

琉球大学学術リポジトリ

Bell の宇宙船パラドックスを解く

メタデータ	言語: 出版者: 沖縄科学防災環境学会 公開日: 2022-07-25 キーワード (Ja): キーワード (En): Lorentz transformation, Bell's spaceship paradox, time delay, length contraction, relativity 作成者: 仲座, 栄三 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24564/0002019420

Bell の宇宙船パラドックスを解く

仲座栄三¹

¹正会員 琉球大学工学部工学科 (〒903-0123 沖縄県西原町千原1番地)
E-mail: enakaza@tec.u-ryukyu.ac.jp

アインシュタインの相対性理論には、時間や長さによつて異なる様々なパラドックスの存在が指摘されている。その内の一つに2台のロケットの同時出発に関するパラドックスがある。これは、Bell の宇宙船パラドックスとも呼ばれている。この問題は、アインシュタインの特殊相対性理論の根幹を成すローレンツ変換式から導かれる時間や長さの相対論から派生している。本論は、この問題に解決を与えている。

Key Words: Lorentz transformation, Bell's spaceship paradox, time delay, length contraction, relativity

1. はじめに

Bell の宇宙船パラドックス (Bell's spaceship paradox) は、インターネット上のウェブサイト¹や相対性理論関連の書籍^{2,3}などで紹介されている。それらの説明を著者なりに要約説明すると、問題設定は以下のとおりである。

静止系で2台のロケットが、これから飛び立つ方向の一直線上に、距離 l_0 だけ隔てて静止している。これら2台のロケットから等位置に静止している観測者(これを以下、静止系の観測者と呼ぶ)によれば、このとき2台のロケットは、緩みのない赤い糸でしっかりと結ばれている。

この観測者の報告によれば、その後、2台のロケットは同時に出発し、2台ともまったく同じ一定の速度 v で運動している。

このような状況下において、当初2台の間を緩みのない状態でしっかりと結んでいた赤い糸は、いかなる状態にあるか(すなわち、緩んでいるか、あるいは切れているか、それとも元の状態で緩みもなくしっかりと2台のロケットを結んだままにあるか)。

静止系の観測者によれば、静止していた2台のロケットは、同時に出発し、共にまったく同じ速度で運動しているので、両ロケット間の距離は出発の前後で変化はなく、「両ロケットを緩みもなくしっかりと結んでいた赤い糸は、出発の前後で、そして未来永劫にそのまま両者をしっかりと結んだままにある」と想定するのが、我々の一般的な常識であろう。

この問題については、著者もこれまでに幾度か論じている^{4,5}。著者は、アインシュタインの相対性理論を誤りであると指摘した上で、新たな相対性理論を展開しながらも、本問題に対する著者の当初の見解は、ほぼ従来の説明に沿うものであった⁴。すなわち、「赤い糸は、ロケットの出発の時点で(先頭のロケットのフライング出発によって²)、切れている」とするものであった。しかし、後に文献⁵)においては、これを否定し、新たな相対性理論に則った形の説明を与えている。それは、従来の見解とは逆に「赤い糸は、2台のロケットの出発の前後において元のままで、そして未来永劫に、そのまま両者をしっかりと緩みなく結んだままにある」とする結論となっている⁵。

本論では、従来の説明、すなわち Bell の説明には誤りがあることを具体的に説明し、新たな説明を提示する。

2. 従来の説明の誤りの具体的解説

2.1 アインシュタインの相対性理論⁶

本節における説明内容は、すでに文献⁵)において与えてあるが、次節以降の理解が容易となるように、ここに再度述べる。

従来の説明が頼るアインシュタインの特殊相対性理論の本質を成すローレンツ変換は、次のように与えられる。

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t - vx/c^2) \quad (1)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x - vt) \quad (2)$$

$$y' = y \quad (3)$$

$$z' = z \quad (4)$$

ここに、 (x, y, z) 及び t はそれぞれ静止系の空間座標及び時間、 (x', y', z') 及び t' はそれぞれ運動系の空間座標及び時間、 v は運動系の静止系に対する移動速度、 c は光の速さを表す。いま運動系は、 x 軸の正の方向に、一定速度で運動する場合が仮定されている。

式 (1) から式 (4) に示されるように、アインシュタインの相対性理論では、ローレンツ変換した先の時間及び空間座標がアブリオリに運動系の時間及び空間を表すものと定義されている。

式 (1) 及び式 (2) に、

$$x = vt \quad (5)$$

及び

$$x = vt + l \quad (6)$$

をそれぞれ代入し、次なる関係式を得る。

$$t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} t \quad (7)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} l \quad (8)$$

ここに、 l は運動物体の運動方向の長さが静止系で計測される際の長さを表す。

アインシュタインは、相対性原理によって、式 (8) より、次の関係を与えている。

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} l \quad (9)$$

ここに、 l_0 は運動物体が観測者の目前で静止して計測される際の長さを表す。

アインシュタインは、式 (7) 及び式 (9) にもとづいて、「運動系の時間 t' は静止系の時間 t よりも遅れており、静止系で観測される運動系の運動方向の長さ l はそれが静止して観測される際の長さ l_0 よりも短縮している」とする説明を与えている。その結果、時間及び長さはすべての慣性系に対して絶対的（あるいは不変的）なものではなく、それぞれの慣性系に依存した相対的なものであるとする概念が生まれ、ニュートン力学で定義される不変的な時間や長さの定義は、物理学の世界から葬りさられることとなった。

2.2 従来の説明^{1),2),3)}

問題の設定条件から、静止系の観測者に対しては、2 台のロケット間の距離は、それらが出発前もまた出発後も終始一定となって観測されている。ここで、出発前のロケット間の距離を l_0 と置く。出発後の両ロケットは、静止系の x 軸に沿って一定速度 v で運動する。

2 台のロケットと等位置にいる静止系の観測者によれ

ば、先頭のロケットの出発時の位置と時刻は、それぞれ $x = l_0, t = 0$ と与えられる。同様に、後方のロケットの出発時の位置及び時刻は、それぞれ $x = 0, t = 0$ と与えられる。

静止系の観測者によるこれらの観測値を、アインシュタインの式 (1) 及び式 (2) に代入し、運動系（すなわち、ロケットのパイロット）に計測される時間及び位置が、次のように与えられる。

先頭のロケットに対して：

$$t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \left(-\frac{v/c}{(1 - v^2/c^2)} \frac{l_0}{c} \right) \quad (10)$$

$$x' = l_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (11)$$

後方のロケットに対して：

$$t' = 0 \quad (12)$$

$$x' = 0 \quad (13)$$

したがって、静止系の観測者が 2 台のロケットは共に同時 ($t = 0$) に出発したとする説明に対して、式 (10) 及び (12) によれば、運動系の観測者（パイロット）の測る出発時刻は、先頭のロケット及び後方のロケットに対してそれぞれ式 (10) 及び式 (12) に示す時刻で与えられる。すなわち、静止系の観測者による同時出発という説明に対して、それぞれのロケットに乗るパイロットの観測によれば、非同時出発（先頭のロケットの出発時刻が、後方のロケットの出発時刻よりも先であった）と説明される。

さらに、静止系の観測者による「出発時の 2 台のロケット間の距離は l_0 であった」とする説明に対して、式 (11) 及び (13) によれば、パイロット達の測るロケット間距離は、それよりも伸びていて、次のように与えられる。

$$l' = l_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (14)$$

すなわち、パイロット達の観測結果によれば、ロケット間距離は、静止系の観測者による 2 台のロケットの同時出発の瞬間に、式 (14) に示す距離に伸びていることになる。

このように、出発と同時にロケット間距離が伸びていることは、先に説明したように、「後方のロケットの出発時刻よりも先頭のロケットの出発時刻が早かった」とするパイロットの証言と符合する。

以上の考察から、出発前に 2 台のロケットをしっかりと結びつけていた赤い糸は、「2 台のロケットは同時に出発した」というその瞬間に切れているとする判断が与えられる。

しかしながら、そのような説明は、アインシュタインが相対性理論構築の前提として導入した相対性原理に背

く。アインシュタインは、相対性原理によって、式 (9) を与えている。アインシュタインは、この関係式をもって、「運動している剛体棒は、その静止時の長さよりも短縮して観測される（すなわち、運動物体は静止系の観測者に短縮して観測される）」とする判断を与えた。これは、長さの相対論と呼ばれている。

式 (9) に示されるように、アインシュタインの相対性理論によれば、一定速度で運動している物体の長さは運動方向に短縮して観測される（静止系の観測による）。前節で説明した2台のロケットの同時出発の問題の場合、出発の後に一定速度状態にある2台のロケット間の距離は、式 (14) が示すように、両ロケットが静止時の長さ l_0 よりも伸びている（パイロット達による観測結果）。この伸びた運動系の長さが静止系から測定されるので、アインシュタインの説明「運動している物の長さは縮む」にしたがって、伸びたのが縮んで観測される。結局、静止系の観測者に観測されるロケット間長は、「ロケットの出発の前後で一定である」と解釈され、話のつじつまは合っていると説明されている。

しかしながら、このような「運動系の長さが、その静止時の長さよりも実際に伸びている」とする解釈は、式 (14) を誘導する際に、アインシュタインが与えた相対性原理、「運動系で測られる長さは、それが静止していたときの長さ l_0 と同じであるとする式 (9) の設定（系間の対称性）に背くことになる。すなわち、従来の説明では、相対性原理が満たされていない。

2.3 従来の説明の誤り

式 (1) 及び式 (2) に示すアインシュタインのローレンツ変換式によれば、運動系は静止系の原点位置から出発し、 x 座標はその座標原点位置から運動系の運動方向に取られている。また、その出発時を静止系も運動系も共にゼロ時と設定している。

したがって、静止系の座標原点位置 $x = 0$ は、その位置を出発する後方のロケットにのみ適用されなければならない。先頭のロケットに対しては、座標原点位置は $x = l_0$ に置かれる。

このとき、式 (1) 及び式 (2) に対する座標原点位置を $x = l_0$ に設定した上で、先頭のロケットに乗るパイロットの測る出発時の時刻及び位置が、次のように与えられる。

$$t' = 0 \quad (15)$$

$$x' = 0 \quad (16)$$

ここに、 t' 及び x' は先頭のロケットのパイロットの測る出発時の時間及び位置（但し、 $x = l_0$ に、 x 軸の原点

を移動した後）を表す。

したがって、出発位置の異なる2台のロケットに対して、ローレンツ変換式を正しく適用するとき、従来の説明とは異なり、2台のロケットのパイロットがそれぞれに観測した出発時刻は、静止系の観測者の測る両ロケットの出発時刻とまったく同じで、いずれのロケットに対してもゼロ時と説明される。このとき、パイロットの測る2台のロケット間の距離も l_0 となり、静止系の観測者の測る2点間距離 l_0 とまったく同じとなる。これらの観測結果は、静止系でも運動系でも共にまったく同じ観測結果を与えており、相対性原理（両系間の対称性）は、完全に満たされている。

以上の考察によって、「従来の説明、すなわち J. S. Bell の説明は誤っていた」と結論される。

3. 仲座の新相対性理論による説明

それでは、従来の説明による式 (10) や式 (14) は何を表すものであったか？以下に、このことについて説明を与える。

仲座の提案する新相対性理論^{9,10}によれば、ローレンツ変換した先の時間及び空間座標〔ローレンツ変換式 (1) ~ (4) の左辺〕は、静止系から放たれた光（電磁波）が運動系の観測者に伝える時間及び空間座標と定義される。

ここで、静止系の空間座標及び時間を (x, y, z) 及び t で表し、運動系の空間座標及び時間を (X, Y, Z) 及び T で表すことにする。相対性原理による系間の対称性によって、両系の空間座標の目盛間隔は互いに等しく、経過時間も未来永劫に互いに等しくなければならない。

したがって、相対性原理のもとに、両系の時間に関して、以下の関係が与えられる。

$$t = T \quad (17)$$

また、両系の観測者に観測される静止物体の長さについても、相対性原理に則り、それらは互いに等しく、運動によらない量でなければならない。このように両系に対して物理的に定義される時間と空間の単位は、いかなる力学計測においても不変となっていなければならない。こうした定義は、「運動系の時間や空間が相対速度に依存する」とするアインシュタインの時空の相対論と根本的に異なる。ここに展開される相対性理論が、新相対性理論と呼ばれる所以の第一義がここにある。

静止系を基準とするとき、新たなローレンツ変換は、次のように与えられる。

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (18)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (19)$$

$$y' = y \quad (20)$$

$$z' = z \quad (21)$$

ここに、 γ は $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ を表す。運動系の運動は x 軸方向にある。これらの式の左辺に示す時間や空間座標は、静止系から放たれた光（電磁波）が運動系の観測者に伝える伝播時間及びその光が運動系内を伝播した空間座標値と定義される。こうして、アインシュタインの相対性理論と仲座の新相対性理論との根本的相違は、ローレンツ変換の定義にある。

相対性原理によって、運動系で測られる静止物体の長さは、静止系で静止している物体の長さと同じであるから、次なる関係が成立する。

$$x = vt + l_0 \quad (22)$$

ここに、「運動物体の長さ l_0 は不変である」という相対性原理が働いている。

式 (19) に、運動系の観測者の静止系に占める位置 $x = vt$ を代入し、次なる関係を得る。

$$t' = t\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (23)$$

また、式 (22) を式 (19) に代入し、次なる関係を得る。

$$x' = l_0/\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (24)$$

新相対性理論においては、ローレンツ変換した先の時間や座標は、静止系から放たれた光が運動系の観測者に観測される時、その光が伝える時間及び座標の情報であると定義されている。したがって、式 (23) 及び式 (24) は、静止系の原点位置から放たれた光が、出発したロケットのパイロットに観測される時、その光がパイロットに伝える時間情報及びその光がその時間内に描く伝播距離を表す。

式 (24) は従来の説明の式 (14) に対応する。従来の説明では、左辺に示す l' がパイロットの測る先頭のロケット位置と解釈されているのに対して、新相対性理論による式 (24) の左辺に見る x' は、静止系の原点位置から放たれた光が、後方のロケットの観測者位置を原点とする運動系内を伝播した距離を表す。したがって、静止系の原点からロケットの出発と同時に放たれた光が、後方のロケットのパイロットに観測される時、その伝播時間は、

$$t' = \frac{l_0}{c} / \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (25)$$

で与えられる。

式 (23) によれば、静止系から運動系に届く光が運動系の観測者に伝える時間情報は静止系の時間よりも短縮

していることになるので、式 (25) の時間 t' に対応する静止系の時間 t は、次のように与えられる。

$$t = \frac{l_0}{c} / (1 - v^2/c^2) \quad (26)$$

すなわち、静止系の原点にいる観測者は、ロケットに向けて式 (26) に示す時間に亘って光を放ったことになる。したがって、静止系の観測者に観測される光の伝播距離 l は、次のように与えられる。

$$l = l_0 / (1 - v^2/c^2) \quad (27)$$

しかし、この光の伝播が運動系である後方のロケットのパイロットに観測される時、その伝播時間及び伝播距離はそれぞれ、式 (25) 及び式 (24) で与えられる。すなわち、相対速度を有する系から届く光が伝える時間情報及びその伝播距離 [式 (25) 及び式 (24)] は、静止系の観測者が観測した時間及び距離 [式 (26) 及び式 (27)] よりも共に短縮して計測される。

式 (10) は、 $t = 0$ 及び $x = l_0$ と与えて得られているので、静止系の座標原点 $x = 0$ から $t = 0$ 時に放たれた光は未だ $x = l_0$ の位置に届いてなく、したがって計測時間 t' はマイナス値となっている。また、式 (10) の右辺の () 内に示す量は、静止系の観測者の光伝播の計測に関して、運動系の長さ l_0 を光が行きと戻りとの伝播に要する時間を平均時間に変換するための調整時を表している [詳しくは、文献 5) を参照して頂きたい]。

これまでの議論は、静止系の原点位置から放たれた光が、後方のロケットのパイロットに計測される際の伝播時間及び伝播距離と静止系の観測者の計測するそれらとの関係にあった。先頭のロケットのパイロットの計測時間や距離と静止系のそれらとの関係は、光を放つ位置を先頭のロケットの出発前位置に置きかえることで、式 (22) から式 (27) までと同じ結論が得られる。

式 (25) 及び式 (24) と式 (26) 及び式 (27) の関係より、次なる「時間のおくれ」と「長さの短縮」の関係が与えられる。

$$t' = t\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (28)$$

$$l' = l\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (29)$$

これらの関係を、新たな相対性論による「観測される時間 t' 及び長さ l' の相対論」と呼ぶことができる。したがって、アインシュタインが定義しようとした相対論的時空は、相対速度を有する系から届く光（電磁波）が伝える時空にあり、加速度場や重力場で計測される時空にあったと結論される。このとき、その計測に用いられる各系の時間及び空間は、時間について式 (17) が示すように、絶対的かつ不変的な量として定義される。以上の議論により、アインシュタイン⁹⁾ が葬りさった慣性系に

対する時間や長さの不変的概念は、100 年余の時を経て、相対性理論の根幹として、ここに復活される。

4. おわりに

新相対性理論によれば、時間や長さ（空間）の不変的な単位が物理的に定義される。そのように定義される時間及び長さの単位を用いて、静止系及び運動系の時間や空間座標が互いに等しく定義される。その上で、相対速度を有する慣性系から届く光など電磁波が伝える伝播時間及び伝播距離が、ローレンツ変換によって与えられる。

2台のロケットの同時出発の問題、すなわち Bell の宇宙船パラドックスに関する従来の説明が誤っていることを具体的に示した上で、新相対性理論によつてそれに対する正しい解釈が与えられた。従来の説明の誤りを解く鍵は、相対性理論の適用に当たっての初歩的なところにあった。我々は長年、Dewan and Beran や Bell の初歩的なミスに振り回されたことになる。

謝辞

本研究を実施するに当たり、「尾崎次郎基金」の支援を受けたことに対し、心からの感謝の念を捧げる。また、琉球大学大学院理博士後期課程修了者の稲垣賢人博士、

在学中の田中聡氏には、本論を通読頂き貴重な提言等を頂いた。ここに記し、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) WIKIPEDIA: Bell's spaceship paradox, https://en.wikipedia.org/wiki/bell%27s_spaceship_paradox, 2019.
- 2) 竹内薫：ゼロから学ぶ相対性理論，講談社，211p., 2001.
- 3) 松田卓也：特殊相対性理論のパラドックス，2台のロケットのパラドックスを巡って，別冊・数理科学，サイエンス社，pp.45-52，2005.
- 4) 仲座栄三：新・相対性理論，ボーダーインク，180p., 2015.
- 5) 仲座栄三：アインシュタインの相対性理論に関する時間及び長さのパラドックスを解く，沖縄科学防災環境学会論文集(Physics)，Vol.4，No.1，pp.15-23，2019.
- 6) 内山龍雄訳・解説：アインシュタイン相対性理論，岩波文庫，187p., 1988.
- 7) 仲座栄三：アインシュタインの相対性理論の矛盾点の分析と仲座の新相対性理論の導出，沖縄科学防災環境学会論文集(Physics)，Vol.4，No.1，pp.1-14，2019.

(2019 12. 2 受付)