta=0\\ &\frac{dx}{dy}=\tan(\theta-\mu)\ (\beta\text{ 線}):\\ &\quad d\bar{\sigma}+2(\bar{\sigma}-H)\tan\phi\cdot d\theta=0\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ここに，θはx軸から反時計回りに最大主応力方向に測った角である。また，

$$\left.\begin{aligned}\mu&\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\\ H&\equiv c\cdot\cot\phi\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

である。なお，α線およびβ線に対して，それぞれ時計回りおよび反時計回りのせん断応力が作用する。

式(4)を積分し次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\phi=0:\ \bar{\sigma}-\bar{\sigma}_0\mp 2c(\theta-\theta_0)=0\\ &\phi>0:\ \frac{(\bar{\sigma}-H)}{(\bar{\sigma}_0-H)}-\exp(\mp 2(\theta-\theta_0)\tan\phi=0\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ここに，$\bar{\sigma}_0$およびθ_0は$\bar{\sigma}$およびθの初期値である。上式の複号の上側および下側はそれぞれα線およびβ線に相当する。

III　すべり線場

トラクタ等による土への加圧形態は2つの近接する荷重とみなし得る。また，一般に圃場は耕盤を有するので，耕盤を完全剛とし，その上に有限厚の摩擦性剛完全塑性体が存在するとしてモデル

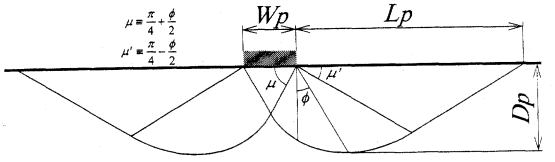

図１　Prandtl のすべり線場
Fig. 1　Prandtl's slip-line field

化する。土層厚（耕盤深さ）D，荷重間隔 L および荷重幅 W に応じて，力学的に妥当なすべり線場を想定する。

まず，荷重間隔が十分大で，荷重幅に比べ土層厚が十分大である場合には，それぞれの荷重下に独立に図１に示す Prandtl 解が成立する。Prandtl 場における荷重幅 W_p，受動三角域の上辺長 L_p およびすべり線場の最深長 D_p の間には次式の関係が成立する。

$$W_p=\frac{2\cos\mu}{\cos\phi\cdot\exp(\mu\cdot\tan\phi)}D_p \qquad (7)$$

$$L_p=\tan\mu\cdot\exp\left(\frac{\pi}{2}\tan\phi\right)\cdot W_p \qquad (8)$$

荷重幅と土層厚比 W/D が W_p/D_p より大になると，すべり線場に剛盤の影響が生じ，また，荷重間隔と荷重幅比 L/W が L_p/W_p より小になると荷重下の２つのすべり線場に干渉が発生し，Prandtl 場は成立しない。したがって，本問題に対するすべり線場は次の５種に分類できる。

(A) $W/D\leqq W_p/D_p$ かつ $L/W\geqq L_p/W_p$ の場合

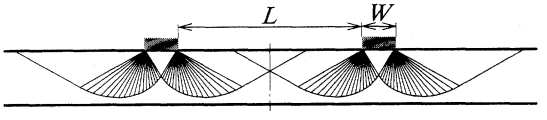

図２　$W/D\leqq W_p/D_p$ かつ $L/W\geqq L_p/W_p$ に対するすべり線場(A)
Fig. 2　Slip-line field(A) for $W/D\leqq W_p/D_p$ and $L/W\geqq L_p/W_p$

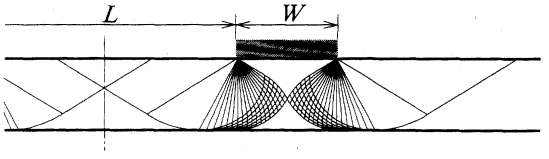

図３　$W/D>W_p/D_p$ かつ $L/W\geqq L_p/W_p$ に対するすべり線場(B)
Fig. 3　Slip-line field(B) for $W/D>W_p/D_p$ and $L/W\geqq L_p/W_p$

Prandtl 場の受動三角域が荷重間で重なる図２に示すすべり線場が生じる[4]。

(B) $W/D>W_p/D_p$ かつ $L/W\geqq L_p/W_p$ の場合

Prandtl 場は剛盤の存在で成立し得ず，図３に示すすべり線場が生じる。２つの干渉すべり線場が受動三角域で重なったもので，橋口らによる解[5]が適用できる。

(C) $W/D\leqq W_p/D_p$ かつ $L/W<L_p/W_p$ の場合

荷重間隔が狭くなると２つのすべり線場が干渉し合い，図４に示すすべり線場が生じる[4]。

(D) $W/D>W_p/D_p$ かつ $L/W<L_p/W_p$ の場合(1)

この場合の妥当なすべり線場は，従来，明らかにされていない。荷重外端（点ｃ）から発生するすべり線に剛盤の影響が発生し，図５に示すすべり線場(D)が生じると考えられる。

(E) $W/D>W_p/D_p$ かつ $L/W<L_p/W_p$ の場合(2)

すべり線場（D）の状態よりさらに W/D が大きくなると，荷重外端（点ｃ）および荷重内端（点ｂ）から発生するそれぞれのすべり線に剛盤の影響が発生する。この場合，図６に示すすべり線場（E）が生じると考えられる。

車両寸法の点から，実際の圃場で5つのすべり線場が成立し得る可能性を検討した。内部摩擦角が $\phi=\pi/6$ の土では $W_p/D_p=0.63$ また $L_p/W_p=4.29$ となる。実際の農業機械では耕盤深さにもよる

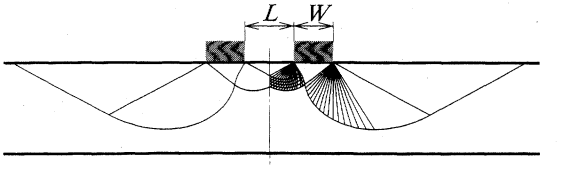

図４　$W/D\leqq W_p/D_p$ かつ $L/W<L_p/W_p$ に対するすべり線場(C)
Fig. 4　Slip-line field(C) for $W/D\leqq W_p/D_p$ and $L/W<L_p/W_p$

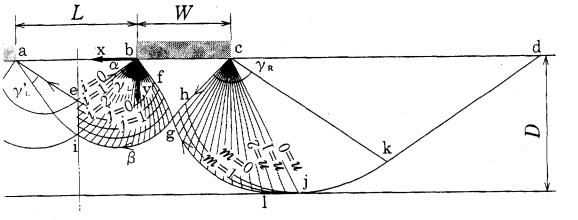

図５　$W/D>W_p/D_p$ かつ $L/W<L_p/W_p$ に対するすべり線場(D)
Fig. 5　Slip-line field(D) for $W/D>W_p/D_p$ and $L/W<L_p/W_p$

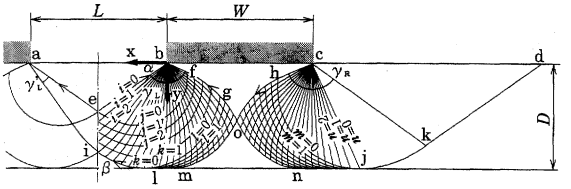

図6　$W/D>W_p/D_p$かつ$L/W<L_p/W_p$に対するすべり線場(E)

Fig. 6　Slip-line field (E) for $W/D>W_p/D_p$ and $L/W<L_p/W_p$

が，およそ車輪型車両の場合 W/D が0.5～3.5，L/W が2.5～5，履帯型車両の場合 W/D が1～6，L/W が1～2.5で使用されている。このことから，5つのすべり線場は実際の圃場で成立し得ると言える。

Ⅳ　すべり線場の数値解析

ここでは未知であるすべり線場(D)および(E)について解析を行う。すべり線場の解は式(4)と応力の境界条件から逐次的な数値計算により求める。

1．すべり線場(D)の場合

(1)　塑性降伏域の外辺すべり線の条件

図5に示すように，点eおよびiを通る両荷重間の中心線に対する対称性により，対称軸より片側のみの解析を行えばよい。点a,bおよびcは応力分布の特異点となり，すべり線が集中して，図のようにこれらの点のまわりにある広がり角をもつ扇形（対数らせん）のすべり線場が形成される。△abeおよび△cdkは直線すべり線域として受動三角域になる。すべり線efは中心角γ_Lの対数らせんになり，その外側の領域aigfeは中心角γ'_Lの有心扇形域となる。すべり線hjkは中心角γ_Rの対数らせんになり剛盤に接する。すべり線glは対数らせんとはならず，剛盤面を包絡線とするすべり線場が成り立つ。

有心扇形域aigfeおよび剛盤面と荷重底面の間に成立する領域hgljは次の条件を満足しなければならない。

1）応力場の連続性により，荷重の両端（点bおよびc）から算定される点gのそれぞれの応力は等しい。

2）点gにおけるすべり線igの勾配はすべり線ghの勾配に一致する。

まず，面abおよび面cd上には荷重条件より応力が生じていないので，直線すべり線域△abeおよび△cdkにおける一様な塑性平衡応力状態は（σ，τ）平面上で原点を通り破壊線に接するMohr円で表され，平均応力は次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}_0=-\frac{\cos\phi}{1-\sin\phi}c \tag{9}$$

次に，式(9)の$\bar{\sigma}_0$を初期値として点gの平均応力$\bar{\sigma}_g$を求める。対数らせんefにおける点fの平均応力$\bar{\sigma}_f$は式(6)より

$$\bar{\sigma}_f-H=(\bar{\sigma}_0-H)\exp(2\gamma_L\tan\phi) \tag{10}$$

で与えられる。さらに$\bar{\sigma}_g$は

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_g-H&=(\bar{\sigma}_f-H)\exp(2\gamma'_L\tan\phi)\\&=(\bar{\sigma}_0-H)\exp\{2(\gamma_L+\gamma'_L)\tan\phi\}\end{aligned} \tag{11}$$

で表される。

他方，対数らせんhjにおける点hの平均応力$\bar{\sigma}_h$は，

$$\bar{\sigma}_h-H=(\bar{\sigma}_0-H)\exp(2\gamma_R\tan\phi) \tag{12}$$

で与えられ，さらに$\bar{\sigma}_g$は次の式で表される。

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_g-H&=(\bar{\sigma}_h-H)\exp(2\gamma'_R\tan\phi)\\&=(\bar{\sigma}_0-H)\exp\{2(\gamma_R+\gamma'_R)\tan\phi\}\end{aligned} \tag{13}$$

条件1）を満たすために，式(11)および式(13)より

$$\gamma_L+\gamma'_L=\gamma_R+\gamma'_R \tag{14}$$

の関係が得られる。ここに，γ'_Rは点hと点gにおけるθの差である。

条件2）より

$$-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)+\gamma_L-\gamma'_L=\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)-\gamma_R+\gamma'_R \tag{15}$$

ゆえに，

$$\pi=\gamma_L-\gamma'_L+\gamma_R+\gamma'_R \tag{16}$$

式(14)および式(16)より

$$\left.\begin{aligned}\gamma_L-\gamma'_R&=\frac{\pi}{2}\\\gamma_R-\gamma'_L&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

の関係が得られる。

条件1），2）に加えて次の条件を満足するすべり線場を仮定する。

3）剛盤面および荷重底面は完全粗ゆえ，すべり線はこれらに接する。

4）荷重間中心線上では対称条件より，すべり線は鉛直方向に対し $\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}$ の角度で交わる。

(2) 仮定すべり線場の数値解析

図5の有心扇形域 aigfe および領域 hglj は解析的に表現し得ないので，数値計算によって求める。その手順は次のとおりである。

まず，荷重内端（点 a および b）から発生するすべり線網目を決定する。図5に示すように，β 線 ef および α 線 fg をそれぞれ角度間隔 ψ が一定となるように微小弧に分割する。このとき分割点を通る α 線を点 e より順に $i=0,1,2,3\cdots\cdots$，β 線についても同様に $j=0,1,2,3\cdots\cdots$ と番号を付す。これより，点 e を離散座標の基点（0,0）とし，α 線 i および β 線 j の交点を離散座標（i,j）とするすべり線網目が形成される。各節点の座標は，微小弧の両端の勾配の平均値を勾配とする弦で置き換え，近似的な逐次法により算定し得る[9)10)]。

一般節点（i,j）での値は

$$\theta_{i,j}=\frac{\pi}{2}+(i-j)\psi \tag{18}$$

で表される。直交座標系（x,y）を図5のように点 b を原点とし ba 方向および鉛直下向にとる。各節点における座標値（$x_{i,j},y_{i,j}$）は次のように求められる。数値計算を行うに当たり対数らせんである ef の動径 be を単位長さ1（|be|＝1）とすると，荷重間隔 L は次式で表される。

$$L=2\cdot|\mathrm{be}|\cdot\cos\mu'=2\cos\mu' \tag{19}$$

ここに，

$$\mu'\equiv\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2} \tag{20}$$

(a) $j=0$ の場合（ef 上の点）

$$\left.\begin{aligned}x_{i,j}&=\exp(-\psi\cdot i\cdot\tan\phi)\cos(\theta_{i,j}-\mu)\\ y_{i,j}&=\exp(-\psi\cdot i\cdot\tan\phi)\sin(\theta_{i,j}-\mu)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(b) $i=j$ の場合（対称軸上の点）

$$\left.\begin{aligned}x_{i,j}&=\frac{1}{2}L=\cos\mu'\\ y_{i,j}&=y_{i,j-1}+(x_{i,j}-x_{i,j-1})\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i,j-1}}{2}\right)-\mu\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(c) $j=i-I_L$ の場合（β 線が荷重底面まで達するときの荷重底面上の点で，荷重底面はすべり線の包絡線となる）

$$x_{i,j}=x_{i-1,j}-\frac{y_{i-1,j}}{\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i-1,j}}{2}+\mu\right)} \tag{23}$$

$$y_{i,j}=0$$

ここに，

$$I_L=\frac{\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\phi}{2}\right)}{\psi} \tag{24}$$

である。

(d) a, b, c 以外の一般内部節点の場合

式(4)の差分式を近似的に表すことにより，

$$\left.\begin{aligned}x_{i,j}&=\frac{y_{i-1,j}-y_{i,j-1}-x_{i-1,j}\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i-1,j}}{2}+\mu\right)+x_{i,j-1}\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i,j-1}}{2}-\mu\right)}{\left\{\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i,j-1}}{2}-\mu\right)-\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i-1,j}}{2}+\mu\right)\right\}}\\ y_{i,j}&=y_{i,j-1}+(x_{i,j}-x_{i,j-1})\tan\left(\frac{\theta_{i,j}+\theta_{i,j-1}}{2}-\mu\right)\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

以上の(a)(b)(c)を境界条件とし，第1種境界値問題としてすべり線網目は算定し得る。

次に，荷重外端（点 c）から発生するすべり線網目を決定する。図5に示すようにすべり線 hjk は点 j において耕盤面に接する，中心角 γ_R の対数らせんで α 線となり，動径 cj は β すべり線である。点 j を離散座標の基点(0,0)とし，荷重内端（点 a および b）からのすべり線網目と同様の方法で，α 線を m 系統，β 線を n 系統として角度 ψ の等間隔網目を数値計算により求める。離散座標（m,n）の節点の θ 値は

$$\theta_{m,n}=\frac{\pi}{2}+\mu'+(n-m)\psi \tag{26}$$

で表される。各節点における座標値（$x_{m,n}, y_{m,n}$）は次のように求められる。このとき，土層厚 D は次式で表される。

$$D=|\mathrm{cj}|\cdot\cos\phi \tag{27}$$

(a) $m=0$ の場合（hj 上の点）

$$\left.\begin{aligned}x_{m,n}&=-W-|\mathrm{cj}|\cdot\exp(-\psi\cdot n\cdot\tan\phi)\cos(\theta_{m,n}-\mu)\\ y_{m,n}&=|\mathrm{cj}|\cdot\exp(-\psi\cdot n\cdot\tan\phi)\sin(\theta_{m,n}-\mu)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(b) $m=n$ の場合（剛盤面上の点ですべての α 線はこの面に接する）

$$\left.\begin{aligned} x_{m,n} &= x_{m,n-1} - \frac{y_{m,n} - y_{m,n-1}}{\tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}}{2} - \mu\right)} \\ y_{m,n} &= D \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

(c) $m = n - I_R$の場合（α線が荷重底面まで達するときの荷重底面上の点で，このとき荷重底面はすべり線の包絡線となる）

$$\left.\begin{aligned} x_{m,n} &= x_{m-1,n} - \frac{y_{m,n} - y_{m-1,n}}{\tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}}{2} + \mu\right)} \\ y_{m,n} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

ここに

$$I_R = \frac{\dfrac{\pi}{2} + \phi}{\psi} \quad (31)$$

である。

(d) a, b, c 以外の一般内部節点の場合

$$\left.\begin{aligned} x_{m,n} &= \frac{y_{m-1,n} - y_{m,n-1} - x_{m-1,n}\tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}}{2} - \mu\right) + x_{m,n-1}\tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}}{2} + \mu\right)}{\left\{\tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}}{2} - \mu\right) - \tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}}{2} + \mu\right)\right\}} \\ y_{m,n} &= y_{m-1,n} + (x_{m-1,n} - x_{m,n})\tan\left(\dfrac{\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}}{2} - \mu\right) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

すべり線場は点gの条件，式(17)を満たす必要がある。荷重内端(点aおよびb)から求められた点gは離散座標(i_g, j_g)で表され，同様に荷重外端から求めた点gは離散座標（m_g, n_g）で表されるとすると，次の関係が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \gamma_L &= \psi \cdot i_g \\ \gamma'_L &= \psi \cdot j_g \\ \gamma_R &= \mu' + \psi \cdot n_g \\ \gamma'_R &= \psi \cdot m_g \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

上式を式(17)に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned} m_g &= i_g - \frac{\pi}{2\psi} \\ n_g &= \frac{\pi}{4\psi} + \frac{\phi}{2\psi} + j_g \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

の関係が得られる。式(34)を満足するi_g, j_g, m_g, n_gの組合せを$\psi = 1°$として数値計算により求める。図7に算定されたすべり線場（$\phi = \pi/6$，$W/D = 0.8$，$L/D = 1.0$）を示す。

次に速度場について検討する。図5に示す荷重底面下の剛性域bfghcは荷重底面に固着して鉛直下向きの変位が与えられるが，その速度をUとする。α線およびβ線がx軸となす角をそれぞれη_αおよびη_βとすると，剛性域でα線bfgおよびβ線chgに沿う速度u_0およびv_0は，

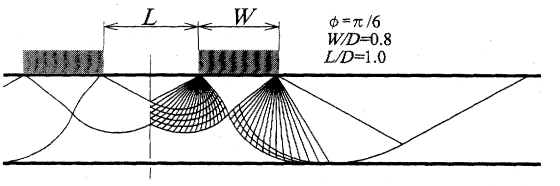

図7　計算したすべり線場(D)
Fig. 7　Calculated slip-line field(D)

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= v_0 \frac{\cos\eta_\alpha}{\cos\eta_\beta} \\ v_0 &= \frac{U}{\sin\eta_\alpha + \tan\eta_\beta \cdot \cos\eta_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

となる。また，すべり線bfgおよびchgは速度不連続線である。ここでα線とβ線の交点を原点とし第1，2，3および4象限にある各速度成分をそれぞれ添字1,2,3,4を付して表すと，点gの第2および4象限での速度成分$u_{g_2}, v_{g_2}, u_{g_4}, v_{g_4}$は，

$$\left.\begin{aligned} u_{g_2} &= v_{g_2}\sin\phi \\ v_{g_2} &= \frac{v_0 - u_0\sin\phi}{\cos^2\phi} \\ u_{g_4} &= \frac{v_0 - v_{g_2}}{\sin\phi} \\ v_{g_4} &= u_{g_4}\sin\phi \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

となる[11]。図7に示すすべり線場のα線，β線上の各点の速度をホドグラフ面上で速度のα'線，β'線に写像するα線とα'線およびβ線とβ'線がそれぞれ直交することから作図法により図8に示すホドグラフが求められる。図の破線は不連続速度を示す。この図より変形領域全体の塑性仕事率を検討した結果，式(1)の条件を満たし，図7に示すすべり線場は正解であることが検証された。ただし，剛性域内の応力状態については不明であり不完全解の域をでない。

2．すべり線場(E)の場合

(1)　塑性降伏域の外辺すべり線の条件

すべり線場(D)の場合と同様に，特異点を中心に形成されるすべり線場の中心角γ_L，γ'_L，γ_Rを図6に示すように定義する。β線であるilgおよびmoはそれぞれ点lおよび点mで剛盤に接する。すべり線場(D)における点gの条件と同様に，点

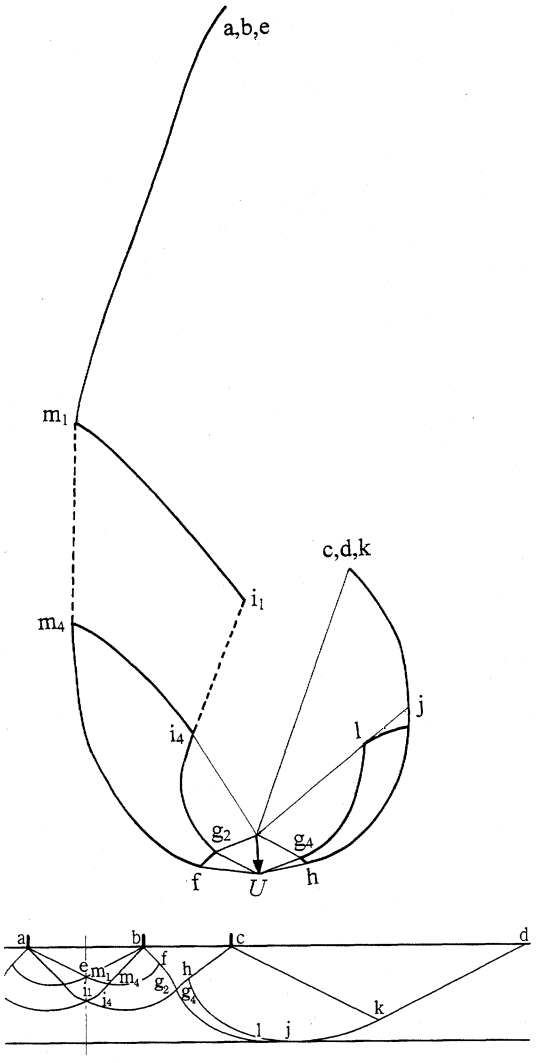

図8　すべり線場(D)のホドグラフ
Fig. 8　Hodograph for the slip-line field (D)

oにおける条件より

$$\left.\begin{aligned}\gamma_L-\gamma'_R&=\frac{\pi}{2}\\ \gamma_R-(\gamma'_L+\gamma''_L)&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

の関係が得られる。ここに，γ'_Rおよびγ''_Lはそれぞれ点hと点oにおいておよび点gと点oにおいてのθの差である。

(2)　仮定すべり線場の数値解析

まず，荷重内端(点b)より発生するすべり線網目を決定する。有心扇形域ailgfeにおいてα線beをi系統，β線efをj系統とすれば，点gおよび点lの離散座標をそれぞれ(i_g, j_g)および(i_l, j_l)とし，次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}i_l&=\frac{\phi}{\psi}+j_g\\ j_l&=j_g\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

数値計算を行うに当たり対数らせんの動径beを単位長さ1とすると，荷重間隔Lおよび土層厚Dは次式で表される。

$$\left.\begin{aligned}L&=2\cos\mu'\\ D&=y_{i_l,j_g}\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

次に領域lmogのすべり線場を求める。点lを離散座標の基点(0,0)としα線をk系統，β線をl系統として，角度ψの等間隔網目を数値計算により求める。点oの離散座標(k_o, l_o)は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}k_o&=i_g-i_l\\ l_o&=\frac{\gamma''_L}{\psi}\end{aligned}\right\}\tag{40}$$

さらに，離散座標(k, l)の節点のθ値は

$$\theta_{k,l}=\pi-\mu+(k-l)\psi\tag{41}$$

となり，各節点座標値$(x_{k,l}, y_{k,l})$は次のように求められる。

(a) $l=0$の場合（lg上の点）

$$\left.\begin{aligned}x_{k,l}&=x_{i,j_g}\\ y_{k,l}&=y_{i,j_g}\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

(b) $l=k$の場合（剛盤面上の点）

$$\left.\begin{aligned}x_{k,l}&=x_{k,l-1}+\frac{y_{k,l}-y_{k,l-1}}{\tan\left(\dfrac{\theta_{k,l}+\theta_{k,l-1}}{2}-\mu\right)}\\ y_{k,l}&=D\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

(c) a，b以外の一般内部節点の場合

$$\left.\begin{aligned}x_{k,l}&=\frac{y_{k-1,l}-y_{k,l-1}-x_{k-1,l}\cdot\tan\left(\dfrac{\theta_{k,l}+\theta_{k-1,l}}{2}+\mu\right)+x_{k,l-1}\cdot\tan\left(\dfrac{\theta_{k,l}+\theta_{k,l-1}}{2}-\mu\right)}{\tan\left(\dfrac{\theta_{k,l}+\theta_{k,l-1}}{2}-\mu\right)-\tan\left(\dfrac{\theta_{k,l}+\theta_{k-1,l}}{2}+\mu\right)}\\ y_{k,l}&=y_{k,l-1}+(x_{k,l}-x_{k,l-1})\cdot\tan\left(\dfrac{\theta_{k,l}+\theta_{k,l-1}}{2}-\mu\right)\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

荷重外端（点c）からのすべり線場はすべり線場(D)と同様の方法で算出する。

すべり線場は点oの条件，式(37)を満たす必要がある。荷重両端(点bおよびc)より求めた点oの離散座標をそれぞれ(k_o, l_o)および(m_o, n_o)で表すと，

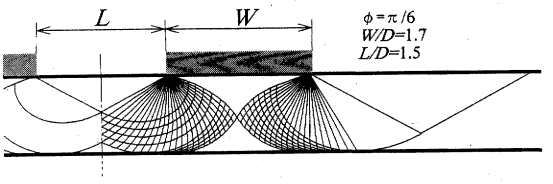

図9　計算したすべり線場(E)
Fig. 9　Calculated slip-line field(E)

$$\left.\begin{aligned}\gamma_L&=\psi\cdot i_g\\ \gamma'_L&=\psi\cdot j_g\\ \gamma''_L&=\psi\cdot l_o\\ \gamma_R&=\mu'+\psi\cdot n_o\\ \gamma_R'&=\psi\cdot m_o\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

となり，上式を式(37)に代入すれば，

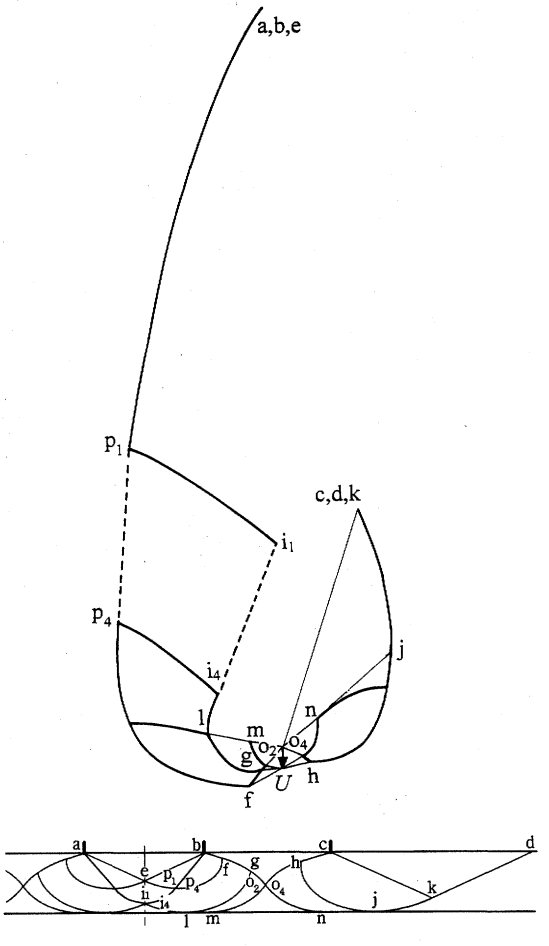

図10　すべり線場(E)のホドグラフ
Fig. 10　Hodograph for the slip-line field(E)

$$\left.\begin{aligned}m_o&=i_g-\frac{\pi}{2\psi}\\ n_o&=\frac{\pi}{4\psi}+\frac{\phi}{2\psi}+j_g+l_o\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

が得られる。式(46)を満足する i_g, j_g, l_o, m_o, n_o の組合せを $\psi=1°$ として数値計算により求める。図9に計算により求められたすべり線場 ($\phi=\pi/6$, $W/D=1.7$, $L/D=1.5$) を，図10にホドグラフを示す。このすべり線場は式(1)の条件を満たしている。

V　摘　　要

圃場の車両に対する支持力問題を解明するため，平面ひずみ問題としすべり線解法による解析を行った。圃場を剛盤上の摩擦性塑性体とし，また，車両を2つの近接する荷重としてモデル化を行った。2つの荷重下に生じる干渉すべり線場を荷重幅および荷重間隔に応じて5種に分類・提案した。これらは可容速度場が成立し，正解すべり線場であることを示した。

参　考　文　献

1) Prandtl,L.：Über die Eindringungsfestigkeit(Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1(1), 15-20, 1921
2) 山口柏樹：拡張せる Kötter の方程式に関する二,三の考察，土木学会論文集，60，11-19，1959
3) 山口柏樹：Kötter の方程式の理論土質力学への適用，土木学会論文集，65，1-9，1959
4) 守島正太郎，橋口公一，石黒悦爾：履帯型車両の履帯間隔－支持力関係に対する塑性論解析，農機誌，30(2)，74-78，1968
5) 橋口公一：粗い岩盤上のタイ積土の支持力に関する塑性論的研究，土と基礎，17(5)，31-35，1969
6) 松尾隆明，橋口公一，坂井純：耕盤圃場における支持力－沈下関係のすべり線解析，農機誌，50(6)，27-34，1988
7) Kötter,F.：Die Bestimmung des Druckes an Gekümmten Gleittlachen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck, Ber. Akad. Wiss., Berlin, 229-233,1903
8) 山口柏樹：土の塑性力学，土質力学（最上武雄編）技報堂，787-791，1969
9) Hill,R.：塑性学（鷲津，山田，工藤訳），培風館，138-147，1954
10) 山口柏樹：摩擦性塑性体のすべり線の幾何学，土木学会論文集，61，1-9，1959
11) 橋口公一：摩擦性塑性体に関する速度場の理論，土木学会論文報告集，172，18-30，1969

（原稿受理：1997年7月31日・質問期限：1998年5月31日）