

琉球大学学術リポジトリ

新弾性理論による圧力と弾性応力解析

メタデータ	言語: 出版者: 沖縄科学防災環境学会 公開日: 2022-07-25 キーワード (Ja): キーワード (En): elasticity, inner stress, strain, elastic modulus, pressure, Hooke' s law, thermal expansion 作成者: 仲座, 栄三 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24564/0002019407

新弾性理論による圧力と弾性応力解析

仲座 栄三¹

¹正会員 琉球大学工学部社会基盤デザインコース (〒903-0213 沖縄県西原町字千原 1 番地)

E-mail: enakaza@tec.u-ryukyu.ac.jp

従来の弾性力学の定義によれば、温度分布に応じた熱膨張ひずみは存在しても、その温度分に応じた内部応力は存在しない。これと同様に、例えば、縦方向一軸圧縮において、材料が横方向にいかような変形を見せていても、その変形に対応するような横方向内部応力は存在しない。こうした応力の定義が、Navierの時代から(弾性学の創成期から)約2世紀を経てもいまなお連続と継続されている。このような応力評価では、材料の耐力を正しく解析し得ない。仲座は、このような問題点を指摘し、新しい弾性理論を提示している。本論は、仲座の提示する新弾性理論に基づいて、温度分布に対応する内部応力分を具体的に示すと共に、その応力が外部荷重の引き起こす内部応力と分離されることを示している。

Key Words : elasticity, inner stress, strain, elastic modulus, pressure, Hooke's law, thermal expansion

1. はじめに

Hookeの法則は、弾性材料の変形(ひずみ)と内部応力とに比例関係が存在することを主張している¹⁾。すなわち、材料にひずみが計測される時、それに線形対応して内部応力が必ず存在することを規定している。

弾性材料に温度分布が存在するとき、一般にその温度に応じた熱膨張ひずみが計測される。このことを単純にHookeの法則に則って考えてみると、熱膨張を引き起こす内部応力の存在が想定される。

しかしながら、従来の弾性学は、弾性材料がいかように熱膨張していても、その変形を引き起こす内部応力は存在しないと説明する。当然ながら、それでは、その熱膨張ひずみはどうして生まれたか?というような素朴な疑問にかられよう。また、力学を論じる以上は、その変形を生じさせる応力の存在を見出す必要があろう。

仲座^{2,3)}は、熱膨張を生じさせる内部応力として圧力の存在を新たに定義し、弾性材料の内部応力として他にHookeの法則に規定される弾性応力を定義している。従来の弾性力学は、等方性弾性材料に対するHookeの法則に2つの弾性係数を認めるが、仲座の新弾性理論ではただ1つの弾性係数のみが導入されることを特徴としている。

本論では、お湯を注いだ茶碗を応力解析の実例として取り上げ、材料が受ける温度分布に応じた内部応力(圧力)の分布を示す。また、その圧力の作用がHookeの法則に則って引き起こす弾性変形とその変形に対応する弾性応力を明示することを目的としている。

2. 基礎方程式

仲座の提示する新弾性理論では、等方性弾性

体に対して、以下に示す内部応力式及び変形の支配方程式を基礎方程式としている^{2,3)}。

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2Ee_{ij} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{X} - \text{grad } p + E \nabla^2 \mathbf{u} + E \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) \quad (2)$$

ここに、 ρ は材料密度、 E は弾性係数、 \mathbf{u} は材料の微小変位ベクトル、 \mathbf{X} は外力加速度ベクトル、 p は圧力、 σ_{ij} は内部応力テンソル、 ε_{ij} は歪みテンソル、 δ_{ij} はKroneckerのデルタテンソルを表す。

式(1)の右辺第1項は圧力を表し、第2項がフックの法則による弾性応力を表す。したがって、フックの法則に則る弾性係数はただ1つとなる。

一方、従来の弾性理論が規定する基礎方程式は、次のように与えられる^{4,5)}。

$$\sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G(\varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{X} + K\nabla^2 \mathbf{u} + G\nabla^2 \mathbf{u} + 1/3G \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) \quad (4)$$

ここに、 K は体積弾性係数、 G はせん断弾性係数、 ε_{kk} は体積ひずみを表す。

式(3)に示すように、従来の弾性学は、フックの法則に2つの弾性係数を導入することを特徴としている。したがって、内部応力は、外から材料にかかる荷重あるいは応力の作用に応じてのみ現れることになり、内部応力は受動的な応力となる。すなわち、従来の弾性学では、能動的に作用して材料変形を引き起こす内部応力は存在

しない。それは、内部応力のすべてがHookeの法則に従うものとしているからであり、2つの弾性係数を導入しているということに尽きる。

従来の弾性学では、弾性係数としてLaméの弾性係数が導入される場合もあるが¹⁾、第2弾性係数の物理が不明確となっているため、ここでは代表例として式 (3) を示すことにした。

式 (1) に示す圧力は、熱力学における状態方程式を参照すれば、密度と温度によって規定される。すなわち、圧力変化は、次に示す状態方程式を通じて決定される²⁾。

$$p = -\Theta \varepsilon_{kk} + R \delta T \quad (5)$$

ここに、 Θ は材料密度変化に係わる係数、 R は温度変化に係わる係数、 T は絶対温度、 δT は温度変化を表す。詳しくは文献³⁾を参照して頂きたい。

弾性材料の自由熱膨張の場合を想定すると、式 (5) より温度変化に応じた圧力変化が規定される。その結果、式 (1) より次なる関係が与えられる。

$$p = 2Ee \quad (6)$$

ここに、 e は熱膨張ひずみ (等方ひずみ) を表す。

式 (6) は、従来の弾性学が規定する熱膨張ひずみの発生メカニズムを表しており、圧力変化がフックの法則に則って引き起こす弾性変形であることを示している。

新弾性理論は、弾性体の内部応力に圧力の存在を認めることで、従来の弾性学が答えることのできなかつた「熱膨張は何の力が引き起こすものか？」に明確に答えている。

3. お湯を注いだ茶碗の内部応力解析事例

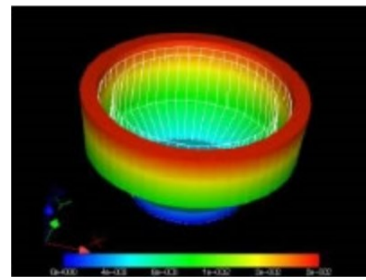
新弾性理論に基づいて、茶碗の変形に及ぼす温度分布と、茶碗をささえる手の指圧の影響による応力と変形の数値解析事例を図-1に示す。温度条件としては、茶碗の底から上に向けて温度が高まるように設定されている。

図-1 (下図) に示す応力分布は、温度分布に応じた圧力と指圧が材料に及ぼす合応力であり、式 (1) の右辺第2項に基づく弾性応力を表す。従来の解析によれば、内部応力として現れるのは指圧の及ぼす応力のみとなる。新弾性理論による結果は、材料が圧力と指圧の両方の応力を受けていることを表している。

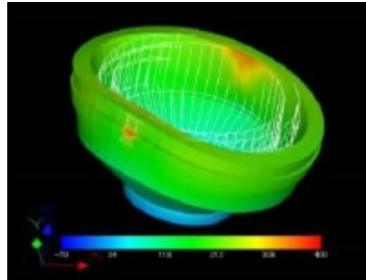
新弾性理論によれば、材料の耐力評価は、温度分布を反映した圧力分布と指圧による内部応力との合成応力で評価される。例えば、材料が自由熱膨張のみの変形を受けている場合でも、温度変化に伴う圧力の強さに応じて耐力評価が行われる。合成応力がある大きさに達した段階で、脆性材料は破壊を見せることになる。

圧力は材料内部に等方応力として現れるので、圧力による破壊は、材料の不均質性を引き金としたものとなる。

一軸圧縮下の材料破壊に対しても同様なことが言える。材料の圧縮変形による密度変化を受けて圧力変化が現れ、それが材料に等方変形をもたらす。この場合の材料破壊



圧力分布



熱による圧力と指圧による内部応力分布

図-1 お湯を注いだ茶碗の内部応力の解析事例

も圧力によるものとなり、材料の不均質性が破壊現象の切っ掛けを与えることになる。このとき、破壊面は弾性応力にしたがって、縦方向に現れる。

4. おわりに

仲座の提案している新弾性理論に従い、弾性材料に温度分布が引き起こす圧力変動及び弾性応力の解析事例を示した。Hookeの法則に係わる弾性係数をただ1つと定義し、内部応力として材料変形に能動的な作用を有する圧力の存在を認めることで、弾性学における力学は、連続体力学へと統一される。

謝辞

図-1に示す数値計算に当たっては、琉球大学工学部社会基盤デザインコースの富山潤准教授の協力を得ている。ここに記し、感謝の意を表す。

参考文献

- 1) Y.C. Fung (1994): *A First Course in Continuum Mechanics*, Third Edition, PRENTICE HALL, 311p.
- 2) 仲座栄三 (2005) : *物質の変形と運動の理論*, ボーダーインク, 427p.
- 3) 仲座栄三 (2010) : *新・弾性理論*, ボーダーインク, 97p.
- 4) S. Timoshenko (1983): *History of Strength of Materials*, Dover Publications, Inc., New York, 452p.
- 5) G. G. Stokes (1945): On the theory of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, Cambridge Trans., Vol. XVIII, pp.287-319.

(2017.5.18 受付)