

琉球大学学術リポジトリ

関数の考えの指導に関する一考察

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 琉球大学教職センター 公開日: 2021-04-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 新城, 喬之, Shinjo, Takayuki メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/20.500.12000/48016

関数の考えの指導に関する一考察

新城喬之

A Study on Teaching Function Ideas

Takayuki shinjo

1 研究の目的

平成29年度改訂の学習指導要領の『解説』算数編（以下、解説）では、算数科において育成を目指す資質・能力とそのために必要な重要な指導内容について、①から⑧までに整理した。（p33p34）

その中に「④事象の変化と数量の関係の把握」があり、身の回りの事象の変化における数量間の関係を把握してそれを問題解決に生かすことを述べている。すなわち「関数の考え」である。

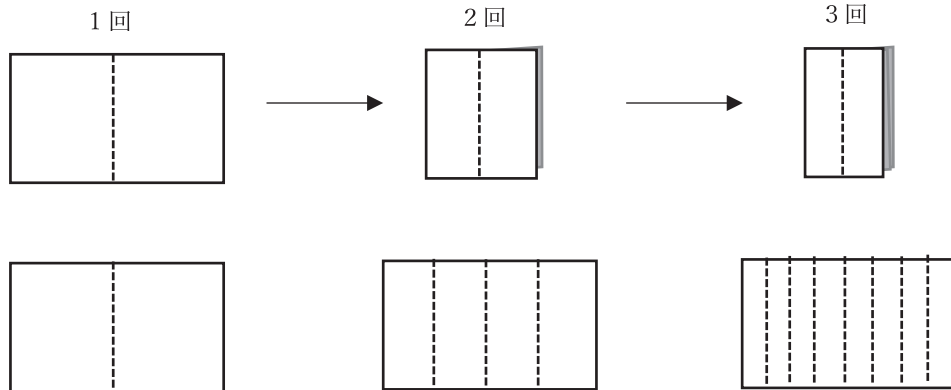
関数の考えは「問題解決において、ある数量を調べるためにそれと関係のある他の数量を見出し、それら2つの数量の間に成り立つ関係を把握して、その問題を解決する際に用いられる方法」と定義されており（解説 p35）事象の変化を捉えて問題解決に生かす資質・能力の中核となるもの（解説 p62）と述べられている。また、関数の特徴として「ある数量を調べようとするときに、それと関係のある数量を見だし、それらの数量との間にある関係を把握して、問題解決に利用するところにある。関数の考えによって、伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目し、変化や対応の特徴や傾向を考察できるようにする。また、関数の考えは、この領域にとどまることなく、全ての領域の内容を理解したり、活用したりする際に用いられる汎用性を有している。従って、関数の考えによって、数量や図形についての内容や方法をよりよく理解したり、それらを活用したりできるようにすることも大切である」と述べられている。（解説 p62p63）

一方、「関数の考え」は従前から重視されており、過去の学習指導要領の解説にも何度も登場する言葉である。それは塩野の「数理思想」の提唱や小倉（1973）の「数学教育の核心は函数概念の養成にある」という主張にも表れている。

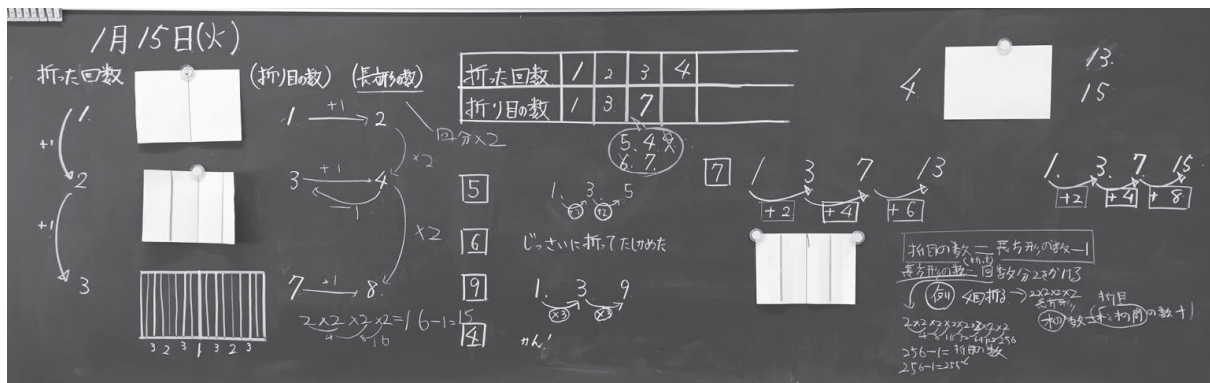
中島（1981）は関数の考えを重視するねらいとして「a 自然科学的な精神に基づいて事象を考察する能力・態度の育成と、それにもとづいて概念や法則を創造的に導くことができるようにすること」「b 算数・数学の内容のもつ意味についての理解を深めることと、それにもとづいて統合的発展的な考察ができるようにすること」「c 関数の考えを用いて問題解決が有効にできること」（p180）と3つの観点を述べている。これらの「関数の考え」における3つの観点において清水（2020）は「中島が挙げた観点 a～c は数学教育の陶冶的目的や実目的に通じている。関数の考えは、人間形成や算数の豊かな学習という点では、不易な重要性を有しているのである」（p5）と述べており、関数の考えを子供に指導することは、人間形成においても重要であることを指摘している。

しかし、筆者自身の過去の授業実践を振り返ると、先述した関数の考えの良さを子供自身が実感するような学習にはなっていなかったと考える。本時の教材として使用する啓林館教科書（2018）5年「順々に調べて」でその具体的な課題を述べる。

長方形の紙を、下のように2つに折り、それをまた2つに折り、さらに2つに折り、・・・ということを繰り返していきます。もし、6回折って広げたとすると、折り目で分けられた長方形の数は何個になりますか。



教科書では「表にかいてきまりをみつけよう」とめあてが示されている。また、教科書のキャラクターが「実際に6回折るのは大変だな」「表にかいてみると・・・」「少ない場合から順に調べてきまりをみつけるとよいですね」と吹き出しからヒントを与えている。筆者の過去の実践では、教科書を開いたまま授業を行わないにしても、これらの設問を筆者が発問し、それに子供が答える一問一答式の指導を行っていた。「何のために表をかくのか」「何のためにきまりを見つけるのか」「何のために2つの数量の関係を式に表すのか」という子供にとって関数の考えを利用する必然性はなく、また、そのよさを実感することのないまま教師に指示された通りに答えていただけだった。実際の授業実践（平成30年1月15日）の板書が以下である。



本実践の課題は以下の4つであった。

- ① 教師が「長方形の紙を1回折ると、折り目の数と長方形の数はそれぞれいくつになるのか」と発問したため、子供に気づかせたい2量を決めてしまったこと。
- ② 何のために表に整理するのか、子供に目的意識がないまま「表に整理しよう」と教師が伝え板書で整理したこと。
- ③ きまりを見付けて問題解決に生かすよさを子供は感じていなかったこと。
- ④ きまりを見付け、そのきまりから公式まで導き問題解決を楽しんでいたのは数名の子であり、多くの子供は、主体的に学習に参加することができなかったこと。

すなわち、解説(2018)にある「問題解決に生かす資質・能力の中核となるもの」や中島(1981)の「c 関数の考えを用いて問題解決が有効にできること」のねらいを子供に実感させることができなかったのである。

このような筆者の課題と同様、関数の考えにおける指導の課題として杉山(2012 p15)は「きまりをみつけましょう。ではなく、きまりをみつけると問題解決がしやすいということが子供に納得されていることに意味がある」「関数の指導は関数そのものの指導ではなく、小学校では、グラフを書くとか、関数そのものがわかるということではなく、関数の考えを利用して仕事ができることを大切にしたい」と指摘している。正木(2012 p217)も「関数の考えの学習は、問題解決でありたい。どの活動も、問題解決の中に位置づけられ、子供の必然的な発想の上にのたった時、はじめてその学習が成立する」と述べている。関数の考えを直接的に指導することよりも、子供が問題解決するための有効な手段の一つとして、自然に働かせることが大切であり、その子供が無意識に働かせた関数の考えを教師は顕在化させ、価値づけることによって、そのよさを実感させることが重要だと考える。

本研究の目的は「関数の考え」を働かせ、問題解決することの有用性を子供が実感するための授業を提案することである。そのために、まず本研究における「関数の考え」を働かせた子供の姿を黒澤(2020 p7)が提案する5段階の様相で捉えることを確認する。次にその5段階の様相を引き出すための教師の授業構成を述べる。最後に「関数の考え」を働かせた子供の言動が表出され問題解決に向かうことができたのか、実践した授業記録(ビデオ記録)を基に分析し、その有効性について検討する。

2 関数の考えを子供の様相で捉える(研究方法)

関数の考えを働かせている子供の姿を黒澤は以下の5段階の様相で捉え、評価して指導することが大切だと述べている。本実践も黒澤の評価規準をもとに授業における子供の言動を基に授業記録の実際を記述し、その場面での教師の考察を入れながら分析する。

◆第1段階「変数見付け」

ある変化状況のなかに、変化する数量にいくつか気づき、状況は多変数であることを知る段階。

◆第2段階「依存関係見付け」

その多変数の状況のなかに伴って変わるもうひとつの数量に気づき、その伴って変化する二つの数量の関係、すなわち依存関係に気付く段階

◆第3段階「きまり見付け」

その依存関係にある二つの伴って変化する数量の関係の特徴として、一定の規則的な特徴に気づき、その規則性を一般的に知る段階

◆第4段階「きまりの表現」

一般的に同じように共通している依存関係のきまりを、表やグラフや式といった表現形式に表現する段階

◆第5段階「きまりの活用」

式やグラフに表現された依存関係のきまりを活用して、他の場合を捉え問題解決をしたり、その一般的な依存関係のきまりにより概念を決定する段階。

3 授業の構想

本時では啓林館（2018）の第5学年の教科書にある単元「順々に調べて」（p184）にある教材を扱う。

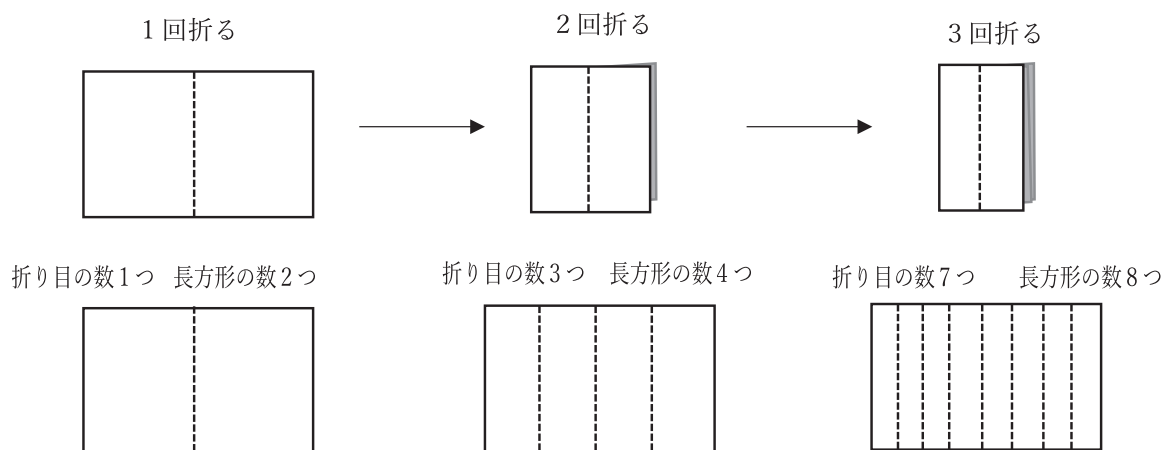
長方形の紙を半分に折っていき、折った回数と折り目の数又は折った回数と長方形の数の2量に着目させることで、関数の考えの良さを味わわせることができる教材である。教科書では「6回目に折って広げると、折り目で分けられた長方形の数は何個になりますか」と教師から問い、それに答える形で展開される。しかし、関数の考えで大切なことは、子供が自ら2量の関係を見出すことにある。

そこで本時では、まず1回目を折り曲げたときに「何が増えた？」と問うことから始めたい。子供は「長方形が増えた」「折り目の数が増えた」「面が増えた」「辺が増えた」と様々な発言をするだろう。その中で本時においては「長方形の数」と「折り目の数」に焦点化して展開する。

そして、折った回数に対して長方形の数と折り目の数を別々に考察するのではなく、折った回数と折り目の数の2量を考察していく中で長方形の数にも着目させる。このような折った回数に対して折り目の数と関連づけて長方形の数を見ていくことを菊池（2012 p189）は「ものごとを関係づけてみようとする関数の考えの背景となる基本的な態度の一つである」と述べており、それはすなわち「ある数量の大きさを変えていった時、それについて変わるものは何だろうか。ある数量の大きさを決めた時、それにつれて決まるものは何だろうか」と見ていく態度である。その意味で、本教材は問題文の中に現れる数量に限定しないでこのような態度で関連付けを試みた時にその問題がただちに解決される」と述べている。

次に、折った回数に対する折り目の数と長方形の数の関係や変化に着目しやすいように、板書を構造的に整理する。このように、順序よく考察したものを表に整理することを通して、折った回数と折り目の数の関係から帰納的にきまりを発見させたい。そして、そのきまりを適用させ「実際に折らなくても、折り目の数が予想できるよ」という言葉を引き出し「関数の考え」の良さを味わわせる。

さらに、帰納的に発見したきまりに対して「なぜ、そうなるのか」と問い、演繹的に説明する子供の姿を求めたい。



4 授業の実際

（1）実践の方法

本稿では、「関数の考え」の研究に焦点を当てて授業を分析し、考察する。

- ・実施日 平成30年2月8日
- ・実施学級 竹富町立古見・大原小学校5年合同（12名）

・授業者 新城 喬之

(2) 授業の実際

T: 今日はこの紙 (A4) を使って算数のお勉強をしましょう。

と伝え、長方形であることを確認する。次にちょうど真ん中から折ってみせる。

T: 何が増えたかな? C1: 長方形 C2: 線 (第1段階「変数見付け」の姿)
線という言葉折り目の線という言葉に言い換える。

T: 長方形を真ん中から折ると、長方形の数と折り目の数が増えるんだね。

T: 長方形はいくつになりましたか? 折り目の数はいくつですか?

CC: 長方形は2つになって、折り目の数は1本。 (第2段階「依存関係見付け」の姿)

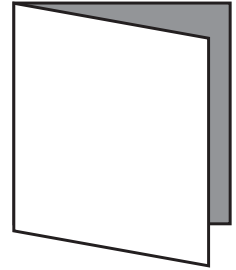
T: 次はどうすると思う? C3: 2回折る


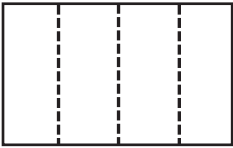
何気無い言葉かけだが、子どもが自ら問いを見出していく姿勢を育てるためには意味がある。このようなことを続けていくと教師が問わなくても自ら問う子どもが育つと考える。

2回目を折る前に長方形の数と折り目の数を予想させ、発表させる。直観でも良いので発表させることには意味がある。自分の立場をはっきりさせることで友達とのズレが生まれたり、同じ意見でも実際にそうなるのか気になったりすることで、問題に対して主体的に関わろうとするからである。全員が発表後、実際に紙を渡し折って確かめる。

C4: 長方形は4つだ。 C5: 折り目の数は3つだ。 C6: 次は3回・・・

その先が気になり折り始めようとする子を止め、ここまでの結果を板書で整理した。



折った回数		長方形の数	折り目の数
1		2	1
2		4	3
3			?

そして、先ほど静止した子が自ら動き出して3回折った場合を調べようとしたことを価値づけた。

T: 3回折ったら折り目の数はいくつだろう?

ここで長方形の数ではなく折り目の数を発問したことには理由がある。実は長方形の数は具体的に折らなくても念頭操作で8つと予想している子がいた。また、子供達は3回折ったら長方形の数が8つになることは今までの経験から予想できるのである。例えば、2年の分数の学習で、折り紙を半分に折ると2分の1、もう一回おると4分の1、もう一回おると8分の1、もう一回おると16分の1とある。つまり等比数列の経験は算数でも日常生活でもある。一方、折り目の

数は長方形の数に比べ、子供が予想しにくいと判断した。このような理由から折り目の数を発問したのである。

C7: 5つ C8: 6つ C9: 7つ C10: 8つ C11: 9つ

5つの予想を立てた。この予想の中で、私が子供達に理由を聞いたのは9と6の場合だけである。この3回折った場合を尋ねたのは、ここで一度子供達がどのように折り目の数と長方形の数を数えようとしているのか、実態を把握したかったためである。また、3回目の折り目の数を予想する中で、必ず関数の考えで問題解決している子がいると予想した。その考えを布石として引き出し、実際に折って確かめることができなかった際に活用してほしいためである。また、正答である7と予想した子は意図的に当てなかった。その子は7本となる理由までしっかりと理解していたためである。

T: どうして9本と予想したの？

C12: 一回目折った際に折り目の数が1本。2回目が3本となったから、折り目の数は前の数の3倍になると思ったので、 $3 \times 3 = 9$ と考えました。（第3段階「きまり見付け」第4段階「きまり表現」の姿）

T: どうして6本と予想したの？

C13: 2回目折った時に折り目の数が3本になったから、その2倍と思ったので $3 \times 2 = 6$ で6本と考えました。（第3段階「きまり見付け」第4段階「きまり表現」の姿）

9本、6本とも同様に子供達は折った回数と折り目の数の2量の変化に着目し、予想していた。このような見方・考え方から3回目の折り目の数を予想したことを価値づけた。その後実際に3回折り、折り目の数は7本であることを確認し、長方形の数は8つであることも確認した。

T: 次、どうしたい？ C14: 4回折ったらどうなるのか、調べたい。

その子供達の声を裏切るようであったが、次のように伝えた。

T: 次は8回折ります。さて、長方形の数と折り目の数はいくつになるでしょう。今回は予想なし。すぐに折って調べていいですよ。

C15: え～8回折るの？！ C16: 折れるかな？やってみよう！

子供達は指先に力をこめ、どうにか8回折ろうと頑張る。

T: みなさんなら8回折れます。指先にもっと力を入れて！

CC: 無理！できないよ！

教室中に暗い雰囲気漂い始める。それに追い打ちをかける。

T: 8回折ることは無理だから、これ以上、折り目の数や長方形の数は調べられないね。

C18: 実際に折って確かめることはできないけど、計算で答えを出すことはできるかもしれない。

C19: 8回は折れないけど、4回、5回までは実際に折ることができるから、そのデータを集めて8回折った場合を考えることができるかもしれない。（第5段階「きまりの活用」の姿）

子供達が関数の考えを活用し問題解決に向かう必然性が生まれた。関数の考えを問題解決に生かすことで、より関数の考えの価値を見いだすことができる展開となった。やはり、子供はこのように具体的な操作などで実際に調べることができないからこそ、2量の関係に着目しその変化や対応の規則性から先を予想したいという思いをもつ。それは、すなわち「関数の考え」の良さが現れ、その効果を発揮した子供の姿と考える。

ここから、自力思考が始まる。子供達は、計算で答えを求めようとする子もいれば、表に整理して決まりを発見している子もいた。また、実際に折ることを諦めきれず新しい紙をもらい、再度8回折ることに挑戦する子もいた。それぞれが、既習の学びを活用して問題解決に向かっていく姿が見られた。

CC: わかった！（4名）

C21：折り目の数も長方形の数も両方求めないとだめですか？

と C21 から質問があった。

T：もし、どっちか一つだけでいいと言われたら、どちらを求めたい？

CC：長方形の数だったら求めることができそう。(10 名)

私の予想通りの答えである。もし、この質問がなければ子供達に問う予定であった。その理由は前述した等比数列の考えは具体的にイメージしやすく、子供達が経験として持っているためである。この山場の場面では、この長方形の数を求めることが子供達が躍動するきっかけとなる。

T：答えをききます。8 回折った場合の長方形の数はいくつですか？ CC：2 5 6 ! (12 名)
と自信たっぷりに答える。

T：え～2 5 6 ! 本当に？ どうして2 5 6 本って考えたの？

C22：だって一回折っていくごとに長方形の数は、その前の長方形の数の 2 倍になっている。
板書をもとに説明する。

C22：ごちゃごちゃしてきたので、整理していいですか？

T：みんなにわかりやすく説明するために、どうしたいの？

C22：表に整理したい！ (第 4 段階「きまりの表現」の姿)

ここで、子供達が自分の理解を他者にわかりやすく説明するために、また折った回数と長方形の 2 量の関係を見えやすくするために、表を必要としたのである。表に整理し、再度説明したことで折った回数と長方形の数の 2 量の関係も明確になり、長方形の増え方の決まりも共有することができたのである。8 回折った場合の長方形の数が 2 5 6 であることに納得している。

折り回数	1	2	3	4	5	6	7	8
長方形	2	4	8	16	32	64	128	256

(x2) (x2) (x2) (x2) (x2) (x2) (x2) (x2)

T：長方形の数は求めることができたけど、折り目の数を調べることはやっぱり難しいね。無理だね。諦めよう。

CC：折り目の数はわからない・・・

学級の半分の子 (6 名) は諦めモードである。しかし残り半分が今まで以上に勢いづく。

C23：長方形の数がわかったら、もう答えは出ているようなものだよ。

T：悩んでいるとお友達にヒントを上げられないかな？

C24：ひき算。

また、長方形の数と折り目の数が書いてある板書を指差し「これもヒント」と発言した。

C25：なるほど、そう言うこと！

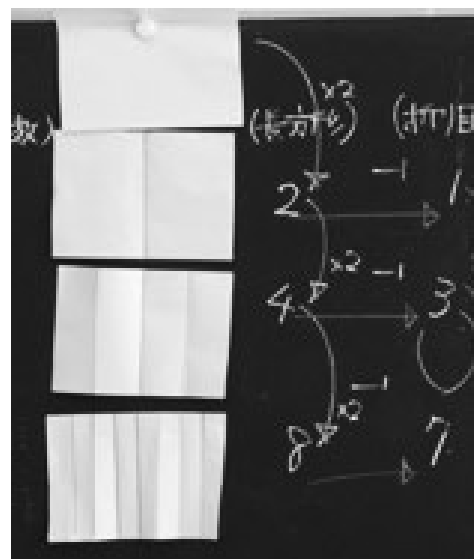
この 2 つのヒントのおかげで首を傾けていた子も笑顔になる。そして全員が長方形の数から 1 を引けば折り目の数になることに気づいたあたりで答えをきいた。

T：折り目の数はいくつですか？ CC：2 5 5 !

元気な声が返ってくる。その理由を説明してもらい、折り目の数を求める式を一般化した。(第 4 段階「きまりの表現」の姿)

$$\boxed{\text{長方形の数} - 1 = \text{折り目の数}}$$

この後が本時の最大の山場であり、子供達が最も難し



いと感じる課題を提示した。

T：なぜ、長方形 - 1 をすると折り目の数になるの？

ここまで思考が高まった子供達にとっては教師が提示した問いだが、最高の問いとなった。その理由を3人の子に説明してもらった。

C26：紙を半分に折っていくと、例えば長方形が4つの場合は長方形に分けるためには3本の折り目が必要でしょ。それが8つだったら折り目の数は7本となり、長方形に分けるための折り目の数はいつも長方形よりも1つ少なくなるから。

C27：もし、長方形がもう一つあるとしたら、その分の折り目の数は一本少なくなるから。

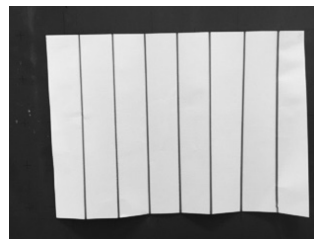
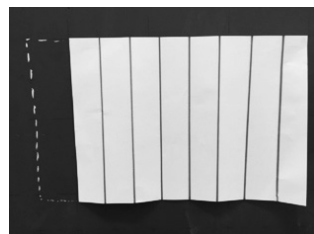
C26 の意見には、具体的に長方形の紙を折りながら説明したので多くの子が納得できていた。また、長方形の数を求める課題で十分にその話題は話し合われたため、子供達には理解された。

一方、C27 の意見に関しては教師である私も解釈することが難しく「俺も同じ考え」と言ってくれた他の子にも再度説明してもらったが、理解することは難しかった。最後の「なぜ、長方形の数 - 1 = 折り目の数になるのか」は理解が不十分のままだった。

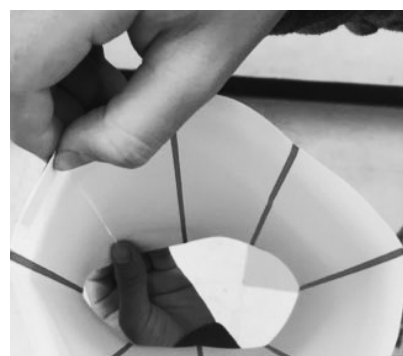
T：もし、よかったらお家で考えてきてください。

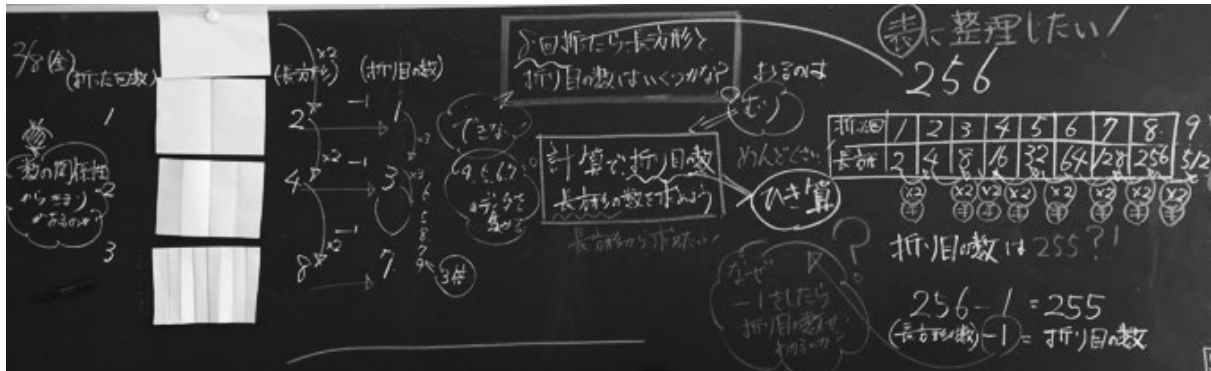
と伝え授業を終えた。しかし、子供達の学びは終わらなかったのである。その様子が下の写真である。授業が終わると同時に「なぜ - 1 するかと言うと・・・」と黒板の前に集まってきたのである。

特に C27 が納得いかなかったようで、必死に説明してきた。そこで、その説明をじっくり聞



いてみると、子供の思考の深さに驚いた。C27 は長方形の紙を写真右のように円柱形状において説明した。平面である長方形の端同士を合わせると円柱形になる。その空洞になっている円柱形を覗いてみると、長方形の数は8つあり、折り目の線は7本になるのである。先述した「長方形がもう一つあったら、その分の折り目の数は一本少なくなるから」という発言は両端に作られた長方形同士をくっつけると大きな長方形になることをさしていたのである。考え方としては C27 も C26 も同じだが、そのように考えた方法は違っていたのである。





5 まとめと今後の課題

本研究の目的は「関数の考え」を働かせ、問題解決することの有用性を子供が実感するための授業を提案することであった。提案した授業では、まず1回目を折り曲げたときに教師が「何が増えた?」と問うことで、折ることに伴って変わる「長方形の数」と「折り目の数」に子供が自ら気づき、伴って変化する二つの数量の関係、すなわち依存関係に着目させることができたと考ええる。

次に折った回数に対して長方形の数と折り目の数を別々に考察するのではなく、折った回数と長方形の数の2量を考察していく中で、長方形の数と折り目の数の関係や変化に着目しやすいように板書を構造的に整理した。そうすることで「表に整理したい」という子供の発言を引き出すことができ、順序よく考察したものを表に整理することを通して、折った回数と長方形の数の関係から帰納的にきまりを発見させることができたと考える。

また、そのきまりを適用させ「実際に折らなくても、長方形の数が予想できるよ」というきまりを適用しようとする子供の発言を引き出し「関数の考え」の有用性を実感させることができた。さらに、帰納的に発見したきまりに対して「なぜ、そうなるのか」と問い、演繹的に説明する子供の姿も引き出すことができた。

以上の研究成果を踏まえ、令和2年12月21日に同様の授業を琉球大学教育学部附属小学校5年2組で行った。その授業では先述した研究の成果を発揮できたところもあったが、新たな課題が出た。

(課題)

- ・ 8回折った場合の長方形の数と折り目の数はいくつになるのか、という課題に対して「4回折った場合はどうなるのか、5回折った場合はどうなるのか」と少ない折り数から順序よく整理していく発想がもてず、答えの見通しを全く持てなかった子が数名いた。
- ・ 8回折った場合の全体の話し合いの中で「どのように考えて答えを出したのか」と教師が発問したため、子供はなぜ「長方形の数が2倍ずつ増えていくのか」の説明に終始し、先述した答えの見通しを持てなかった子は長方形の数もわからぬまま、さらに混乱した状態になった。

本教材は「関数の考え」を働かせ、問題解決していく力を育むことができるものとする。しかし、折った回数に対して長方形の数と折り目の数の両方が変数となるため、折った回数に対する長方形の数と折り目の数の両方を整理していきながら展開するところに、授業展開の難しさがある。

これらの成果と課題を踏まえ、今後も「関数の考え」を育む教材の開発と授業展開を探究していきたい。

参考・引用文献

- ・文部科学省（2018） 学習指導要領解説算数編 日本文教出版
- ・中島健三（1981） 算数・数学教育の数学的な考え方 金子書房
- ・小倉金之助（1973） 数学教育の根本問題 小倉金之助著作集 4
- ・杉山吉茂（2008） 初等科数学科教育学序説 東洋館出版社
- ・筑波大学附属小学校算数科研究部（2020）算数授業論究「関数の考え」東洋館出版社
- ・啓林館教科書（2018）わくわく算数 5
- ・新算数教育研究会（2012）リーディング新しい算数研究「数量関係」 東洋館出版社